7 - Réduction

Cours : • Il existe $P \in GL_n(K)$ et $T \in T_n^+(K)$ tel que : $A = PTP^{-1}$
• χ_A est scindé sur K.

Exercice : 1). Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres associée aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivement et qui sont deux à deux distinctes. Ainsi elles sont de multiplicité un. Comme : $1 \leq \dim E_{\lambda_i}(u) \leq m_{\lambda_i} = 1$, alors : $\dim E_{\lambda_i}(u) = 1$, puis : $E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Vect}(e_i)$.

• Comme $uv = vu$ alors v laisse stable les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Comme $e_i \in E_{\lambda_i}(u)$ alors $v(e_i) \in E_{\lambda_i}(u)$ car $v(E_{\lambda_i}(u)) \subset E_{\lambda_i}(u)$.

On a donc $v(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_i)$, donc il existe $\mu_i \in K$ tq : $v(e_i) = \mu_i e_i$. Ainsi e_i est vecteur propre de v.

2) $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de diagonalisation de u et v.

3) Recherchons d'abord les coefficients potentiels a_k.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a $v(e_i) = \mu_i e_i$, et

$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e_i) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k e_i$, donc on veut

$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k = \mu_i$ soit $P(\lambda_i) = \mu_i$ avec $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Il faut trouver $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tq : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(\lambda_i) = \mu_i$. $(*)$

Méthode 1 : Soit $(L_1, \ldots, L_n)$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associée à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $\left(L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right)$.

On pose $P = \sum_{i=1}^{n} \mu_i L_i$.

Méthode 2 : Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P \longmapsto (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) \end{cases}$

$P \in \ker \varphi \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ P(\lambda_i) = 0 \iff P = 0$ car P a au moins n racines $\neq$ et $d°P \leq n-1$,

donc $\ker \varphi = \{0\}$ et $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n = n$. Ainsi φ est un isomorphisme. Il existe donc un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tq : $\varphi(P) = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ soit : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(\lambda_i) = \mu_i$.

Soit P vérifiant $(*)$. Soit $w = v - P(u)$ et $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $w(e_i) = v(e_i) - P(u)(e_i) = \mu_i e_i - P(\lambda_i) e_i = 0$

donc w est nulle sur une base, donc $w = 0$,

puis $v = P(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$.