
<u>Ex 1</u> : (E3A PSI 2009 épreuve B) On considère une matrice carrée A d'ordre 4 à coefficients réels. On suppose que le rang de A est égal à 3, que la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1, que -1 est valeur propre double de A.

1. Prouver que 0 est valeur propre de A.
2. Prouver que 1 est valeur propre de A.
3. Déterminer le polynôme caractéristique noté $P_A(X)$ de la matrice A.
4. Pour k entier naturel, $k \geq 4$, déterminer le reste, noté $R_k(X)$, de la division euclidienne de X^k par $P_A(X)$.
5. Pour k entier naturel, $k \geq 4$, démontrer que A^k est combinaison linéaire de A, A^2 et A^3 et déterminer cette combinaison linéaire.

Correction :

1. D'après le théorème du rang $E_0(A) = \mathrm{Ker}\,(A)$ est de dimension $4 - \mathrm{rg}(A) = 1$ et est donc une droite vectorielle. En particulier, 0 est valeur propre de A.
2. Avec les hypothèse sur la somme par ligne des coefficients de A, on peut affirmer que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, car $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{4}[A]_{1,j}\\ \sum_{j=1}^{4}[A]_{2,j}\\ \sum_{j=1}^{4}[A]_{3,j}\\ \sum_{j=1}^{4}[A]_{4,j}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.
3. 0 et 1 sont valeurs propres (et donc de multiplicité au moins 1) et -1 est valeur propre double. La somme des multiplicités des valeurs propres n'excédant pas 4 (dimension de l'espace), on a toutes les valeurs propres (racines de P_A). Comme P_A est unitaire on a ainsi
$$P_A = X(X-1)(X+1)^2 = X^4 + X^3 - X^2 + X.$$
4. R_k est de degré inférieur à 3 et s'écrit $a_kX^3 + b_kX^2 + c_kX + d_k$. En notant Q_k le quotient, on a : $X^k = P_AQ_k + R_k$; dans cette égalité, on remplace X par $0, 1, -1$ (qui sont racines de P_A) et pour avoir une dernière équation, on la dérive, ce qui donne $kX^{k-1} = 3a_kX^2 + 2b_kX + c_k + P_A'Q_k + P_AQ_k$ puis en remplaçant X par -1 (-1 étant racine double de P_A, donc $P_A'(-1) = 0$) , on obtient (pour $k \geq 1$) $\begin{cases} d_k = 0\\ a_k + b_k + c_k + d_k = 1\\ -a_k + b_k - c_k + d_k = (-1)^k\\ 3a_k - 2b_k + c_k = k(-1)^{k-1} = -k(-1)^k \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} a_k = \dfrac{1+(3-2k)(-1)^k}{4}\\ b_k = \dfrac{1+(-1)^k}{2}\\ c_k = \dfrac{1+(2k-5)(-1)^k}{4}\\ d_k = 0 \end{cases}$.

5. Comme P_A annule A (théorème de Cayley-Hamilton) on en déduit que pour $k \geq 1$:

$$A^k = P_A(A)Q_k(A)+R_k(A) = R_k(A) = \frac{1+(3-2k)(-1)^k}{4}A^3+\frac{1+(-1)^k}{2}A^2+\frac{1+(2k-5)(-1)^k}{4}A.$$

Fin de la correction des exercices de TD

<u>Ex 2</u> : On étudie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $(E) : ty'' + (1-2t)y' + (t-1)y = 0$.

1. Vérifier que $\varphi : t \mapsto e^t$ détermine une solution de (E).

2. Donner une expression du wronskien w de deux solutions de cette équation.

3. En déduire une solution de (E) indépendante de φ et exprimer la solution générale de (E).

Correction :

1. On a : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ te^t + (1-2t)e^t + (t-1)e^t = 0$.

2. Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation (E) s'écrit : $y'' + ay' + by = 0$, avec $a : t \mapsto \dfrac{1}{t} - 2$ et $b : t \mapsto 1 - \dfrac{1}{t}$.
Soient u et v deux solutions de (E).
On pose $w = uv' - u'v$ leur wronskien.
On a sur $\mathbb{R}_+^*$: $w' = u'v' + uv'' - u''v - u'v' = uv'' - u''v = u(-av' - bv) - (-au' - bu)v = -a(uv' - u'v) = -aw$.
Ainsi w vérifie l'équation différentielle $w' + aw = 0$.
Une primitive de a est $t \mapsto \ln(t) - 2t$, car $\ln|t| = \ln(t)$, puis il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$\forall t \in \mathbb{R},\ w(t) = \lambda e^{-\ln(t)+2t} = \lambda e^{\ln(1/t)}e^{2t} = \lambda \dfrac{e^{2t}}{t}$.

3. On cherche ψ une solution de (E) qui est indépendante de φ. On pose $w = \varphi\psi' - \varphi'\psi$ leur wronskien. On cherche par exemple ψ tel que le wronskien w vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ w(t) = \dfrac{e^{2t}}{t}$, on prend $\lambda = 1$ dans la question précédente.
On veut donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^{2t}}{t} = \varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t) = e^t\psi'(t) - e^t\psi(t)$, soit :
$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi'(t) - \psi(t) = \dfrac{e^t}{t}$.
Résolvons cette équation.
Les solutions homogènes sont les solutions de $\psi' - \psi = 0$, qui sont $\{t \mapsto \mu e^t,\ \mu \in \mathbb{R}\}$.
Cherchons une solution particulière de la forme $t \mapsto \mu(t)e^t$.
On a donc : $\mu'(t)e^t = \dfrac{e^t}{t}$, puis $\mu'(t) = \dfrac{1}{t}$ et donc $\mu(t) = \ln|t| = \ln(t)$ convient.
Ainsi $\psi : t \mapsto e^t\ln(t)$ est une autre solution qui convient.

On peut le vérifier. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $\psi'(t) = e^t\ln(t) + \dfrac{e^t}{t}$, puis : $\psi''(t) = e^t\ln(t) + 2\dfrac{e^t}{t} - \dfrac{e^t}{t^2}$.
On a : $t\psi''(t) + \psi'(t) - 2t\psi'(t) + t\psi(t) - \psi(t) =$
$te^t\ln(t) + 2e^t - \dfrac{e^t}{t} + e^t\ln(t) + \dfrac{e^t}{t} - 2te^t\ln(t) - 2e^t + te^t\ln(t) - e^t\ln(t) = 0$ et ψ est bien indépendante de φ (φ est bornée au voisinage de 0 et pas ψ).
(E) étant équivalente sur $\mathbb{R}_+^*$ à $y'' + ay' + by = 0$ qui est normalisée à coefficients continus, alors grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, l'espace des solutions est de dimension 2. Comme (φ, ψ) est une famille libre de cette espace, alors c'est aussi une base et donc $\mathcal{S} = vect(\varphi, \psi)$.

<u>Ex 3</u> : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Résoudre $y^{(n)} = f$, avec : $y(0) = y'(0) = ... = y^{(n-1)}(0) = 0$.

Correction : L'ésquation différentielle linéaire $y^{(n)} = f$ est normalisée à coefficients continus. Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution y telle que :
$y(0) = y'(0) = ... = y^{(n-1)}(0) = 0$.
Pour cette solution, qui est de classe $\mathcal{C}^n$, car $y^{(n)} = f$ et f est continue, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale.
Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} + \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n)}(u)du = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)du.$