5-Révisions sur les fonctions

Ex 1 : Trouver toutes les fonctions ϕ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x(\phi(x))^2 = 2\phi(x) - \dfrac{x}{x^2+1}$.

Ex 2 : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a^n$.

2. On suppose f strictement décroissante. Montrer que le réel a du ***1*** est unique.
On note a_n cet unique réel. Montrer que la suite (a_n) converge puis trouver sa limite.

Ex 3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique et continue et $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+t) = f(x)$.

Ex 4 : (*) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k} = a$ possède une unique solution dans l'intervalle $]n, +\infty[$. On la notera x_n.

2. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Trouver un équivalent simple de (x_n).

Ex 5 : Résoudre les équations : ***1.*** $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arccos}(x)$; ***2.*** $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \pi/2$.

Ex 6 : Domaines de définition et simplification de : ***1.*** $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$; ***2.*** $\tan \operatorname{Arcsin} x$; ***3.*** $\left|\operatorname{Arctan} \operatorname{sh} x\right| - \operatorname{Arccos} \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

Ex 7 : Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$; $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$; $h : x \mapsto (x^2-1)\operatorname{Arcsin}(x^2)$.

Ex 8 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto \ln(1 + \sqrt{1+x^n})$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et calculer ses dérivées successives en 0.

Ex 9 : (*) Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f'' - 5f' + 6f \geq 0$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Montrer que :
$f(x) \geq 3\exp(2x) - 2\exp(3x)$ pour tout x positif.

Ex 10 : (*) ***1.*** Déterminer l'ensemble F des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$.

2. Même question avec f continue de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ dérivable en 0 et telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}$.

Ex 11 : Trouver les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.
Montrer que l'ensemble des solutions ne change pas si on ne suppose que f continue.

Ex 12 : (*) Soit $g \in \mathscr{C}^4([0;1], \mathbb{R})$ telle que $g(0) = g(1) = g'(0) = g'(1) = 0$.
Montrer que : $\forall x \in [0;1],\ \exists \xi \in]0;1[,\ g(x) = \dfrac{g^{(4)}(\xi)}{24} x^2(1-x)^2$.

Ex 13 : Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+e^x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Étudier les variations de f. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ le point en lequel f atteint son maximum.

2. Montrer que, pour tout $x \in]0, \alpha[$, il existe un unique $y \in [\alpha, +\infty[$ tel que $f(x) = f(y)$.

On pose $y = \phi(x)$.

3. Montrer que ϕ est continue sur $]0, \alpha]$. Déterminer la limite et donner un équivalent de ϕ en 0 par valeurs supérieures.

Ex 14 : Soit $f \in \mathcal{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$ deux fois dérivables sur $]-1,1[$ avec $f(-1)=-1; f(0)=0$ et $f(1)=1$. Montrer qu'il existe c dans $]-1,1[$ tel que $f''(c)=0$.

Ex 15 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ avec I un intervalle ouvert non vide. On suppose que $a \in I$ est tel que $f(a)=a$ et $\left|f'(a)\right|<1$.

1. Montrer qu'il existe $\eta>0$ et $k \in]0,1[$ tels que $]a-\eta;a+\eta[\subset I$ et $\left|f'(x)\right| \leqslant k$ pour tout $x \in]a-\eta;a+\eta[$.

2. En déduire que $|x-a|<\eta \Rightarrow \left|f(x)-a\right| \leqslant k|x-a|$.

3. Conclure que pour $u_0 \in]a-\eta;a+\eta[$, la suite de premier terme u_0 et satisfaisant à la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ est bien définie et converge vers a.

Ex 16 : (*) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, avec $k \in [0,1[$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe.

2. Montrer que cela est faux lorsque l'on suppose seulement que :
$\forall x,y \in \mathbb{R},\ x \neq y \Rightarrow |f(x)-f(y)|<|x-y|$.

Ex 17 : Soit l'équation différentielle (E) : $\quad y''+(2-\cos(t^2))y=0$. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution de (E) à valeurs strictement négatives.

1. Montrer que f est convexe.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
En déduire une contradiction puis conclure.

Ex 18 : Soit f une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}_+^*$, croissante, mais non constante. Montrer que : $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$.

Ex 19 : Soit $f:[a;b]\to[c;d]$ croissante, convexe et bijective.
On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $a \leqslant u_0 \leqslant v_0 \leqslant b$ et les relations de récurrences (pour $n \in \mathbb{N}$) :
$u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=f^{-1}\Big(\dfrac{f(u_n)+f(v_n)}{2}\Big)$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Ex 20 : Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction convexe et $a \in I$ qui n'est pas une borne de I.
Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en a.
En déduire que f est continue sauf éventuellement aux bornes de I.

Ex 21 : *1.* Montrer que : $\forall x,y \in]1,+\infty[,\ \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.

2. Pour $a,b \geq 0$, avec $a+b=1$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1+x^a x^b \leq (1+x)^a(1+x)^b$.

Ex 22 : (*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ convexe. Montrer que : $0 \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(k)+f(k+1)}{2}-\int_0^n f \leq \frac{1}{8}(f'(n)-f'(0))$.

Ex 23 : (*) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction.
On pose $I^*=\{\lambda \in \mathbb{R},\ \sup\limits_{x\in I}(\lambda x-f(x))<+\infty\}$ et $f^*(\lambda)=\sup\limits_{x\in I}(\lambda x-f(x))$, pour λ dans I^*.

1. Montrer que I^* est un intervalle et que f^* y est convexe.

2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que f' est strictement croissante.

- *a.* Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
- *b.* Montrer que : $\forall x \in I,\ f^*(f'(x))=xf'(x)-f(x)$.

Ex 24 : (*) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on suppose que $D^2f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, calculer $D^2f(x)$.

2. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$, avec $a<b<c$ tels que $f(a)=f(b)=f(c)=0$. Montrer qu'il existe $x \in]a,c[$ tel que $D^2f(x)\leq 0$.

3. On suppose maintenant que : $\forall x \in \mathbb{R},\ D^2f(x)\geq 0$.

- *a.* Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$, avec $a<b<c$ et P dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui coïncide avec f en a,b,c. Montrer que $P''\geq 0$.
- *b.* Calculer P'' en fonction de $a,b,c,f(a),f(b)$ et $f(c)$. En déduire que f est convexe.