Interrogation : Matrice et déterminant

MP *Chaptal*

Cours : Formule du déterminant $\det([a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n})$.

Exercice :
Une matrice $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs et :
$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. On considère la norme infinie $\|.\|_\infty$ standard sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que : $\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.
   Rappel : $\|(z_1, ..., z_n)\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |z_i|$.
3. En déduire que pour toute valeur propre complexe λ de A, on a : $|\lambda| \leq 1$.
4. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convexe et stable par produit matriciel.

Interrogation : Matrice et déterminant

MP *Chaptal*

Cours : Formule du déterminant $\det([a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n})$.

Exercice :
Une matrice $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs et :
$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. On considère la norme infinie $\|.\|_\infty$ standard sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que : $\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.
   Rappel : $\|(z_1, ..., z_n)\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |z_i|$.
3. En déduire que pour toute valeur propre complexe λ de A, on a : $|\lambda| \leq 1$.
4. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convexe et stable par produit matriciel.

Interrogation : Matrice et déterminant

MP *Chaptal*

Cours : Formule du déterminant $\det([a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n})$.

Exercice :
Une matrice $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs et :
$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. On considère la norme infinie $\|.\|_\infty$ standard sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que : $\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.
   Rappel : $\|(z_1, ..., z_n)\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |z_i|$.
3. En déduire que pour toute valeur propre complexe λ de A, on a : $|\lambda| \leq 1$.
4. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convexe et stable par produit matriciel.