# 11- variables aléatoires

Cours : Soit $X$ une v.a discrète à valeurs positive et dans $L^1$. Alors :
$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

Exercice : 1) On a $Y = \min(X_1, X_2)$. On pose $q = 1-p$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $P(Y > k) = P(\min(X_1, X_2) > k) =$
$P((X_1 > k) \cap (X_2 > k)) \underset{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{\overset{?}{=}} P(X_1 > k)\, P(X_2 > k) = q^k \times q^k = (q^2)^k$

En effet $P(X_1 > k) = P(\bigcup_{\ell=k+1}^{+\infty} (X_1 = \ell)) \underset{\text{disjoint}}{=} \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} P(X_1 = \ell) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} p q^{\ell-1}$
$= p \sum_{s=k}^{+\infty} q^s = \frac{p q^k}{1-p} = q^k$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $P(Y = k) = P(Y > k-1) - P(Y > k) = (q^2)^{k-1} - (q^2)^k$
$= (q^2)^{k-1}(1-q^2)$. Ainsi $\underline{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q^2)}$.

2) $Z = Y + X_3$.

$Z$ est à valeurs dans $\mathbb{N} \cap [2; +\infty[$.

Soit $n \geq 2$. On a $P(Z = n) = P(\bigcup_{k=1}^{n-1} (Y = k) \cap (X_3 = n-k))$ disjointe

$= \sum_{k=1}^{n-1} P((Y = k) \cap (X_3 = n-k)) = \sum_{k=1}^{n-1} P(Y = k)\, P(X_3 = n-k)$

indep car $Y$ dépend que de $X_1, X_2$

$= \sum_{k=1}^{n-1} (q^2)^{k-1}(1-q^2)\, q^{n-k-1}(1-q) = (1-q^2)(1-q)\, q^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(q^2)^{k-1} q^{-k+1}}_{(q^2/q)^{k-1}}$

$= (1-q^2)(1-q)\, q^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} = (1-q^2)(1-q)\, q^{n-2} \sum_{\ell=0}^{n-2} q^\ell$

$\underset{q \neq 1}{=} (1-q^2)(1-q)\, q^{n-2} \frac{1-q^{n-1}}{1-q} = \underline{(1-q^2)\, q^{n-2}(1-q^{n-1})}$

3) Le temps moyen passé par $A_3$ est $E(Z)$.

Par linéarité de l'espérance :

$E(Z) = E(Y) + E(X_3) = \frac{1}{1-q^2} + \frac{1}{p}$

$= \frac{1}{(1-q)(1+q)} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p(1+q)} + \frac{1}{p} = \underline{\frac{2+q}{p}}$.