10 – Équa diff, calcul diff.

Conv 3 : Il existe $L \in \mathcal{L}(E,F)$ tq : $f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{\|h\|\to 0}{o}(\|h\|)$
$= f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon : E \to F$ tq $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

Exercice : 1) On veut : $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $r(r-1)t^2 t^{r-2} + 4rt\,t^{r-1} + 2t^r = 0$
soit $r(r-1)+4r+2=0 \iff r^2+3r+2=0 \iff r\in\{-1;-2\}$.

2) Sur $\mathbb{R}_+^*$: $y'' = -\frac{2}{t^2}y - \frac{4}{t}$. En posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y'\end{pmatrix}$, on a :
(*) $\iff$ $Y' = \begin{pmatrix}0&1\\ -2/t^2 & -4/t\end{pmatrix} Y$.

3) . L'équation homogène normalisée de (**) est
(*) : $y'' + \frac{4}{t}y' + \frac{2}{t^2} = 0$. On a trouvé 2 solutions indépendantes de q1 de (*) : $y_1 : t\mapsto 1/t$ et $y_2 : t\mapsto 1/t^2$ (elles sont indépendantes, car par exemple : $y_2(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(y_1(t))$).
(*) est normalisée et à coeff continus, donc grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, l'espace des solutions de (*) est de dimension 2, donc les solutions homogènes sont $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$.

- Cherchons une solution particulière de (**) sous la forme $t\mapsto \lambda_1(t)y_1(t) + \lambda_2(t)y_2(t)$, avec λ_1, λ_2 deux fois dérivables. On doit avoir :
$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = e^t/t^2 \end{cases}$
(pour l'éq° normalisée : $y'' + \frac{4}{t}y' + \frac{2}{t^2} = e^t/t^2$)

soit $\begin{cases} \frac{\lambda_1'(t)}{t} + \frac{\lambda_2'(t)}{t^2} = 0 & (\times t^2) \\ -\frac{\lambda_1'(t)}{t^2} + \frac{2}{t^3}\lambda_2'(t) = e^t/t^2 & (\times(-t^3)) \end{cases} \iff \begin{cases} t\lambda_1'(t) + \lambda_2'(t) = 0 \\ t\lambda_1'(t) + 2\lambda_2'(t) = -te^t \end{cases}$

$\iff \begin{pmatrix} t&1\\t&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1'\\ \lambda_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-te^t\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\lambda_1'\\ \lambda_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t&1\\t&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\-te^t\end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix}\lambda_1'\\ \lambda_2'\end{pmatrix} = \frac{1}{t}\begin{pmatrix}2&-1\\-t&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-te^t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^t\\-te^t\end{pmatrix}$

On veut $\lambda_1'(t) = e^t$, donc $\lambda_1(t) = e^t$ convient
et $\lambda_2'(t) = -te^t$ or $\int te^t\,dt = [te^t] - \int e^t\,dt = te^t - e^t$
donc $\lambda_2(t) = -te^t + e^t$ convient.
Une solution particulière est $y_p : t\mapsto \frac{e^t}{t} + \frac{-te^t+e^t}{t^2} = e^t/t^2$.
Donc $S = \{t\mapsto \frac{\lambda}{t} + \frac{\mu}{t^2} + e^t/t^2,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.

4) On a : $y'(t) = -\frac{1}{t^2}z(t) + \frac{1}{t}z'(t)$ et $y''(t) = \frac{2}{t^3}z(t) - \frac{2}{t^2}z'(t) + \frac{1}{t}z''(t)$
y vérifie (**) ssi $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $e^t = \frac{2}{t}z(t) - 2z'(t) + tz''(t) - \frac{4}{t}z(t) + 4z'(t) + \frac{2z(t)}{t}$
ssi $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $tz''(t) + 2z'(t) = e^t$ ssi $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $z''(t) + \frac{2}{t}z'(t) = e^t/t$
ssi z' vérifie (E) : $u' + \frac{2}{t}u = e^t/t$.
Équation homogène associée à (E) : $u' + \frac{2}{t}u = 0$ dont les solutions sont $\{t\mapsto \lambda e^{-2\ln(t)},\ \lambda\in\mathbb{R}\} = \{t\mapsto \lambda e^{-\ln(t^2)},\ \lambda\in\mathbb{R}\}$
$= \{t\mapsto \lambda/t^2,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

Solution particulière de (E) sous la forme $t\mapsto \frac{\lambda(t)}{t^2}$. On veut $\frac{\lambda'(t)}{t^2} = \frac{e^t}{t}$ soit $\lambda'(t) = te^t$ soit $\lambda(t) = te^t - e^t$ convient (voir q3)
Donc une solution particulière de (E) est $t\mapsto \frac{e^t}{t} - e^t/t^2$.
y est solution de (**) ssi : $\exists\alpha\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $z'(t) = \frac{\alpha}{t} + \frac{e^t}{t} - e^t/t^2$
ssi $\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $z(t) = -\frac{\alpha}{t} + \beta + \frac{e^t}{t}$ (car $\frac{d}{dt}(e^t/t) = e^t/t - \frac{e^t}{t^2}$)
ssi $\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $y(t) = -\frac{\alpha}{t^2} + \frac{\beta}{t} + e^t/t^2$ donc
$S = \{t\mapsto \frac{\lambda}{t} + \mu/t^2 + e^t/t^2,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ (ici $\mu = -\alpha$ et $\lambda = \beta$).