1 Définitions

1.1 Variables aléatoires discrètes

Définition 1.1.1 (Variable aléatoire discrète) *On appelle variable aléatoire discrète sur Ω à valeurs dans E (un ensemble) toute application X de Ω dans E telle que :*

- *L'image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable (fini ou dénombrable).*
- *Pour tout x de $X(\Omega)$, l'image réciproque $X^{-1}(\{x\})$ appartient à la tribu $\mathcal{A}$.*

Proposition 1.1.1 (Image réciproque d'un ensemble) *Soit $U \subset X(\Omega)$. Alors $X^{-1}(U)$ est aussi un événement.*

Proposition 1.1.2 (Variable aléatoire $f(X)$) *Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète et $f : E \to E'$ une application. Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire que l'on note $f(X)$.*

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 1.2.1 (Loi de probabilité de X) *On pose :*
$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$.
P_X définit une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.
P_X est appelée loi de probabilité de X.

Exemple 1.2.1 *On effectue une série de lancers d'une pièce, avec une probabilité p d'avoir Pile. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers nécessaires afin d'obtenir exactement r Pile, avec $r \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall n \geq r,\ P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{n-r} \times p = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$.*

Proposition 1.2.1 (Loi de $f(X)$) *Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une application définie sur $X(\Omega)$. La loi de $f(X)$ est donnée par :*

$$\forall y \in f(X)(\Omega),\ P(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} P(X = x).$$

2 Couples de variables aléatoires

2.1 Définitions et loi d'un couple de variables aléatoires

Définition 2.1.1 (Couple de variables aléatoires) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soient deux variables aléatoires discrètes $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$. On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) comme la variable aléatoire*

$$(X,Y) : \begin{cases} \Omega & \to & E \times F \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}.$$

(X, Y) est UNE variable aléatoire discrète.

Définition 2.1.2 (Loi d'un couple de variables aléatoires et lois marginales)

1. *La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y), noté $P_{(X,Y)}$.*
   Ainsi la loi du couple est la donnée, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, des probabilités $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x, Y = y)$.

2. *Les lois marginales de (X,Y) sont les lois de X et de Y. P_X est appelée première loi marginale et P_Y est appelée deuxième loi marginale.*

Proposition 2.1.1 (Lois marginales) *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires. Nous disposons de la loi conjointe de X et Y ($P(\{(X=x)\cap(Y=y)\})$ pour (x,y) dans $X(\omega)\times Y(\Omega)$). Alors pour tout x de $X(\Omega)$ et y de $Y(\Omega)$, on a les lois marginales :*

$$P_X(x)=\sum_{y\in Y(\Omega)} P\left((X,Y)=(x,y)\right), \quad P_Y(y)=\sum_{x\in X(\Omega)} P\left((X,Y)=(x,y)\right).$$

Exemple 2.1.1 *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi est donnée par : $\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ P((X,Y)=(j,k))=\dfrac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!}$. Déterminer les lois marginales de X et Y.*

Définition 2.1.3 (Loi conditionnelle) *Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, $A\in\mathcal{A}$, avec $P(A)\neq 0$ et X une variable aléatoire définie sur Ω. La loi conditionnelle de X sachant A est la probabilité sur $X(\Omega)$ définie par*

$$P_{X|A}:\left\{\begin{array}{ccl} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & P_A(X=x)=P(X=x|A)=\dfrac{P((X=x)\cap A)}{P(A)} \end{array}\right. .$$

C'est la loi de X si on munit Ω de la probabilité P_A.

Exemple 2.1.2 *Un employé d'un centre d'appels effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts dont chacun décroche (de façon indépendante des autres) avec une probabilité p. On note X le nombre de correspondants qui ont décroché. On note Y le nombre de ces correspondants qui décrochent cette fois. La loi de Y sachant $(X=i)$ suit une loi $\mathcal{B}(n-i,p)$.*

2.2 Variables aléatoires indépendantes

Définition 2.2.1 (Variables aléatoires indépendantes) *Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont indépendantes si pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, les événements $(X=x)$ et $(Y=y)$ sont indépendants :*

$$\forall (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\quad P(X=x,Y=y)=P((X=x)\cap(Y=y))=P(X=x)P(Y=y)$$

Remarque 2.2.1 *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $P(X+Y=n)=P\left(\bigcup_{i=0}^{n}((X=i)\cap(Y=n-i))\right)=\sum_{i=0}^{n}P(X=i)P(Y=n-i)$, par réunion disjointe et indépendance.*

Exemple 2.2.1 *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi est donnée par : $\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ P((X,Y)=(j,k))=\dfrac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!}$. X et Y ne sont pas indépendantes.*

Proposition 2.2.1 (Evénements et variables aléatoires indépendantes) *Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $A\subset X(\Omega)$ et $B\subset Y(\Omega)$ on a : $P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)$.*

Définition 2.2.2 (Variables aléatoires mutuellement indépendantes) *Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Les X_i sont mutuellement indépendantes si et seulement si*

$$\forall (x_1,\ldots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\ldots\times X_n(\Omega),\qquad P(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)$$

Exemple 2.2.2 *Soient* $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ *et* $q = 1-p$. *On considère* $X_1, ..., X_N$ *des variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *indépendantes et suivant une loi* $\mathcal{G}(p)$. *On pose* $Y = \min(X_1, ..., X_N)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Calculer* $P(Y > n)$, *puis* $P(Y \leq n)$, *puis reconnaître la loi de* Y.

Proposition 2.2.2 (Fonctions de variables aléatoires mutuellement indépendantes) *Soient* $X_1, ..., X_n$ *des variables aléatoires indépendantes et* $f : (X_1, ..., X_m)(\Omega) \to F$ *et* $g : (X_{m+1}, ..., X_n)(\Omega) \to G$ *deux applications. Alors les variables aléatoires* $f(X_1, ..., X_m)$ *et* $g(X_{m+1}, ..., X_n)$ *sont indépendantes.*
On peut généraliser cela avec plusieurs fonctions.

Définition 2.2.3 (Suite de variables aléatoires indépendantes) *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *On dit que que ces variables aléatoires sont indépendantes, si pour tout* N *de* $\mathbb{N}$, *les variables aléatoires* $X_0, X_1, ..., X_N$ *sont indépendantes.*
Cela est équivalent à dire que pour toute partie finie I *de* $\mathbb{N}$, *les variables aléatoires* X_i *lorsque* i *décrit* I *sont mutuellement indépendantes.*

Définition 2.2.4 (Suite de variables aléatoires iid) *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *On dit que que ces variables aléatoires sont indépendantes identiquement distribuées, noté i.i.d., si toutes ces variables aléatoires sont de même loi et la famille* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est indépendante.*

3 Moyenne et dispersion

3.1 Espérance

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1 (Espérance)

1. *Soit* X *une variable aléatoire discrète, à valeur dans* $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. *L'espérance de* X *notée* $\mathbb{E}(X)$ *est la somme de la famille* $(xP(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ *dans* $[0, +\infty]$ *soit :*
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x).$$
2. *Soit* X *une variable aléatoire discrète complexe. On dit que* X *est d'espérance fini si l'espérance de* $|X|$ *est finie, c'est-à -dire que la famille* $(xP(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ *est sommable. Dans ce cas l'espérance de* X *notée* $\mathbb{E}(X)$ *est la somme dans* $\mathbb{R}$ *:*
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x).$$
Dans ce cas, on notera cela : $X \in L^1$.
3. *On dit que* X *est centré si* $\mathbb{E}(X) = 0$.

Exemple 3.1.1 *Soit* X *à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *telle que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$. *Montrer que* X *admet une espérance et la calculer.*

Proposition 3.1.1 (Espérance nulle d'une variable aléatoire positive) *Soit* X *une variable aléatoire discrète positive telle que* $\mathbb{E}(X) = 0$. *Alors* $X = 0$ *presque-sûrement.*

Proposition 3.1.2 (Autre formule de l'espérance) *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. *Dans* $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, *on a :*
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) = \sum_{l=0}^{+\infty} P(X > l).$$

3.1.2 Propriétés de l'espérance

Proposition 3.1.3 (Formule de transfert) *Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète. Soit f une fonction de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.*
La variable $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$

L'espérance de $f(X)$ est entièrement déterminée par P_X et f.

Exemple 3.1.2 *Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{G}(p)$. Déterminer $\mathbb{E}(1/X)$.*

Proposition 3.1.4 (Linéarité, positivité, croissante de l'espérance) *Soient X, Y des variables aléatoires discrètes admettant toutes les deux une espérance.*

1. *Pour tout a, b de $\mathbb{R}$, $aX + bY$ admet une espérance et : $\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.*
2. *Si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.*
3. *Si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.*
4. *$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.*

Exemple 3.1.3 *Soit $p \in]0,1[$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y=n) = p(1-p)^n$. Déterminer la loi de $Z = Y+1$, puis l'espérance de Y.*

Proposition 3.1.5 (Comparaison et espérance) *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que $|X| \leq Y$. Si Y est d'espérance finie, alors X aussi.*

Proposition 3.1.6 (Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes)
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes discrètes admettant une espérance. Alors $\mathbb{E}(XY)$ existe et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Exemple 3.1.4 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A_{ij} pour $1 \leq i,j \leq n$, des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, telles que $P(A_{ij}=1) = P(A_{ij}=-1) = 1/2$. On note A la matrice $(A_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que : $\mathbb{E}(\det(A)) = 0$.*

3.2 Variance

Proposition 3.2.1 ($\mathrm{E}(X^2)$ existe implique que $\mathrm{E}(X)$ existe) *Soit X une variable aléatoire réelle discrète dans L^2 ($\mathbb{E}(X^2)$ existe). Alors X est dans L^1 ($\mathbb{E}(X)$ existe).*

Définition 3.2.1 (Variance, écart type) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2 ($\mathbb{E}(X^2)$ existe). La variance de X est notée $\mathbb{V}(X)$ et est la moyenne des carrées des écarts des valeurs de X par rapport à leur moyenne.*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

L'écart type est la racine carrée de la variance

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Proposition 3.2.2 (Variance nulle) *Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète dans L^2. Si $V(X) = 0$, alors X est presque-sûrement constante. En particulier $X = \mathbb{E}(X)$ presque-sûrement.*

Proposition 3.2.3 (Formule de König-Huygens) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2.*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Exemple 3.2.1 *Un sauteur en hauteur doit franchir successivement une série de barres de plus en plus hautes ; toutes les barres doivent être franchies et le parcours s'arrête au premier échec. La probabilité de passer la n-ème hauteur est $1/n$. Soit X le nombre de sauts réussis. Quelle est la variance de X ?*

Proposition 3.2.4 (Opérations sur la variance) *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. Soit a et b deux réels*

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X).$$

$$\sigma\,(aX+b) = |a|\sigma(X).$$

3.3 Covariance

Proposition 3.3.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant des moments d'ordre 2. Alors XY admet une espérance et :*

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}.$$

Définition 3.3.1 (Covariance,) *Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes admettant une variance. La covariance de X et Y, notée $cov(X,Y)$ est le réel*

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}(X\cdot Y) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y).$$

Remarque 3.3.1 *Si X et Y sont indépendantes, alors : $cov(X,Y) = 0$.*

Proposition 3.3.2 (Variance d'une somme)

1. *Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. On a : $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2cov(X,Y)$.*
2. *Plus généralement si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires discrètes admettant une variance, on a :*

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} cov(X_i,X_j) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} cov(X_i,X_j).$$

Corollaire 3.3.1 (Variance et indépendance)

1. *Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant un moment d'ordre 2. On a : $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.*
2. *$X_1, ..., X_n$, sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes admettant un moment d'ordre 2, alors : $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)$.*

Exemple 3.3.1 *Une urne contient $2n$ boules. Parmi ces boules n portent le numéro 0 et les n autres portent les numéros de 1 à n. On tire n boules de l'urne. Pour i dans $[\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule i a été tirée et 0 sinon. Soit S la somme des numéros tirés. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$.*

3.4 Loi faible des grands nombres

Théorème 3.4.1 (Inégalité de Markov) *Soit X est une variable aléatoire discrète réelle positive admettant une espérance.*

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Théorème 3.4.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) *Si X est une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2, et si t est un réel strictement positif,*

$$P\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant t\right) \leqslant \frac{1}{t^2}\mathbb{V}(X)$$

Théorème 3.4.3 (Loi faible des grands nombres) *Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre deux et de même loi. On suppose que ces variables aléatoires sont deux à deux indépendantes. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ et on note m l'espérance commune de $Y_1, ..., Y_n$ ($m = \mathbb{E}(Y_1)$) et σ leur écart-type commun ($\sigma = \sigma(Y_1)$).*
On a : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq a\right) \leq \frac{\sigma^2}{na^2}$.
En particulier : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq a\right) = 0$.

3.5 Fonctions ou séries génératrices

Soit X une variable alétoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 3.5.1 (Fonctions génératrices) *On appelle fonction ou série génératrice de la variable aléatoire X la fonction*

$$G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n) = \mathbb{E}(t^X)$$

Proposition 3.5.1 (La série entière G_X)

1. *$G_X(1) = 1$.*
2. *La série génératrice G_X d'une variable aléatoire entière est une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1 et G_X est au moins définie sur $[-1, 1]$.*
3. *Soit on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$.*
4. *Deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont la même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.*

Proposition 3.5.2 (Fonctions génératrices et espérances) *X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1.*
Si tel est le cas, alors $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

Proposition 3.5.3 (Fonctions génératrices et variances) *X^2 est d'espérance finie si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.*
Si tel est le cas, alors $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

Remarque 3.5.1 $G''_X(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X = n) = \mathbb{E}(X(X-1))$.

Proposition 3.5.4

1. *Soient deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes. Alors on a : $G_X G_Y = G_{X+Y}$.*
2. *Plus généralement soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ mutuellement indépendantes. Alors on a : $G_{X_1+...+X_n} = G_{X_1} \times ... \times G_{X_n}$.*

Exemple 3.5.1 *Soient X et Y deux variables indépendantes suivant respectivement une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Alors $X + Y$ suit une loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.*

4 Loi classiques

4.1 Résumé concernant les lois classiques

En notant $q = 1 - p$.

Nom	Paramètres	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$\mathtt{E}(X)$	$\mathtt{V}(X)$	G_X	RCV
Constante	c	$\{c\}$	1	c	0	t^c $(c \in \mathbb{N})$	$+\infty$
Uniforme	$a < b \in \mathbb{N}$	$[\![a, b]\!]$	$\dfrac{1}{b-a+1}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$\dfrac{t^a - t^{b+1}}{(b-a+1)(1-t)}$	$+\infty$
Bernoulli	$p \in]0,1[$	$\{0,1\}$	p $(k=1)$	p	pq	$q + pt$	$+\infty$
Binomiale	$(n,p) \in \mathbb{N} \times]0,1[$	$[\![0, n]\!]$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq	$(q+pt)^n$	$+\infty$
Géométrique	$p \in]0,1[$	$\mathbb{N}^*$	pq^{k-1}	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\dfrac{pt}{1-qt}$	$\dfrac{1}{q}$
Poisson	$\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$	$\mathbb{N}$	$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$	$+\infty$

4.2 Interprétations et compléments sur les lois classiques

4.2.1 Loi uniforme

Cette situation se rencontre lorsque l'on effectue des tirages équiprobables sur un espace fini, ce qui est souvent le cas lorsque l'on effectue un tirage au hasard.

4.2.2 Loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli modélise toute expérience à deux issues que l'on appelle succès ou échec. X vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Exemple 4.2.1 *Soit $A \subset \Omega$. Alors $1_A \sim \mathcal{B}(P(A))$ et en particulier $\mathbb{E}(1_A) = P(A)$.*

4.2.3 Loi Binomiale

Une expérience peut se modéliser avec une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ lorsque l'on effectue n expériences aléatoires indépendantes à deux issues : succès et échec avec une probabilité p d'avoir un succès et donc une probabilité $1-p$ d'avoir un échec. Dans ce cas la variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de ces n expériences.

Proposition 4.2.1 (Loi binomiale comme somme de Bernoulli indépendantes)
$X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la loi $\mathcal{B}(p)$.
Alors $X = X_1 + \ldots + X_n$ suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$.

4.2.4 Loi géométrique

On considère une succession infinie d'expériences mutuellement indépendantes succès-échec où la probabilité d'un succès pour chacune des expériences est p (épreuves de Bernoulli de paramètre p). Soit X donnant le rang du premier succès. Alors X suit une loi $\mathcal{G}(p)$.