8- séries entières

Cours : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Il existe donc $c \in]a,b[$ tq : $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.

Exercice : 1) Montrons par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{0 \leq I_n \leq n!}_{P(n)}$

- $P(0)$ et $P(1)$ sont vrais.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $P(n)$ et $P(n+1)$. On a :

$$I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1) I_n \underset{P(n),\,P(n+1)}{\leq} (n+1)! + (n+1) \times n! = (n+1)! + (n+1)! = 2(n+1)!$$
$$\leq (n+2)(n+1)! = (n+2)!$$

et $I_{n+2} \geq 0$, d'où $P(n+2)$, ce qui achève la récurrence.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{I_n}{n!} \leq 1$ donc $\left(\frac{I_n}{n!} 1^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc : $R \geq 1$.

2) On pose $u_n = \frac{I_n}{n!}$ de telle sorte que : $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Soit $x \in]-1,1[$ et $n \geq 2$. On a :

$$\frac{I_n}{n!} x^n = \frac{1}{n} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n + \frac{(n-1)}{n} \times \frac{1}{n-1} \frac{I_{n-2}}{(n-2)!} x^n \text{ donc}$$

$$u_n x^n = \frac{u_{n-1}}{n} x^n + \frac{u_{n-2} x^n}{n} \quad \text{puis : } x n u_n x^{n-1} = x u_{n-1} x^{n-1} + x^2 u_{n-2} x^{n-2}$$

Comme on peut dériver terme à terme une série entière sur son intervalle de CV, avec : $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$, on a :

$$x \sum_{n=2}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = x \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-2} x^{n-2} \text{ soit}$$

$$x(f'(x) - u_1) = x \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = x(f(x) - u_0) + x^2 f(x)$$

Or $u_0 = u_1 = 1$, donc :

Soit : $x f'(x) - x = x f(x) - x + x^2 f(x)$

Soit $x f'(x) - x(x+1) f(x) = 0$.

3) Résolvons cette équation différentielle sur $]0,1[$.

On a : $f'(x) - (x+1) f(x) = 0$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tq : $f(x) = \lambda e^{x^2/2 + x}$. Comme f est continue (DSE) sur $]-1,1[$: $\lim_{0^+} f = f(0) = \lambda$

Or $f(0) = \underset{u_0}{1}$ donc $f(x) = e^{x^2/2 + x}$

De même : $\forall x \in]-1,0[$, $f(x) = e^{x^2/2 + x}$

et avec $f(0) = 1$, on a : $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = e^{x^2/2 + x}$.

- f est même DSE sur $\mathbb{R}$ car $f(x) = e^{x^2/2} e^x$ et elle est le produit de deux f^{ns} DSE sur $\mathbb{R}$.
- Par produit de Cauchy de f^{ns} DSE sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec $$a_n = \sum_{\substack{2p+q=n \\ 0 \leq p,q \leq n}} \frac{1}{2^p p! q!} = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2^p p! (n-2p)!}$$

Par unicité du DSE : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_n}{n!} = a_n$

puis : $\forall n \in \mathbb{N}$, $$I_n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^p p! (n-2p)!}.$$