12 - topologie

Cours : Soit E un evn. $U \subset E$ est un ouvert si :
$\forall x \in U, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, B(x,r) \subset U$.

Exercice 1) • N est à valeurs positives

• Séparation. Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ tq $N(P) = 0$

Donc : $\forall j \in [\![0,n]\!], 0 \leq |a_j| \leq N(P) = 0$ donc :
$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $a_j = 0$ puis $P = 0$.

• Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
$N(\lambda P) = \max_{0 \leq i \leq n} |\lambda a_i| = \max_{0 \leq i \leq n} \overbrace{|\lambda|}^{\geq 0} \times |a_i| = |\lambda| \max_{0 \leq i \leq n} |a_i| = |\lambda| N(P)$.

• Inégalité triangulaire Soit $Q = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$, on prend $n = \max(d^\circ P, d^\circ Q)$ (quitte à rajouter des coefficients nuls). On a :
$P + Q = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i$. On a :
$\forall j \in [\![0,n]\!], |a_j + b_j| \leq |a_j| + |b_j| \leq N(P) + N(Q)$.
Donc $N(P) + N(Q)$ majore $\{|a_j + b_j|, 0 \leq j \leq n\}$ donc
$N(P+Q) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j + b_j| \leq N(P) + N(Q)$.

2) 1er cas : $|a| < 1$. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a :
$|\phi(a)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \cancel{X}^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \times |a|^k \leq \sum_{k=0}^{n} N(P) \cdot |a|^k$
$\leq N(P) \sum_{k=0}^{n} |a|^k \leq N(P) \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} |a|^k}_{\text{CV car } |a|<1} = N(P) \times \frac{1}{1-|a|}$

ϕ est linéaire et : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $|\phi(a)| \leq \frac{N(P)}{1-|a|}$,
donc ϕ est continue.

2e cas : $|a| > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = X^n$.
On a $N(P_n) = 1$ et $\phi(P_n) = |a|^n$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{|\phi(P_n)|}{N(P_n)} = |a|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$
donc $\left\{\frac{|\phi(P)|}{N(P)}, P \in \mathbb{R}[X] - \{0\}\right\}$ n'est pas bornée,
donc ϕ n'est pas continue.

3e cas : $a = 1$
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_n = 1 + X + \dots + X^n$
On a $N(P_n) = 1$ et $\phi(P_n) = n+1$
De même $\frac{|\phi(P_n)|}{N(P_n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc ϕ n'est pas continue.

4e cas : $a = -1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose
$P_n = 1 - X + X^2 + \dots + (-1)^n X^n$
On a $N(P_n) = 1$ et $\phi(P_n) = n+1$, on conclut comme avant sur le fait que ϕ n'est pas continue.