5 - Calcul matriciel, déterminant

Cours : $\det([a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \times \cdots \times a_{n,\sigma(n)}$.

Exercice : 1) Soit $U = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$. On a $AU = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ a_{i1} \cdots a_{in} \\ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1j} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},$$ donc $AU = U$ et $U \neq 0$ donc $1 \in Sp(A)$

2) Soit $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. La ligne i de AX est $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. Or : $\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\,|x_j| \leq \sum_{j=1}^n \underbrace{|a_{ij}|}_{\geq 0} \times \|X\|_\infty$

$= \|X\|_\infty \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij}}_{=1} = \|X\|_\infty$.

Ainsi $\|AX\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leq \|X\|_\infty$.

3) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tq $AX = \lambda X$ avec $\lambda \in Sp(A)$.

On a grâce à 2) : $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ soit $|\lambda| \times \|X\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ et comme $\|X\|_\infty > 0$ alors $|\lambda| \leq 1$.

4) Soient $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ stochastiques.

- Soit $t \in [0,1]$. On a $tA + (1-t)B = [ta_{ij} + (1-t)b_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$

Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, il est convexe donc : $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $ta_{ij} + (1-t)b_{ij} \in \mathbb{R}_+$ (on dit tout simplement que l'on fait la somme de nombres positifs).

Soit $i \in [\![1,n]\!]$

$\sum_{j=1}^n (ta_{ij} + (1-t)b_{ij})$

$= t\sum_{j=1}^n a_{ij} + (1-t)\sum_{j=1}^n b_{ij} = t\times 1 + (1-t)\times 1 = 1$, donc $tA + (1-t)B$ est ~~convexe~~ stochastique.

- Soit $C = AB = [c_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.

Il est clair que : $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $c_{ij} \geq 0$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$,

$\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \underbrace{\sum_{j=1}^n b_{kj}}_{=1}$

$= \sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$.

Ainsi $C = AB$ est stochastique.