Correction des exercices du 11/03/2024 (Calcul différentiel)

Ex 1 : Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x} - xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $D = \mathbb{R}^2$ (on pourra poser $u = x$, $v = ye^{x^2/2}$).

Correction : Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que « $g(u,v) = f(x,y)$ », en posant $u = x$, $v = ye^{x^2/2}$. On remarque que dans ce cas, (u,v) décrit $\mathbb{R}^2$ quand (x,y) décrit $\mathbb{R}^2$ et comme on a : $x = u$, $y = ve^{-u^2/2}$, cela permet de poser $g : (u,v) \mapsto f(u, ve^{-u^2/2})$, qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
On a $f(x,y) = g(x, ye^{x^2/2})$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi on a :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(x, ye^{x^2/2}) + xye^{x^2/2}\dfrac{\partial g}{\partial v}(x, ye^{x^2/2}) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + uv\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2/2}\dfrac{\partial g}{\partial v}(x, ye^{x^2/2})$,
puis : $xy\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xye^{x^2/2}\dfrac{\partial g}{\partial v}(x, ye^{x^2/2}) = uv\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$.
On a donc : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - xy\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)$, ainsi f est solution de notre équation si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$.
Ainsi il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = h(v)$.
Or : $\forall v \in \mathbb{R},\ h(v) = g(0,v)$, donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi en revenant à la fonction f, l'ensemble des solutions est $\{(x,y) \mapsto h(ye^{x^2/2}),\ h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\}$.

Ex 2 : Étude des extrema locaux et globaux de $f : (x,y) \mapsto (x^2-1)^2 + (x^2 - e^y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction : $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ainsi un extremum local est un point critique.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x(x^2-1) + 4x(x^2 - e^y) = 8x^3 - 4x - 4xe^y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2e^y(x^2 - e^y) = -2e^yx^2 + 2e^{2y}$.

Ainsi (x,y) est un point critique si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 - 4x - 4xe^y & = & 0 \\ -2e^y(x^2 - e^y) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 8x^3 - 4x - 4xe^y & = & 0 \\ e^y & = & x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1) & = & 0 \\ e^y & = & x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x & = & 0 \\ e^y & = & 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x & = & 1 \\ e^y & = & 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x & = & -1 \\ e^y & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x & = & -1 \\ y & = & 0 \end{cases}$, car $e^y \neq 0$.

Les points critiques sont $(1,0)$ et $(-1,0)$.
Regardons la Hessienne de f en ces points. On a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 24x^2 - 4 - 4e^y$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2e^yx^2 + 4e^{2y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -4xe^y$.
On a donc $A = H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.
On a $\det(A) = \det(B) = 24 > 0$ et $tr(A) = 28$. Ainsi les valeurs propres de A et de B sont de même signe, car le déterminant est strictement positif. Comme la trace est strictement positive, alors les valeurs de A et B sont strictement positives. Ainsi A et B sont dans $S_2^{++}(\mathbb{R})$.
Donc $f(1,0) = f(-1,0) = 0$ est un minimum local.
La Hessienne n'était pas forcément utile, car on constate que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geq 0$, donc il est immédiat que 0 est un minimum local.
f n'a pas de maximum ni local ni global.