6 - Séries, suites et séries de f°

Cours : Soit E un evn de dim finie et $A \subset E$. Soit $a \in \bar{A}$. Soit $f_n : A \to K$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers une f° $f : A \to K$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_a f_n = b_n$.
Alors la suite (b_n) converge vers $b \in K$ et :
$$b = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to a} \underbrace{\lim_{n \to +\infty} f_n(x)}_{f(x)} = \lim_{n \to +\infty} \overbrace{\lim_{x \to a} f_n(x)}^{b_n}$$

Exercice : 1) Soit $t \in [0,1[$. On a : $0 \leq u_n(t) \leq a_n t^n \leq a_0 t^n$ ((a_n) décroissante)

Or $\sum_{n\geq 0} t^n$ CV car $t \in [0,1[$, donc par comparaison de séries à termes ⊕, $\sum_{n \geq 0} u_n(t)$ CV. Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(1) = 0$ donc $\sum_{n\geq 0} u_n(1)$ CV.

Donc $\sum u_n$ CVS sur $[0,1]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions les variations de $f_n : t \mapsto (1-t)t^n = t^n - t^{n+1}$

$\forall t \in [0;1]$, $f_n'(t) = n t^{n-1} - (n+1)t^n = t^{n-1}[n - (n+1)t] = (n+1)t^{n-1}[\frac{n}{n+1} - t]$.

Ainsi f_n est croissante sur $[0; n/_{n+1}]$ et décroissante sur $[n/_{n+1}; 1]$.

Comme f_n est positive, $\sup_{t \in [0,1]} |f_n(t)| = f_n(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1}(\frac{n}{n+1})^n$.

Ainsi $\|u_n\|_\infty = \frac{a_n}{n+1}(\frac{n}{n+1})^n$. Par définition de la CVN, $\sum u_n$ CVN sur $[0,1]$ ssi $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_\infty$ CV. Donc la CNS est

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \text{ CV}$$

3) Soit $t \in [0,1]$ et on pose $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t)$.

Soit $t \in [0,1[$. On a : $0 \leq R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k (1-t) t^k$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante}}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_{n+1}(1-t)t^k = (1-t)a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = (1-t)a_{n+1} \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

car $0 \leq t < 1$

Ainsi $0 \leq R_n(t) \leq a_{n+1} t^{n+1} \leq a_{n+1}$

Ceci est aussi valable si $t = 1$, car $R_n(1) = 0$.

Ainsi $\|R_n\|_\infty \leq a_{n+1}$.

Or $\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \to +\infty} \|R_n\|_\infty = 0$,

donc $\sum u_n$ CVU sur $[0,1]$.