3 - Structures algébriques

Cours · $(I,+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$

· $\forall x\in I, \forall a\in A, \ xa\in I$.

Exercice : 1) · Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

· $f(n) = f(\underbrace{1+\dots+1}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{f(1)+\dots+f(1)}_{n \text{ fois}} = n f(1) = n$, car

f est notamment un morphisme d'anneaux donc $f(1)=1$.

· $f(0)=0$ car f est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même.

· ~~[illegible]~~ $f(-n) = -f(n) = -n$, car f est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même.

Donc : $\forall n\in\mathbb{Z}, \ f(n)=n$.

· Soit $x=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.

On a $f(qx) = f(\underbrace{x+\dots+x}_{q \text{ fois}}) = \underbrace{f(x)+\dots+f(x)}_{q \text{ fois}} = q f(x)$

or $f(qx) = f(p) = p$, donc $f(x) = \frac{p}{q} = x$.

Donc : $\forall x\in\mathbb{Q}, \ f(x)=x$.

2) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On a : $x=(\sqrt{x})^2$, donc

$f(x) = f((\sqrt{x})^2) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0$

f morphisme d'anneaux.

3) Soient $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $x\geq y$. On a $x-y\in\mathbb{R}_+$ donc $f(x-y)\geq 0$ (grâce au 2)). Comme f est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même,

$0\leq f(x-y) = f(x)-f(y)$, puis $f(y)\leq f(y)$, donc f est croissante.

4) Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe $x_n, s_n\in\mathbb{Q}$ tq : $x_n\in\left]x-\frac{1}{n} ; x+\frac{1}{n}\right[\cap\mathbb{Q}$ et $s_n\in\left]x ; x+\frac{1}{n}\right[\cap\mathbb{Q}$ (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

On a : $x_n < x < s_n$ et par croissance de f, on a : $f(x_n)\leq f(x)\leq f(s_n)$.

Or x_n et s_n sont dans $\mathbb{Q}$, donc, grâce à 2), on a : $f(x_n)=x_n$ et $f(s_n)=s_n$. Ainsi :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad x_n\leq f(x)\leq s_n \quad (*)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = x$, donc dans $(*)$ quand n tend vers $+\infty$: $x\leq f(x)\leq x$.

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}, \ f(x)=x$

Réciproquement $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est bien un morphisme de corps.