6-Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ex 1 : Diagonaliser sur $\mathbb{C}$, lorsque cela est possible, les matrices suivantes, avec a dans $\mathbb{C}^*$ et b, c, d, m et z dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 1 & 1/a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ex 2 : Les matrices suivantes sont-elles diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{R}$?.

$$(*) \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}, \textbf{(CCP 69)} \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Ex 3 : Soit $a, b, a_1, ., ., a_n \in \mathbb{C}$. Diagonalisabilité et le spectre de : $[ij]_{1\leq i,j\leq n}$, $[a+i+j]_{1\leq i,j\leq n}$, $(a^{i+j-2})_{1\leq i,j\leq n}$,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & & a_1 \\ a_2 & a_2 & & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & & a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & n & 1 & \cdots & n \\ 2 & n-1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 3 & n-2 & 3 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & n & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \vdots & & \\ 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Ex 4 : Déterminer les polynômes minimaux des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ex 5 : Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Calculer $\det A$.

Ex 6 : ***1.*** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $X^2 + X = A$. Montrer que : $XA = AX$.

2. Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex 7 : On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A. Est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que A et B diagonalisent dans la même base.

3. ***a.*** Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tel que $X^2 = A$. Montrer que $AX = XA$

b. Pour ce X, en déduire que X et A diagonalisent dans la même base.

c. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation : $X^2 = A$. Même question dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Ex 8 : **(CCP 70)** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$. Déterminer les éléments propres de B.

Ex 9 : Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels non tous nuls. On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Quel est le rang de A ? Que peut-on en déduire sur son spectre ?
3. Calculer A^2. En déduire le spectre et le polynôme caractéristique de A.

Ex 10 : Trouver toutes les matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $(A - 2I_2)(A - 3I_2)^2 = 0$.

Ex 11 : 1. Pour $A \in GL_n(\mathbb{C})$, donner une relation entre χ_A et $\chi_{A^{-1}}$.

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donner une relation entre χ_A et χ_{A^2} et χ_{-A}.

Ex 12 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $X^p \chi_{AB} = X^n \chi_{BA}$ (on pourra écrire $A = PJ_rQ$).

Ex 13 : Soit $M_n = [m_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que : $\forall i, j$, $m_{i,j} = i$ si $i = j$, 1 sinon et $P_n = \chi_{M_n}$.

1. Montrer que pour $n \geq 2$, $P_{n+1} = (X - n)P_n - X(X-1)...(X-(n-1))$. On pourra effectuer les opérations $L_j \leftarrow L_j - L_{j-1}$, pour $j \geq 2$.
2. Par récurrence sur n, montrer que $\forall n \geq 2$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $(-1)^{n-k} P_n(k) > 0$.
3. Montrer que M_n admet exactement une valeur propre dans chaque intervalle $]1, 2[$, $]2, 3[$, ..., $]n - 1, +\infty[$.

Ex 14 : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ distincts et $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, telles que $I_p = A + B$, $M = \lambda A + \mu B$, $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

1. Montrer que M est inversible et calculer son inverse (on pourra calculer M^2).
2. Exprimer A en fonction de M et I_p. Montrer que A et B sont des matrices de projecteur.
3. M est-elle diagonalisable ? Que dire de ses sous-espaces propres ?

Ex 15 : 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $ab > 0$ ou $a = b = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ pair et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & & \iddots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer un espace de dimension deux stable par A. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_1, ..., a_n)$ pour que A soit diagonalisable.

Ex 16 : (*) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $(b, c, d) \neq (0, 0, 0)$.

1. Calculer AA^T et montrer que $\det(A) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

2. Montrer que A est diagonalisable.

3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex 17 : Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de B, puis déterminer si B est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres ainsi que leurs multiplicités.

Ex 18 : On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$.

On pose également : $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1}I_2 & a_{1,2}I_2 \\ a_{2,1}I_2 & a_{2,2}I_2 \end{pmatrix}$ et $\tilde{B} = \begin{pmatrix} B & O_2 \\ O_2 & B \end{pmatrix}$.

On suppose A et B diagonalisables. Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de B, on pose : $U_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que U_1 et U_2 (resp. V_1 et V_2) sont vecteurs propres de $\tilde{A}$ (resp. $\tilde{B}$).

2. Montrer que $W = x_1 V_1 + x_2 V_2$ est vecteur propre de $\tilde{A}$ et de $\tilde{B}$.

3. Comment former une base de $\mathbb{R}^4$ avec des vecteurs propres communs à $\tilde{A}$ et à $\tilde{B}$?

4. $M = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?

Ex 19 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.

2. En déduire que M est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Ex 20 : *1.* Soit P un polynôme réel scindé à racines simples.

a. Montrer que P' est constant ou scindé à racines simples (penser au théorème de Rolle).

b. Montrer que il existe $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X = XU(X)P(X) + XV(X)P'(X)$.

2. Soit A une matrice réelle de taille n et $M_A = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ de taille $2n$

a. Soit Q un polynôme, exprimer $Q(M_A)$ en fonction de $Q(A)$

b. Quelle(s) condition(s) sur A pour que M_A soit diagonalisable ?

Ex 21 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$.

a. Donner une relation entre χ_A et χ_B.

b. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$, $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(B)$ sont isomorphes.

c. Montrer que $\operatorname{rg}(B - I_{2n}) = n$.

d. En déduire que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $A - I_n$ est inversible.

Ex 22 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, un entier $n \geqslant 3$ et $A = \begin{pmatrix} & & & c \\ & (0) & & \vdots \\ & & & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\operatorname{rg}(f) = 2$.

2. On suppose que $\operatorname{rg}(f) = 2$.

a. Montrer que : $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - a\lambda - (n-1)bc = 0$.

b. Donner les expressions des valeurs propres de A.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Ex 23 : Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\operatorname{tr} A = 8$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Ex 24 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 - 3A + 4I_n = 0$. Déterminer le signe de $\det A$.

Ex 25 : Soit $n \geq 2$. On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-2} & a_{n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_3 & a_4 & a_5 & . & . & . & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & . & . & . & a_n & a_1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^p pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.

2. Écrire A comme combinaison linéaire de $(J^p)_{0 \leq p \leq n-1}$.

3. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ non nul, on a : $Q(J) \neq 0$.

4. Quel est le degré du polynôme minimal Π_J de J ?

5. Calculer Π_J et χ_J.

6. Montrer que A est diagonalisable.

Ex 26 : (*) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Comparer $Sp(B)$ et $Sp(B^T)$.

2. Montrer que A et B ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AC = CB$.

3. On suppose qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AC = CB$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.

4. Soit $r \in [\![1, n]\!]$. On suppose qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r telle que $AC = CB$. Montrer que $\chi_A \wedge \chi_B$ est de degré supérieur ou égal à r.

5. Étudier la réciproque.

Ex 27 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $P(M) = A$.

Ex 28 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, $x_0 \in E$ non nul et $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ non nulle. On définit u sur E par : $\forall x \in E,\ u(x) = x + \phi(x)x_0$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de u et déterminer le sous-espace propre associé.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable. Déterminer son spectre et ses valeurs propres.

Ex 29 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $a = (1, -1, 1)$. Calculer $f(a)$. Sans calculs, en déduire les valeurs propres de f.
2. Déterminer les éléments propres de f.
3. Déterminer les $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $f^3 = g^3$.

Ex 30 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables et Φ_A et Ψ_B les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définis par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi_A(M) = AM$ et $\Psi_B(M) = MB$. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de matrices de rang un qui diagonalisent Φ_A et Ψ_B.

Ex 31 : Pour $n \geq 2$, on pose $E = \mathbb{C}_n[X]$ et l'on définit φ qui à $P \in E$ associe $\varphi(P) = (X^2 + X)P(1) + (X^2 - X)P(-1)$.

1. Déterminer l'image et le noyau de φ.
2. Déterminer les éléments propres de φ. Est-il diagonalisable ?

Ex 32 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\Phi\ :\ P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \mapsto X(X+1)P' - \mu XP$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ si et seulement si $\mu = 2n$.
2. Dans ce cas, déterminer les valeurs propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ? Déterminer les espaces propres de Φ
3. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_k unitaire de degré k tel que $\Phi(P_k) = kP_k$.
4. Trouver les endomorphismes f tels que $f^2 = \Phi$.

Ex 33 : (*) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels stables par f dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Même question avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex 34 : Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

a. $(Id_E, f, ..., f^{n-1})$ est une famille libre.

b. f possède n valeurs propres distinctes.

c. Il existe $v \in E$ tel que $(v, f(v), ..., f^{n-1}(v))$ soit une base de E.

Ex 35 : Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Soit $f \in E$ et on pose $\Phi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$ et $\Phi(f)(0) = f(0)$. Montrer que Φ est un endomorphisme de E et donner ses éléments propres.

Ex 36 : Soit u un endomorphisme diagonalisable de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On appelle commutant de u, noté $\mathcal{C}(u)$, l'ensemble des endomorphismes v de E tels que $v \circ u = u \circ v$. Montrer que $\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} (\dim E_\lambda(u))^2$, puis que $\dim \mathcal{C}(u) \geq n$.

Ex 37 : (*) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n où $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes de E, qui commutent deux à deux.

1. Montrer qu'ils possèdent un vecteur propre en commun.

2. Montrer si ces endomorphismes sont diagonalisables, alors ils sont codiagonalisables dans une base commune.

Ex 38 : (*) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(u)$ de multiplicité m. Montrer que $\dim(E_\lambda(u)) = m$ si et seulement si $E = E_\lambda(u) \oplus \operatorname{Im}(u - \lambda Id_E)$.

Ex 39 : (*) Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $N^n = NM = 0$. On suppose de plus que M est trigonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M + N$ est trigonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 40 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u, d'ordre de multiplicité $m \geqslant 1$. On pose $v = u - \lambda \mathrm{id}_E$.

1. ***a.*** Montrer qu'il existe un polynôme P tel que : $E = \operatorname{Ker}(v^m) \oplus \operatorname{Ker}(P(u))$ et $E = \operatorname{Ker}(v^{m+1}) \oplus \operatorname{Ker}(P(u))$.
En déduire que : $\operatorname{Ker}(v^m) = \operatorname{Ker}(v^{m+1})$.

b. Montrer que : $E = \operatorname{Ker}(v^m) \oplus \operatorname{Im}(v^m)$.

2. On considère une autre valeur propre λ' de u, distincte de λ, d'ordre de multiplicité m'. On pose : $v' = (u - \lambda' \mathrm{id}_E)^{m'}$.

a. Montrer que $\operatorname{Ker}(v') \cap \operatorname{Ker}(v^m) = \{0_E\}$.

b. Montrer que $\operatorname{Ker}(v') \subset \operatorname{Im}(v^m)$.

Ex 41 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Trigonalisable sur $\mathbb{R}$?

2. Montrer qu'il existe P dans $GL_3(\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

3. Calculer A^k pour tout k de $\mathbb{N}$.

4. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $X^2 = A$. Montrer que X et A commutent, puis trouver X.

Ex 42 : Factoriser (dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$) les polynômes :

1. $X^4 + X^2 + 1$;

2. $X^6 - 5X^4 + 19X^2 + 25$;

3. $X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$;

4. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$;

5. $\sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \sin(k\theta) X^k$, $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

Ex 43 : *1.* Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin((2n+1)\theta) = \sin(\theta) P_n(\sin^2(\theta))$.

2. Trouver les racines de P_n, puis montrer que $P_n = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{X}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)$.

Ex 44 : Factoriser $P = (1+X)^{2n} + (1-X)^{2n}$ et en déduire $\prod_{k=0}^{n-1} \tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)$