

4. Probabilité de numérisation

Cours Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Soit $B \in \mathcal{F}$ et $P(B) \neq 0$ et $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements. Alors

$$\forall i \in \mathbb{N}, P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) P(A_i)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(B | A_n) P(A_n)} \quad \text{avec } P(B | A_0) P(A_0) = 0 \quad \text{si } P(A_0) = 0.$$

Exercice: 1) Soit $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. On a $p | k$ si et seulement si il existe le m tel que $k = pm$. Or - par ailleurs $n = pm$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi $1 \leq k \leq n \Leftrightarrow 1 \leq p \leq pm \Leftrightarrow 1/p \leq m \leq n/p$

Ainsi $\text{card } D_p = n/p$.

Par équiprobabilité: $P(D_p) = \frac{\text{card}(D_p)}{\text{card } \mathbb{Z}} = \frac{n/p}{n} = \frac{1}{p}$.

2) Ces événements sont mutuellement indépendants.

Soit $J \subset \mathbb{Z}$.

$$m \in \bigcap_{j \in J} D_{p_j} \Leftrightarrow \forall j \in J, p_j | m \Leftrightarrow \prod_{j \in J} p_j | m, \text{ car}$$

p_j divise m si et seulement si p_j est dans la décomposition en facteurs premiers de m

(ce sont des nombres premiers), d'où l'équivalence symbolique que les

$p_j, j \in J$ sont dans la décomposition en facteurs premiers de m CAD $\prod_{j \in J} p_j$ figure dans celle-ci.

Donc on a: $m \in \bigcap_{j \in J} D_{p_j} \Leftrightarrow m \in D_{\prod_{j \in J} p_j}$

$$\text{Ainsi } \bigcap_{j \in J} D_{p_j} = D_{\prod_{j \in J} p_j}$$

$$\text{Ainsi } P\left(\bigcap_{j \in J} D_{p_j}\right) = P\left(D_{\prod_{j \in J} p_j}\right) = \frac{1}{\prod_{j \in J} p_j} = \prod_{j \in J} P(D_{p_j}).$$

(question 1) car $\prod_{j \in J} p_j | n$

Ainsi $D_{p_1}, \dots, D_{p_r}$ sont indep.

3) Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a $k \wedge n = 1 \Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{Z}, n \nmid p_j \nmid k$

(car $\uparrow$ pas de facteurs les uns communs)
 $\Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{Z}, k \notin D_{p_j} \Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{Z}, k \in \bigcap_{j=1}^n \overline{D_{p_j}}$

Par équiprobabilité: $\frac{\varphi(n)}{n}$ est la probabilité que 'un élément de $\mathbb{Z}$ soit premier avec n car

$$\frac{\varphi(n)}{n} = P\left(\bigcap_{j=1}^n \overline{D_{p_j}}\right) = \prod_{j=1}^n P(\overline{D_{p_j}}) = \prod_{j=1}^n (1 - P(D_{p_j})) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$$

Indépendance