7 - Euclidiens

<u>Cours</u> • $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^\perp$

• $p \in S(E)$

<u>Exercice</u> : 1). u est bien linéaire :

$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ u(\lambda x+\mu y) = \langle a, \lambda x+\mu y\rangle a + \langle b, \lambda x+\mu y\rangle b$

$= [\lambda \langle a,x\rangle + \mu\langle a,y\rangle] a + [\lambda\langle b,x\rangle + \mu\langle b,y\rangle] b$

$= \lambda [\langle a,x\rangle a + \langle b,x\rangle b] + \mu [\langle a,y\rangle a + \langle b,y\rangle b] = \cancel{\lambda u(x)+\mu u(y)}$

$= \lambda u(x) + \mu u(y)$.

• Soient $x, y \in E$. On a $(x|u(y)) = (x \mid \overbrace{\langle a,y\rangle}^{\in\mathbb{R}} a + \overbrace{\langle b,y\rangle}^{\in\mathbb{R}} b)$

$= \langle a,y\rangle \langle x,a\rangle + \langle b,y\rangle \langle x,b\rangle$

linéarité de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ / à la 2e variable

De même $(u(x)|y) = (y|u(x)) = \langle a|x\rangle\langle y|a\rangle + \langle b,x\rangle\langle y,b\rangle$

$= \langle a,y\rangle\langle x|a\rangle + \langle b,x\rangle\langle y,b\rangle = (x, u(y))$.

Ainsi : $u \in S(E)$.

2) $x \in \operatorname{Ker} u \iff \underbrace{\langle a,x\rangle}_{\in\mathbb{R}} a + \underbrace{\langle b,x\rangle}_{\mathbb{R}} b = 0 \overset{(a,b)\text{ libre}}{\iff}$

$\begin{cases} \langle x, a\rangle = 0 \\ \langle x, b\rangle = 0 \end{cases} \iff x \in \operatorname{Vect}(a)^\perp \cap \operatorname{Vect}(b)^\perp$

On a donc $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(a)^\perp \cap \operatorname{Vect}(b)^\perp$.

On veut aussi dire de que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(a,b)^\perp$

3) Comme on est en dimension finie, on a

$\operatorname{Vect}(a,b) \oplus \operatorname{Vect}(a,b)^\perp = E$. Soit $(e_1, \dots, e_{n-2})$ une base de $\operatorname{Vect}(a,b)^\perp$

~~On $f(a+b) =$~~ Ainsi $(a, b, e_1, \dots, e_{n-2}) = B$ est une base de E adaptée à notre décomposition. On a

$f(a) = \|a\|_a^2 + \langle a,b\rangle b$ et $f(b) = \|b\|^2 b + \langle a,b\rangle a = b + \langle a,b\rangle a$.

On a donc $= a + \langle a,b\rangle b$

$$\operatorname{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & \langle a,b\rangle \\ \langle a,b\rangle & 1 \end{matrix} & (0) \\ (0) & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

. Soit $F = \operatorname{Vect}(a,b)$.

Pour finir il faut chercher les éléments propres de f sur F.

On constate que $f(a+b) = a+b + \langle a+b\rangle(a+b) = (1+\langle a,b\rangle)(a+b)$

et $f(a-b) = (1 - \langle a,b\rangle)(a-b)$

$a+b$ et $a-b$ sont des vect(a,b) et indépendants car

$0 = \lambda(a+b) + \mu(a-b) = (\lambda+\mu)a + (\lambda-\mu)b \Rightarrow \begin{cases} \lambda+\mu = 0 \\ \lambda-\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$, car (a,b) est libre.

Ainsi $B' = (a+b, a-b, e_1, \dots, e_{n-2})$ est une base de E et

$$\operatorname{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1+\langle a,b\rangle & & (0) \\ & 1-\langle a,b\rangle & \\ (0) & & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

et $1 \neq \langle a,b\rangle$ et $1 \neq -\langle a,b\rangle$ car $|\langle a,b\rangle| < \|a\| \times \|b\|$, car (a,b) indép dans Cauchy-Schwarz

Si on note $\lambda_1 = 1+\langle a,b\rangle$ et $\lambda_2 = 1-\langle a,b\rangle$, alors

$\operatorname{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, 0\}$ et $E_0(f) = \operatorname{Vect}(a,b)^\perp$.

• Pour $\langle a,b\rangle \neq 0$ on a $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et donc $E_{\lambda_1} = \operatorname{vect}(a+b)$ et $E_{\lambda_2}(f) = \operatorname{vect}(a-b)$

• Pour $\langle a,b\rangle = 0$, on a $\lambda_1 = \lambda_2$ donc $E_{\lambda_1} = \operatorname{Vect}(a+b, a-b) = \operatorname{Vect}(a,b)$