2 - Intégration.

Cours : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

Exercice : 1) On pose $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$.

* Soit $t \in [0,1]$. $x \mapsto f(x,t)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

* Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $t \mapsto \dfrac{\partial^j f(x,t)}{\partial x^j}$ est cpm sur $[0,1]$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

* Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ et $j \in \mathbb{N}$. La fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue sur le compact $[a,b]\times[0,1]$ de $\mathbb{R}^2$ (c'est un compact en tant que produit de compacts).
Elle y est donc bornée. Il existe $\Pi_j \in \mathbb{R}_+$ tq :
$\forall (x,t) \in [a,b]\times[0,1]$, $\left|\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\right| \le \Pi_j$ et $t \mapsto \Pi_j$ est cpm et intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi F est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x) = -2x\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt$
$$= -2x\, e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,dt.$$

2) Grâce au théorème fondamental de l'analyse, G est dable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $G'(x) = e^{-x^2}$. Ainsi :
$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{d}{dx}\left(G^2(x)\right) = 2G(x)\,G'(x) = 2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,du.$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = -2x\,e^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,dt$

on pose $u = xt$ $(x \neq 0)$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = -2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,du$
$(du = x\,dt)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{d}{dx}\left(G^2(x) + F(x)\right) = 0$ donc $G^2 + F$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc $\mathbb{R}_+$ par continuité. Or
$G^2(0) + F(0) = 0 + \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \pi/4.$
donc : $G^2 + F = \pi/4$.

3) Cherchons $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. On pose $f_x : t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$.

* Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction f_x est cpm sur $[0;1]$.

* Soit $t \in [0,1]$. On a $\lim_{x\to+\infty} f_x(t) = 0$ (car $1+t^2 > 0$) et $t \mapsto 0$ est cpm sur $[0,1]$.

\- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+\times[0,1]$, $|f_x(t)| \le \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ et φ est cpm et intégrable sur $[0,1]$.

Grâce au th de CV dominée à paramètres continus, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Or $G^2(x) = \frac{\pi}{4} - F(x)$ donc $\lim_{x\to+\infty} G^2(x) = \pi/4$;
puis par continuité de $\sqrt{\ }$ et le fait que G soit $\oplus$,
$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{G^2(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
et cela prouve au passage la CV de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$.