

## 8-Suites et séries de fonctions

**Ex 1 :** Étudier la convergence simple des suites  $(f_n)$  et préciser la limite éventuelle.

1.  $f_n(x) = n^2 \ln \left( \cos \frac{x}{n} \right)$  sur  $\mathbb{R}$ ;
2.  $f_n(x) = \min(x, n)$  sur  $\mathbb{R}_+$ ;
3.  $f_n(x) = \frac{nx^{2n}}{1+x^{2n}}$  sur  $[0, 1]$ ;
4.  $f_n(x) = n \left( f \left( x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right)$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Ex 2 :** Étudier la convergence simple et uniforme des suites  $(f_n)$  :

1.  $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{1+nx^2}$  sur  $\mathbb{R}$ ;
2.  $f_n(x) = \frac{ne^{-x}}{n+x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ ;
3.  $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$  sur  $\mathbb{R}$ ;
4.  $f_n(x) = 4^n(x^{2n} - x^{2n+1})$  sur  $[0, 1]$ ;
5.  $f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{1+nx}$  sur  $\mathbb{R}_+$ ;
6.  $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$ ;
7.  $f_n(x) = \cos[(1+1/n)x]$  sur  $\mathbb{R}$ ;
8.  $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$ .
9.  $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$ .

**Ex 3 :** On considère la suite de fonctions  $(f_n)$  définies sur  $[0, +\infty[$  par  $f_0(x) = 0$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(e^{-2x} - f_n^2(x)).$$

1. Montrer que :  $\forall x \in [0, +\infty[, e^{-x} - f_{n+1}(x) = (e^{-x} - f_n(x))\phi(x)$ , où  $\phi(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}f_n(x)$ .  
Prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$ . En déduire que la suite  $(f_n)$  est croissante et convergente. Préciser sa limite.
2. Soit  $a \in ]0, +\infty[$ . Montrer que :  $\exists k_a \in ]0, 1[, \forall x \in [0, a], e^{-x} - f_{n+1}(x) \leq k_a(e^{-x} - f_n(x))$ .  
En déduire la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  sur  $[0, a]$  pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .
3. On pose  $u_n = 1 - f_n(0)$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2^{1-2^n}$ . Étudier la convergence de la série de terme général  $u_n$ .

**Ex 4 :** (CCP 11) Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$  et on pose :  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ .

1. Étudier la convergence simple de la suite  $(f_n)$ .
2. Étudier la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  sur  $[a; +\infty[$  (avec  $a > 0$ ), puis sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Ex 5 :** On définit une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  en posant  $f_0 = 1$  et si

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in [0, 1], \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2) dt.$$

1. Montrer que les  $f_n$  sont polynomiales.
2. Montrer que  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f$  et :  $\forall x \in [0, 1], f(x) \leq e^x$ .
3. Montrer que  $\sum (f_{n+1} - f_n)$  converge normalement sur  $[0, 1/2]$ , puis que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur cet intervalle.
4. Si  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ , que dire de  $f_n(x) + f_n(1-x)$ ? Qu'en déduit-on sur  $f$ ?
5. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 1]$ .

**Ex 6 :** Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . On pose  $u_n(x) = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^x}\right)$ .

1. Montrer que, si  $x > 0$ , la suite  $(u_n(x))_{n \geq 2}$  converge. On note  $u(x)$  sa limite. Quelle est la valeur de  $u(x)$  lorsque  $x$  est dans  $]0, 1]$ ?
2. Montrer que  $u$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Ex 7 :** (\*) On pose  $f : x \mapsto 2x(1 - x)$ . Étudier les convergences simple sur  $]0, 1[$  de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $f_n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ . Montrer que l'on n'a pas convergence uniforme sur  $]0, 1[$ .

---

**Ex 8 :** Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Montrer que  $f$  est limite uniforme d'une suite de polynômes pairs.

---

**Ex 9 :** 1. Montrer que toute application continue  $f$  définie sur le segment  $[0, 1]$  et telle que  $f(0) = 0$  peut être approchée uniformément par une suite de fonctions polynomiales  $(Q_n)_n$  sur  $[0, 1]$  avec  $Q_n(0) = 0$ .

2. Soit  $F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \right\}$  et  $G = \text{Vect}(x \mapsto e^{-nx}, n \in \mathbb{N}^*)$ . Montrer que  $G$  est dense dans  $F$ .

---

**Ex 10 :** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $f_n : x \mapsto x(1 + n^\alpha e^{-nx})$ .

1. Montrer que la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Déterminer les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx})dx$ .

---

**Ex 11 :** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues à valeurs réelles qui converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{f_n(t)} dt = \int_a^b e^{f(t)} dt$ .

---

**Ex 12 :** (CCP 27) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on pose  $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1 + n^2 x^2}$  et  $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$ .

2. Soit  $a \in ]0, 1[$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, 1]$  ?

3. La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1]$  ?

4. Trouver la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

---

**Ex 13 :** (\*) 1. Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de compacts non vides telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, K_{n+1} \subset K_n$ . Montrer que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$  est non vide.

2. Soit  $K$  un compact. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}_+)$ . On suppose que :  $\forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \forall x \in K, f_n(x) \leq f_p(x)$ . On suppose que pour tout  $x \in K$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$  (pour  $\varepsilon > 0$ , on pourra considérer  $K_n = \{x \in K, f_n(x) \geq \varepsilon\}$ ).

---

**Ex 14 :** Déterminer de ces intégrales leur limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- |   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| 1. $\left( \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x} dx \right);$             | 5. $\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} dt;$  | 9. $\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx;$                    | 13. $\int_0^{+\infty} \frac{n \cos t}{1+n^2 t^2} dt;$      |
| 2. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{nx + x\sqrt{x}} dx;$     | 6. $\int_0^1 \frac{n}{\sqrt{t}} \ln \left( 1 + \frac{1}{nt} \right) dt;$                                      | 10. $\int_0^1 4^n x^n (1-x)^n dx;$                        | 14. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n};$                   |
| 3. $\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^3}} dt;$                    | 7. $\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x^n) dx;$   | 11. $\int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} dx;$ | 15. $\int_0^1 t^{(t^n)} dt;$                               |
| 4. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(x) + x^n e^{-x}} dx;$ | 8. $\int_0^1 \frac{dx}{\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + 2x}}}}}_{n \text{ racines}}};$ | 12. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{1+nt+t^2} dt;$      | 16. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^n)^{n+\frac{1}{n}}}.$ |

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de fonctions définies par  $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)^n & \text{si } 1 \leq x < n+1 \\ 0 & \text{si } x \geq n+1 \end{cases}$

1. Calculer  $\int_1^{+\infty} f_n$ .
2. Étudier la convergence simple de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Soit  $f$  sa limite.
3. Montrer que  $f$  est intégrable sur  $I$  et calculer  $\int_1^{+\infty} f$ .
4. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \frac{1}{e-1}$ .

**Ex 15 :** Justifier l'existence pour  $n \geq 1$  et donner un équivalent de  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx} \cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ .

**Ex 16 : (CCP 17)** Soient  $A \subset \mathbb{C}$  et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .

1. Montrer que si la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ , alors la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $A$ .
2. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ . Montrer que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ . A-t-on convergence uniforme ?

**Ex 17 :** Pour chacune des séries de fonctions  $\sum f_n$  ci-dessous, déterminer le domaine de convergence simple. Déterminer si on a convergence normale sur ce domaine. Sinon, étudier la convergence normale sur tout segment inclus dans le domaine de définition.

- |  |   |   |
|--|---|---|
| <p>1. <math>\sum \frac{\sin(nx)}{1 + nx^8 + 4x^2 + n^2}</math> ;</p> <p>2. <math>\sum \frac{\ln(1+x)}{n^2 x}</math> ;</p> <p>3. <math>\sum \frac{\sin(x/n)}{n}</math> ;</p> <p>4. <math>\sum \frac{(-1)^n}{nx^2 + n}</math> sur <math>\mathbb{R}_+</math><br/>(préciser la convergence uniforme) ;</p> | <p>5. <math>\sum \frac{x + nx^2}{1 + n^4 x^4}</math> ;</p> <p>6. <math>\sum x^a (1-x)^{nb} n^c</math>, <math>a, b, c &gt; 0</math> ;</p> <p>7. <math>\sum n^\alpha x^n (1-x)</math>, <math>\alpha \in \mathbb{R}</math> ;<br/>(étudier la convergence normale sur <math>\mathbb{R}_+</math>) ;</p> <p>8. <math>\sum nx^\alpha e^{-nx^2}</math> sur <math>\mathbb{R}_+^*</math>, <math>\alpha \in \mathbb{R}</math> ;</p> <p>9. <math>\sum (-1)^{n+1} \ln(x) x^{2n+2}</math><br/>(étudier la convergence uniforme sur <math>]0, 1[</math>) ;</p> | <p>10. <math>\sum \frac{x^n e^{-x}}{n!}</math> ;</p> <p>11. <math>\sum \frac{n^2 + x}{n^4 + x^2}</math> ;</p> <p>12. <math>\sum \frac{x}{n^3 + x^3}</math> sur <math>\mathbb{R}_+</math> ;</p> <p>13. <math>\sum \frac{x}{(1 + n^2 x)^2}</math> (sur <math>\mathbb{R}_+</math>) ;</p> <p>14. <math>\sum \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}</math> (étudier la convergence uniforme sur <math>\mathbb{R}_+^*</math>) ;</p> |
|--|---|---|

**Ex 18 :** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$

**Ex 19 :** Montrer que  $x \mapsto \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k^3}$  est deux fois dérivable à droite de  $-1$ .

**Ex 20 :** Montrer que  $S : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{x}{k}\right)$  est bien définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Ex 21 :** Soit  $f : x \mapsto -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n-x)^2}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie, 1-périodique et continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .
  2. Montrer que  $f$  se prolonge par continuité sur  $\mathbb{R}$  et :  $\forall x \in \mathbb{R}, 4f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ .
  3. Montrer que  $f$  est nulle (on pourra considérer le maximum de  $|f|$  sur  $[0, 1]$ ).
  4. En déduire que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .
- 

**Ex 22 :** Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition  $I$  et les variations de  $f$  sur  $I$ .
  2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .
  3. Déterminer  $\lim_{+\infty} f$ , puis un équivalent en  $+\infty$ .
  4. Donner un équivalent de  $f$  en  $0^+$ .
- 

**Ex 23 :** (\*) Montrer que  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$  n'est pas dérivable en 0.

---

**Ex 24 :** Montrer que  $\forall x \in ]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin nx}{n} = \text{Arctan} \left( \frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right)$  (on pourra dériver)

---

**Ex 25 :** Étudier la continuité et la dérivabilité des séries de fonctions suivantes :

1.  $\sum_{n \geq 0} x e^{-n^2 x}$  sur  $\mathbb{R}_+$  ;
  2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{[n\pi]^x} - \frac{1}{(n\pi)^x} \right)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  ;
  3.  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_+$  ;
  4.  $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$ .
- 

**Ex 26 :** 1. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que la suite  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$  est une suite convergente (on pourra étudier  $\sum (\ln(u_n) - \ln(u_{n-1}))$ ).

2. On note  $\Gamma$  la limite simple de cette suite de fonctions. Montrer que  $\Gamma$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

---

**Ex 27 :** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f_n(x) = \frac{1}{(n+x)^{3/2} + (n+x)^{1/2}}$  et on note  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ .

1. Quel est le domaine de définition de  $f$  et montrer qu'elle y est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
  2. Quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$ , puis montrer qu'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^b}$ .
- 

**Ex 28 :** Pour  $x > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$  et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$ .
3. Déterminer un équivalent de  $f$  en  $+\infty$  et en  $0^+$ .
4. Montrer que  $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ .

**Ex 29** : Soit  $u_n : x \mapsto \prod_{k=1}^n \frac{1}{x+k}$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge simplement, mais pas uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Soit  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ . Montrer que  $S$  est continue et strictement monotone sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Donner une relation liant  $S(x)$  et  $S(x+1)$ , pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
4. Déterminer un équivalent de  $S$  en 0 et en  $+\infty$ .
5. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)n!}$ .

**Ex 30** : On pose  $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln(n)}{1+xn^2}$ .

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Trouver la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , puis la forme d'un équivalent.
3. Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)\sqrt{x}}{1+xt^2} dt$  est équivalente à  $-\frac{\pi}{4} \ln(x)$  quand  $x$  tend vers 0.
4. En déduire un équivalent de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 0.

**Ex 31** : 1. Étudier la convergence simple de  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$  sur  $\mathbb{R}_+$ . On note  $S$  sa somme.

2. La série de fonctions considérée converge-t-elle normalement sur  $\mathbb{R}_+$  ? Uniformément ?
3. Montrer que sa somme est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et donner sa limite en  $+\infty$ .
4. Résoudre  $y' - y = -\frac{e^x}{e^x + 1}$  sur  $]0, +\infty[$ .
5. En déduire l'expression de  $S$  à l'aide des fonctions usuelles.

**Ex 32** : Montrer les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 1. \int_0^1 \frac{t(\ln t)^2}{1+t^2} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^3}; & 4. \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt &= \frac{\pi^2}{6}; & 7. \int_0^1 \frac{x^p}{2+x} dx &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+p+1)2^n}, \\
 2. \int_0^1 t^t dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}; & 5. \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx. & p \in \mathbb{N}, \text{ puis valeur de } &\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+4)2^n}; \\
 3. \int_0^1 \frac{t^a}{1+t^b} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}; & 6. \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}; & 8. \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t} dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n};
 \end{aligned}$$

**Ex 33** : On donne :  $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ .

1. Pour  $p, q \in \mathbb{N}$ , calculer  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(px) dx$ .
2. On considère  $g : x \mapsto \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ . Calculer  $\int_{-\pi}^{\pi} g^2$ .
3. Montrer que :  $\forall x \in [-\pi, \pi], g(x) = x^2$ .

**Ex 34 : 1.** Soit  $f : x \mapsto \frac{x^2 \ln(x)}{x-1}$  définie sur  $]0, 1[$ . Montrer que  $f$  peut être prolongée en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . On notera encore  $f$  le prolongement ainsi obtenu.

2. Montrer que la suite de terme général  $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$  converge vers 0.

3. Trouver un équivalent de  $I_n$ .

4. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x^n) dx = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ .

---

**Ex 35 :** Soit  $\theta$  un réel non congru à 0 modulo  $2\pi$ .

1. Démontrer que :  $Re \left( \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}x} dx \right) = -\ln \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|$ .

2. Démontrer que :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 e^{i(n+1)\theta} x^n dx = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}x} dx$ .

3. Conclure que :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|$ .

---

**Ex 36 :** (\*)

Soit  $T \in \mathbb{R}_+^*$  et  $f \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{C})$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, T]$ , soit  $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \int_0^T f(u) e^{-kn(t-u)} du$ .

1. Justifier l'existence de  $\varphi_n(t)$ .

2. Étudier la convergence simple de  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

3. On suppose que la suite  $\left( \int_0^T f(u) e^{nu} du \right)_{n \geq 0}$  est bornée. Montrer que  $f$  est la fonction nulle.

---

**Ex 37 :** (\*) Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge et que  $f''$  soit intégrable.

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  puis que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

2. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x+n+1) - f(x+n) - f'(x+n)| \leq \int_{x+n}^{x+n+1} |f''|$ .

3. Montrer que :  $\sum f'(x+n)$  converge uniformément et étudier  $\sum f(x+n)$ .

---

**Ex 38 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on pose  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ .

1. A-t-on la convergence normale de  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n}$  sur  $]0, 2\pi[$  ?

2. Soit  $x \in ]0, 2\pi[$ . Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |S_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$ .

3. Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :  $\forall x \in ]0, 2\pi[, \sum_{n=1}^N \frac{\cos(nx)}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) S_n(x) + \frac{S_N(x)}{N} - 1$ .

4. Soit  $a \in ]0, \pi[$ . Montrer que :  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n}$  converge uniformément sur  $]a, 2\pi - a[$ .

---