Ex 1 : (*) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ croissante et D l'ensemble des points de discontinuité de f.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que la famille $\left(\lim\limits_{x^+} f - \lim\limits_{x^-} f\right)_{x\in]a,b[}$ est sommable.

2. En déduire que $D\cap]a,b[$ est au plus dénombrable, pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

3. Montrer que D est au plus dénombrable.

Ex 2 : Montrer que l'ensemble S des nombres complexes racines d'un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable. A-t-on $S = \mathbb{C}$?

Ex 3 : Soit X un ensemble fini. On dit que $f : X \to X$ est une involution de X si $f \circ f = Id$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, I_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$ et l'on convient que $I_0 = 1$.

1. Calculer I_1, I_2 et I_3 et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = I_{n+1} + (n + 1)I_n$.

2. Soit $S : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{I_n}{n!} z^n$. Montrer que S a un rayon de convergence $R > 0$.

3. Trouver un équation différentielle vérifiée par S et en déduire une expression simple de $S(x)$. En déduire enfin une expression de I_n.

Ex 4 : (*) Soit $\mathbb{N}[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{P \in \mathbb{N}[X],\ P(2) = n\}$.

1. Montrer que A_n est un ensemble fini. On pose $u_n = |A_n|$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = u_{2n}$. et que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n} = u_{2n-1} + u_n$.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ u_{2^n} \leq 2^{n^2/2}$.

4. ***a.*** Déterminer le rayon de convergence R de $\sum u_n z^n$. On notera $F(z)$ cette somme.

b. Soit $z \in D(0, R)$. Trouver une relation entre $F(z)$ et $F(z^2)$.

c. En déduire que : $\forall z \in D(0, R),\ F(z) = \prod\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1 - z^{2^k}}$.

Ex 5 : Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, k + 1]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Ex 6 : ***1.*** Soit $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre des solutions entières naturelles (n, m) de l'équation $an + bm = c$ est le coefficient de x^c dans le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1 - x^a)(1 - x^b)}$.

2. Quel est le nombre de solutions entières naturelles (n, m) de l'équation $2n + 4m = c$?

Ex 7 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour un tournoi de football, n équipes de D_1 et n équipes de D_2 sont rassemblées et n matchs sont organisés successivement. Pour chaque match, les équipes qui s'affrontent sont choisies en toute indépendance et équiprobabilité. Déterminer le probabilité a_n pour que chaque équipe de D_1 rencontre une équipe de D_2.

Ex 8 : On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n (avec $n \geq 2$). On prélève ces jetons au hasard, un par un et sans remise. On note $(u_1, u_2, ..., u_n)$ la liste des numéros tirés. Pour i dans $[\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a record à l'instant i si $u_i > \max(u_1, ..., u_{i-1})$. On convient qu'il y a systématiquement un record à l'instant 1.

1. Calculer, pour i dans $[\![1, n]\!]$ la probabilité r_i qu'il y ait un record à l'instant i.

2. Quelle est la probabilité que durant la totalité des tirages, on assiste exactement à un seul record ? n records ? deux records ?

<u>Ex 9</u> : Un escalier dispose de n marches. On peut monter une ou deux marches à la fois. Quelle est le nombre de façons de montrer l'escalier ?

<u>Ex 10</u> : Soit $\mathcal{B} = \{[\![n, p]\!],\ (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ n \leq p\}$ est-il une tribu sur $\mathbb{N}$?

<u>Ex 11</u> : Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$.

1. Montrer qu'il existe une tribu sur Ω contenant $\mathcal{F}$ et que l'intersection de toutes ces tribus est encore une tribu, que l'on note $\sigma(\mathcal{F})$.

2. Montrer que $\sigma(\mathcal{F})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{F}$.

<u>Ex 12</u> : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements.

1. Si $A \cap B = \emptyset$, montrer que : $P(A)P(B) \leq 1/4$.

2. Montrer que $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A \cap B)P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B)P(A)$.

3. Montrer que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq 1/4$.

<u>Ex 13</u> : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(A_n) = 1$. Montrer que $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$.

<u>Ex 14</u> : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle.
Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant $P(\{n, n+1, \ldots\}) = \lambda a_n$.

<u>Ex 15</u> : (*) Soient P_1 et P_2 deux probabilités sur le même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Montrer les équivalences entre :

(i) $\forall A \in \mathcal{A},\ P_1(A) = 0 \Longrightarrow P_2(A) = 0$;
(ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall A \in \mathcal{A},\ P_1(A) \leq \eta \Longrightarrow P_2(A) \leq \varepsilon$.

<u>Ex 16</u> : (*) On suppose que N passagers montent successivement dans un avion. Le premier passager se place aléatoirement. Les suivants prennent une place au hasard si leur place est déjà occupée. Déterminer la probabilité que le dernier passager soit à sa place.

<u>Ex 17</u> : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n et k boules bleues non numérotées. Les boules sont tirées avec remise jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée. Quelle est la probabilité de ne jamais tirer la boule 1 lors du jeu ?

<u>Ex 18</u> : Deux personnes jouent à tour de rôle à un jeu où l'on a une probabilité de $1/4$ de gagner et $1/6$ de perdre. Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux perd ou gagne. Est-il plus avantageux de jouer en premier ou en deuxième ? Le jeu s'arrête-t-il presque-sûrement ?

Ex 19 : On considère une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire toutes les boules successivement et sans remise.

1. Déterminer la probabilité de tirer les boules de numéros impairs dans l'ordre, non nécessairement consécutivement.

2. Déterminer la probabilité de tirer les boules de numéros impairs dans l'ordre et consécutivement.

Ex 20 : Des joueurs A_1,...,A_n,...(en nombre infini), s'affrontent à un tournoi de Pile ou Face avec une pièce non truquée. D'abord A_1 rencontre A_2. Le perdant est éliminé, puis le gagnant rencontre A_3. À nouveau le perdant est éliminé, le gagant rencontre A_4, et ainsi de suite. Est déclaré vainqueur le premier joueur qui remporte qui remporte deux parties consécutives. Pour n, on note q_n la probabilité que le joueur A_n participie au tournoi, et p_n la probabilité qu'il le remporte.

1. Déterminer q_n.

2. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.

3. Déterminer p_n.

Ex 21 : On lance une pièce équilibrée n fois de suite (avec $n \geq 2$). Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note P_k ',Äôévénement« on obtient pile au k-ième lancer ». On note B l'événement : « le nombre de piles lors des n lancers est pair ».

1. Déterminer les probabilités de ces événements.

2. Déterminer $P(A_1 \cap ... \cap A_n \cap B)$ et en déduire que les événements ne sont pas mutuellement indépendants.

3. Montrer que toute sous-famille de n événements parmi $A_1, ..., A_n, B$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Ex 22 : Un dé équilibré comporte quatre faces vertes et deux rouges. On lance n fois le dé, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement « on n'a pas obtenu deux faces rouges de suite au cours du tirage ».

1. Soit RV l'évément « on a obtenu au premier tirage une face rouge et une verte au deuxième tirage » et RR l'évément « obtenir des faces rouges au deux premiers tirages ». Quel évément X choisir afin que (RV, RR, X) soit un système complet d'événements.

2. Calculer $P(A_2)$ et $P(A_3)$.

3. Montrer que $P(A_n) = \dfrac{2}{3}P(A_{n-1}) + \dfrac{2}{9}P(A_{n-2})$ pour $n \geq 4$. Comment choisir $P(A_0)$ et $P(A_1)$ pour que cette relation soit vraie pour tout $n \geq 2$? Est-ce logique ?

4. Déterminer $P(A_n)$ pour $n \geq 2$.

Ex 23 : On dispose dans une urne 10 boules numérotées de de 1 à 10 et on effectue des tirages de la façon suivante : on extrait une boule au hasard, puis on rajoute 10 boules numérotées de 11 à 20. On réitère le procédé de sorte qu'au p-ème lancer, on extrait une boule au hasard puis on rajoute dans l'urne 10 boules portant les numéros $10p + 1, 10p + 2, ..., 10(p + 1)$ (à chaque tirage la boule tirée n'est pas remise). Quelle est la probabilité de ne jamais tirer la boule numéro un.

Ex 24 : Une urne contient v boules vertes et b boules bleues. On effectue n tirages successifs de la manière suivante :

- si l'on tire une boule verte, alors on replace cette boule dans l'urne avant le tirage suivant,
- si l'on tire une boule bleue, on élimine cette boule avant le tirage suivant.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule bleue au cours des n tirages ?

2. La seconde boule est verte. Quelle est la probabilité que la première ait été bleue ?

Ex 25 : Une puce se déplace sur un plateau de n cases numérotées. Initialement, elle se trouve sur la case 1. À chaque pas, elle passe de la case qu'elle occupe à l'une des $n-1$ autres, ce de façon équiprobable et indépendamment de ses déplacements antérieurs. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la limite lorsque p tend vers $+\infty$ de la probabilité qu'elle se trouve sur la case k après p mouvements.

Ex 26 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $2n$ pièces de monnaie numérotées de 1 à $2n$ telles que pour tout k, la k-ième pièce amène « Pile » avec la probabilité $k/2n$. On prend une pièce au hasard, on la lance et on obtient « Face ». Quelle est la probabilité « Pile » si on la relance ?

Ex 27 : Deux entreprises produisent des pétards en proportion égale. Cependant certaines sont défectueuses, avec une probabilité p_1 pour la première entreprise et avec une probabilité p_2 pour la seconde. Un client achète un sachet contenant n articles provenant de la même entreprise. Il teste un premier pétard et celui-ci fonctionne. Quelle est la probabilité :

1. pour qu'un pétard dans le même sachet fonctionne ?

2. que le sachet comporte k articles fonctionnels (y compris le premier extrait) ?

Ex 28 : On dispose de trois pièces. la première donne face avec une probabilité de $0,1$, la seconde avec une probabilité de $0,4$ et la troisième avec une probabilité de $0,6$. On choisit une pièce au hasard et on la lance plusieurs fois jusqu'à obtenir face pour la première fois au n-ème lancer. Quelle est la probabilité π_n que l'on ait lancé la première pièce. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n$? Commenter.

Ex 29 : Une urne contient 20 boules blanches et 20 boules noires. On effectue n (avec $n \geq 2$) tirages successifs avec remise dans l'urne. On appelle A l'événement « au cours des tirages, on a obtenu des boules de chacune des couleurs » et B l'événement « au cours des tirages, on a obtenu au plus une boule blanche ». Étudier l'indépendance des événements A et B.

Ex 30 : Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de lecteurs pour correction. À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité de $1/3$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendantes les unes des autres, et les relectures sont indépendantes.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro i ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ème lecture ?

2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issu de la n-ème lecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à $0,9$?

Ex 31 : On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note P_n l'événement « on obtient pile au n-ème lancer » et F_n l'événement « on obtient face au n-ème lancer ».
On s'intéresse au rang d'apparition de la séquence PPF (le rang est le rang du face).On pose $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ si $n \geq 3$, puis $U_n = \bigcup\limits_{k=3}^{n} B_k$ et $u_n = P(U_n)$, avec $u_1 = u_2 = 0$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone, et en déduire qu'elle converge. On note ℓ sa limite.

2. Calculer $P(B_n)$. Montrer que B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux ncompatibles. Calculer u_3, u_4 et u_5.

3. Montrer que $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Exprimer $P(U_n \cap B_{n+1})$ en fonction de u_{n-2}.

4. Montrer que : $\forall n \geq 3,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$. Calculer ℓ.

5. Déterminer la probabilité de ne jamais avoir la séquence PPF et commenter.