9-Séries entières

Ex 1 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

1. $\sum \frac{z^{n^2}}{n!}$;
2. $\sum n! z^n$;
3. $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$;
4. $\sum \frac{\sin(\theta/n)}{n+1} z^n$;
5. $\sum \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \frac{z^n}{n!}$;
6. $\sum \frac{(2n)!}{n! n^n} z^n$;
7. $\sum \frac{z^{n!}}{n!}$;
8. $\sum n^{\ln n} z^n$;
9. $\sum \lfloor \alpha^n \rfloor z^n$, $\alpha > 1$;
10. $\sum e^{\sqrt{n}} z^{2n}$;
11. $\sum \text{ Arccos } \left(1-\frac{1}{n^2}\right) z^n$;
12. $\sum z^{n^2}$;
13. $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) z^n$;
14. $\sum \left(\int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt\right) z^n$;
15. $\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n z^n$;
16. $\sum \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$;
17. $\sum \frac{z^{p_n}}{p_n}$, p_n étant le n-ème nombre premier ;
18. $\sum_{n\geq 1} n! z^{n^2}$;
19. $\sum_{n\geq 2} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$;
20. $\sum_{n\geq 1} \frac{(1+2i)^n - (2i)^n}{n(n+1)} z^n$;
21. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{2n+1}$;
22. $\sum (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \cos\left(\frac{2\pi n}{37}\right) z^n$.

Ex 2 : Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes telle que $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}_+$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

Ex 3 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n$.

Ex 4 : Soit $(a_n)_n$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon R_1. Montrer que la série entière $\sum a_n^2 x^n$ a pour rayon de convergence $R_2 = R_1^2$.

Ex 5 : (*) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f sa somme. Montrer que pour tout $z \in D(0,R)$, la fonction $f_z : h \mapsto f(z+h)$ est DSE.

Ex 6 : (*) Soit $\sum a_n$ une série divergente à termes strictement positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et on suppose que $a_n = o(S_n)$. Déterminer les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum S_n z^n$.

Ex 7 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = k \in \mathbb{R}_+$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

Ex 8 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Montrer que les deux séries entières $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ et $\sum \frac{A_n}{n!} z^n$ ont le même rayon de convergence.

Ex 9 : On définit une suite (u_n) d'entiers par les conditions : $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, on a : $u_n = -u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3^n$ $(*)$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 3^{n+1}$. Que dire du rayon de convergence de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$?
2. En déduire l'expression de f sur $]-1/3, 1/3[$.

Ex 10 : Soit (a_n) une suite définie par $a_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \ln(1+a_n)$.

1. Donner le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
2. Déterminer la nature de la série pour $x = -1$.
3. **a.** Montrer que les séries $\sum \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ et $\sum a_n$ sont de même nature.

   b. Étudier la convergence de la série entière pour $x = 1$.

Ex 11 : (*) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ n'appartenant pas à $\{-n, , n \in \mathbb{N}\}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n z^n$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série entière précédente converge absolument en tout point du cercle de centre 0 et de rayon R.

Ex 12 : Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières :

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n+1)x^n$;
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n!}x^n$;
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}$;
4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\cos(2n\pi/3)}$;
5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n+1)!}$;
6. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$;
7. $\sum \frac{2^{(-1)^n}}{n}x^n$;
8. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{(2n+1)!}$;
9. $\sum \mathrm{ch}\,(n)x^n$;
10. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}x^n$;
11. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n(2n+1)}$;
12. $\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\left(\frac{2\pi n}{37}\right)x^n$.
13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-n}$;
14. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}$;
15. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$;
16. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$;
17. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3n+2}$;
18. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n+1}x^n$;
19. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$;
20. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$;
21. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(n+1)!}$;
22. $\sum (n+1)3^n z^{2n}$;
23. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(na)}{n}x^n,\ a \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$;
24. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\theta)}{n!}x^n$;
25. $\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n}$;
26. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+4n-1}{(n+2)n!}x^n$;
27. **(CCP 47)** $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$, avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$.

Ex 13 : Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Calculer $1 + j^k + \overline{j}^k$ pour tout k de $\mathbb{N}$. En déduire une expression de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$, pour x dans $\mathbb{R}$.

Ex 14 : Développer en série entière les fonctions suivantes.

1. $(2+x)e^x$;
2. $\cos^3 x$;
3. $\frac{1}{x^2+x-2}$;
4. $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$;
5. $\frac{x^2+x+3}{(x-2)^2(2x-1)}$;
6. $\sum_{n=0}^{+\infty}(2x-x^2)^n$;
7. $\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$;
8. $\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$;
9. $e^x\int_0^x\frac{dt}{1+t^4}$;
10. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Arcsin}\,(x)$;
11. $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(xt)dt$;
12. $\int_0^x \sin(t^2)dt$;
13. $\int_{-\infty}^x\frac{dt}{1+t+t^2}$ (remarquer que $1+z+z^2 = \frac{1-z^3}{1-z}$) ;
14. $e^x\sin(x)$;
15. $\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})$.

Ex 15 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{1}{(2+t^2)^{n+1}}dt$.

1. Montrer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut au moins 2.
2. Soit $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Pour $x \in]-2, 2[$, montrer que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
3. En déduire la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ et montrer que $R = 2$.

Ex 16 : Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1}\ln\left(\tan\left(\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)\right)$.

Ex 17 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ et $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}u_n x^n$.

1. Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{2n+1}}{2n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{2n+1}$ pour u variant dans un intervalle à déterminer.
2. Donner l'ensemble de définition I de f. et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles sur $\mathring{I}$.
3. Calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

Ex 18 : Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $c_1 = 1$ et $c_n = \sum_{k=1}^{n-1}c_k c_{n-k}$ pour $n \geq 2$.

1. On considère $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}c_n x^n$. On admet provisoirement que le rayon de convergence de cette série R est strictement positif. Former une équation de degré deux vérifiée par f.

2. En déduire : $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$.

3. Justifier l'hypothèse faite sur R, puis trouver une expression simple de c_n.

Ex 19 : Pour α dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$, on pose : $\binom{\alpha}{n} = \frac{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\dots(\alpha-1)\alpha}{n!}$.
Soit $\beta \in \mathbb{R}$, montrer que : $\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$.

Ex 20 : (*) Soit $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. Montrer que f est développable en série entière dans un voisinage de zéro. On pourra chercher des relations définissant les (b_n) tels que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Ex 21 : (*) Soit f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$ tout entier. On suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq A|z|^d + B$. Montrer que f est polynomiale.

Ex 22 : Soit (a_n) une suite réelle telle que $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum (-1)^n a_n x^n$ vaut au moins 1.

2. Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} (x+1)f(x)$ existe, puis en déduire $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ sous la forme d'une série.

3. Déterminer cette limite si $a_0 = 0$ et $a_n = \ln(n)$ pour $n \geq 1$.

Ex 23 : **1.** Déterminer le rayon de convergence R de $\sum \ln(n) x^n$, dont on note $g(x)$ la somme.
2. Montrer que : $\forall x \in]-R, R[,\ (1-x)g(x) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$.
3. En encadrant $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$, encadrer $(1-x)g(x)$, puis trouver un équivalent de g en R.

Ex 24 : (*) **1.** Soient (a_n) et (b_n) deux suites de $\mathbb{R}_+^*$ telles que $a_n \sim b_n$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ que l'on suppose définies sur $\mathbb{R}$. Montrer que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$.

2. a. Quel est le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$?
b. Montrer qu'en $+\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{e}} e^{ex}$.

Ex 25 : Montrer que :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \operatorname{Arctan}(x)dx$.
En déduire la valeur de cette somme.

2. $\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x}) e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$;

3. $\int_0^1 \frac{x+\ln(1-x)}{x^2} dx = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t} dt$.

5. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ex 26 : Montrer que $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 27 : Déterminer $\operatorname{Arctan}^{(k)}(0)$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Ex 28 : **1.** Soit $z \in D(0,1)$. On pose $L(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$. Montrer que $\exp(L(z)) = 1 + z$ (on pourra dériver la fonction $t \mapsto \exp(L(tz))$ sur $[0,1]$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Montrer que : $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall z \in D(0,\alpha),\ \det(I_p + zA) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} tr(A^n) z^n\right)$.

Ex 29 : Soit f une fonction d'un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que f est développable en série entière sur un voisinage de 0 si et seulement si il existe trois réels strictement positifs M, ρ et h tels que : $\forall x \in]-h, h[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \rho^n n!$.

<u>Ex 30</u> : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n+1}a_{n-1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq n+1$.

2. En déduire que le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geq 1$. On notera S sa somme.

3. Déterminer une équation différentielle sur $]-R, R[$ de S et en déduire une expression de S.

4. En déduire l'expression exacte des a_n et de R.

<u>Ex 31</u> : Soit l'équation différentielle $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$. Chercher les solutions développables en série entière en posant $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

<u>Ex 32</u> : Soit $(E) : x^2 y'' + x(x+1)y' - y = 0$.

1. Chercher les solutions de (E) développables en série entière en précisant le rayon de convergence.

2. Exprimer ces solutions à l'aide de fonction élémentaires.

<u>Ex 33</u> : *1.* Soit $g = (\operatorname{Arcsin})^2$. Trouver une équation diffŕentielle d'ordre 2 satisfaite par g.
2. Montrer que g est DSE. Déterminer son rayon de convergence et son développement.

<u>Ex 34</u> : On considère la suite définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 4^n n!$.
2. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Montrer que f est définie sur un intervalle à préciser. Montrer que f est solution de $y' = y^2$.
3. Déterminer f au voisinage de 0.
4. En déduire explicitement l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Ex 35</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ tel que : $0 < |a| < 1$ et $x \in]-1/|a|, 1/|a|[$. On pose $u_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-a^k x}$.

1. Montrer que pour x dans $]-1/|a|, 1/|a|[$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note $f(x)$ sa limite.

2. Montrer que $f(ax) = (1-ax)f(x)$.

3. Montrer que f est décomposable en série entière sur $]-1/|a|, 1/|a|[$ et calculer son développement.

<u>Ex 36</u> : Soient $a \in]0,1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, puis exprimer $f^{(n)}$ en fonction de f.

2. En déduire que f est égale à sa série de Taylor.

3. Déterminer l'ensemble des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

<u>Ex 37</u> : (*) Soit $\sum a_n$ une série numérique convergente. On pose $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la série de fonction $\sum_{p\geq 0} F^{(p)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$:

   a. lorsque $\sum a_n$ converge absolument ;

   b. dans le cas général

<u>Ex 38</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $f_n : x \mapsto \frac{e^{i2^n x}}{n^n}$. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geq 0} \frac{2^{k^2}}{k!k^k} x^k$.

3. Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor de S en 0 ?