1- Intro algèbre linéaire

Cours : $\forall x \in E_1+\dots+E_p$, $\exists ! (x_1,\dots,x_p) \in E_1\times\dots\times E_p$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$

ou : $\forall (x_1,\dots,x_p) \in E_1\times\dots\times E_p$, $\left[\sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!], x_i = 0 \right]$.

Exercice : 1. On suppose f $\mathbb{R}$-linéaire. Soit $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a donc $f(z) = f(\alpha.1 + \beta.i) = \alpha f(1) + \beta f(i)$

On pose $u = f(1)$ et $v = f(i)$. On a donc :

$f(z) = \mathrm{Re}(z) u + \mathrm{Im}(z) v = \frac{z+\bar z}{2} u + \frac{z-\bar z}{2i} v = \underbrace{\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2i}\right)}_{a} z + \underbrace{\left(\frac{u}{2} - \frac{v}{2i}\right)}_{b} \bar z$.

- Réciproquement, on suppose que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b\bar z$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. On a pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$f(\lambda z_1 + \mu z_2) = a(\lambda z_1 + \mu z_2) + b(\overline{\lambda z_1 + \mu z_2}) \underset{\lambda,\mu \in \mathbb{R}}{=}$

$a\lambda z_1 + \mu z_2 a + b\lambda \bar z_1 + b\mu \bar z_2 = \lambda(a z_1 + b\bar z_1) + \mu(a z_2 + b \bar z_2)$

$= \lambda f(z_1) + \mu f(z_2)$. Ainsi f est $\mathbb{R}$-linéaire.

2) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tq : $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b\bar z$.

On a $f(1) = a+b$ et $f(i) = (a-b)i$, ainsi on a :

$a = \frac{1}{2}\left(f(1) + \frac{f(i)}{i}\right)$ et $b = \frac{1}{2}\left(f(1) - \frac{f(i)}{i}\right)$. Cela donne au plus une solution, d'où l'unicité (l'existence a été prouvée avant).

3) Soit $z \in \mathbb{C}$, on a : $f^2(z) = f(f(z)) = f(az + b\bar z)$

$= a(az + b\bar z) + b(\overline{az + b\bar z}) = a^2 z + ab\bar z + b\bar a \bar z + \underset{b\bar b}{|b|^2} z$

$= (a^2 + |b|^2) z + b(a + \bar a) \bar z$.

Or f est un projecteur ssi $\forall z \in \mathbb{C}$, $f^2(z) = f(z)$

ssi $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (a^2 + |b|^2) z + b(a + \bar a)\bar z = az + b\bar z$

Par unicité de la question précédente, cela équivaut à : $a^2 + |b|^2 = a$ et $b(a + \bar a) = b$

4) Si $f = 0$ alors $a = b = 0$

si $Id = f$ alors $a = 1$ et $b = 0$) unicité de la question 2.

$\hookrightarrow f(z) = z$.

Grâce à 3) cela équivaut à :

$\begin{cases} a^2 + |b|^2 = a \\ b(a + \bar a) = b \\ (a,b) \neq (0,0) \\ (a,b) \neq (1,0) \end{cases}$ (S)

si $b = 0$ alors la 1re ligne donne $a^2 = a \iff a(a-1) = 0 \iff a = 0$ ou $a = 1$ ce qui est exclu.

Ainsi (S) $\iff \begin{cases} a^2 + |b|^2 = a \\ b(a + \bar a) = b \\ b \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |b|^2 = a - a^2 = a(1-a) \\ a + \bar a = 1 \\ b \neq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} |b|^2 = a(\bar a) \\ 2\mathrm{Re}(a) = 1 \\ b \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |b|^2 = |a|^2 \\ \mathrm{Re}(a) = 1/2 \end{cases}$ ← on peut enlever $b \neq 0$ car $|b| = |a|$ et $a \neq 0$ car $\mathrm{Re}(a) \neq 0$.

$\iff \begin{cases} |b| = |a| \leftarrow \text{tout est positif.} \\ \mathrm{Re}(a) = 1/2 \end{cases}$