

Séance du 22/05 : Algèbre linéaire

Ex 1 : [Mines] Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

- $u^2 = 0$ et il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $u \circ v + v \circ u = id_E$;
- $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$.

Ex 2 : [Mines] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^2 = A$ si et seulement si $\text{rg}(A) \leq \text{tr}(A)$ et $\text{rg}(I_n - A) \leq \text{tr}(I_n - A)$.

Ex 3 : [Mines] Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $P = X^2 + aX + b$. On suppose que P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et $P(u) = 0$.

1. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $F_x = \text{vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u .
2. Soient F un sous-espace vectoriel stable par u et $x \in E \setminus F$. Montrer que $F \cap F_x = \{0\}$.
3. Montrer que u est diagonalisable par blocs identiques de taille 2×2 .

Ex 4 : [Mines] Donner une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables.

Ex 5 : [Mines] Soit σ une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $p(M) = M'$, avec : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m'_{i,j} = m_{i,j}$ si $i = \sigma(j)$ et $m'_{i,j} = 0$ sinon.

1. Montrer que p est un projecteur. Déterminer son noyau et son image.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle. On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les applications $\phi : M \mapsto \sum_{k=1}^n m_{\sigma(k),k}$ et

$$u_A : M \mapsto \phi(M)A + \phi(A)M.$$

2. Montrer que u_A est diagonalisable si et seulement si $\phi(A) \neq 0$.
3. u_A peut-il être un projecteur ?

Ex 6 : [Mines] Soit $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $\forall i, j, k, l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $M_{i,j}M_{k,l} = \delta_{j,k}M_{i,l}$.

1. Montrer que $\text{Im}(M_{i,j})$ est indépendante de j . On la notera F_i .

2. Montrer que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.

3. En déduire $\dim(F_i)$.

4. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $M_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$, avec $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5. Expliciter les automorphismes d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (morphismes d'algèbre bijectifs).

Ex 7 : [Mines] Soit G un groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$

1. On suppose que : $\sum_{g \in G} \text{tr}(g) = 0$. Montrer que : $\sum_{g \in G} g = 0$.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n stable par tous les éléments de G . Montrer que V admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G .

Séance du 23/05 : Intégration

Ex 8 : [Mines] Convergence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$

Ex 9 : [Centrale] Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \int_0^{+\infty} f^2 < +\infty\}$. Soit $f \in E$ et on pose

$\|f\| = \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}$ et on définit l'application Tf , par $Tf(0) = f(0)$ et $Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f$, pour $x > 0$.

1. (a) Rappeler le théorème concernant la dérivabilité des fonctions $x \mapsto \int_a^x f$.
(b) Montrer que Tf est continue sur \mathbb{R}_+ .
(c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (Tf(x))^2 \leq \frac{1}{x} \int_0^x f^2(t)dt$.
 2. Soit $A > 0$. Montrer que : $\int_0^A (Tf(x))^2 dx \leq 2 \int_0^A \frac{f(x)}{x} \left(\int_0^x f\right) dx$.
En déduire que Tf est dans E et que $\|Tf\| \leq 2\|f\|$ (*).
 3. Montrer que la constante 2 est optimale dans l'inégalité (*) (on pourra considérer les fonctions $f_a : t \mapsto t^{-a}$).
-

Ex 10 : [Mines] Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}\right) - 1\right) dx$.

Ex 11 : [Mines]

1. Soient f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose f de signe constant. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = g(c) \int_a^b f(t)dt$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que f admet la limite $\lambda \in \mathbb{R}$ et 0 et telle qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ telle que la fonction $t \mapsto \frac{f(t) - \mu}{t}$ est d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$. Montrer que pour tout $0 < a < b$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ existe et la calculer.

Ex 12 : [Mines] Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ telle que f' est bornée et $\int_0^{+\infty} f$ converge.

Montrer que : $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$.

Ex 13 : [Mines]

1. Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$.
 2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
 3. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
 4. Donner une expression de f' , puis de f .
 5. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
-

Ex 14 : [Mines] Soient $C, d \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^d e^{-tx^2} (C + x^2)^\alpha dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi} C^\alpha}{2\sqrt{t}}$.

Séance du 27/05 : Algèbre générale

Ex 15 : [Centrale] Soient p un nombre premier tel que $p \equiv 3[4]$ et $C = \{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, x = y^2\}$.

1. Rappeler l'énoncé du petit théorème de Fermat. Montrer que : $-1 \notin C$.

On pose $\pi_x = \prod_{y \in C \setminus \{x\}} (x + y)$ et pour $x \in C \setminus \{0\}$ et $\pi = \prod_{\substack{x, y \in C \\ x \neq y}} (x + y)$.

2. Déterminer le cardinal de C .
 3. Montrer que : $\forall x \in C \setminus \{0\}, \pi_x = \pi_1$.
 4. Calculer π .
-

Ex 16 : [Centrale] On pose $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = 2^n - 1$ et $s_n = u^{2^n} + v^{2^n}$.

1. Montrer que si M_n est premier, alors n est premier.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = s_n^2 - 2$. Qu'en déduire sur la suite (s_n) ?
3. Soit q un nombre premier. On munit l'ensemble $B = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ des deux lois de composition interne définies par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y) \cdot (x', y') = (xx' + 3yy', xy' + x'y).$$

- (a) Montrer que les deux lois précédentes munissent B d'une structure d'anneau commutatif fini.

(b) On note $A = \mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$. Montrer que l'application $\pi : \begin{cases} A & \rightarrow B \\ a + \sqrt{3}b & \mapsto (\bar{a}, \bar{b}) \end{cases}$ est bien défini et est un morphisme surjectifs d'anneaux.

4. On suppose n premier. Montrer que si M_n divise s_{n-2} , alors M_n est premier.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde en considérant le plus petit facteur premier q de M_n et déterminer l'ordre de $(\bar{2}, \bar{1})$ dans le groupe des éléments inversibles de l'anneau B .

Ex 17 : [Mines] Soit A un anneau commutatif. Si I est un idéal de A , on note $R(I) = \{x \in A, \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$.

1. Montrer que $R(I)$ est un idéal de A contenant I .
2. Soient I et J deux idéaux de A . Montrer que $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)$ et $R(I) + R(J) \subset R(I + J)$.
3. Dans cette question, $A = \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des entiers naturels n non nuls tels que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls dont la décomposition en facteurs premiers ne comporte aucun facteur premier d'exposant un moins égal à deux.

Ex 18 : [Mines] Soit $A = \{n \in \mathbb{N}, 2^n + 1 \equiv 0[n]\}$.

1. Montrer que 3 est l'unique nombre premier appartenant à A .
2. Montrer que A contient toutes les puissances entières de 3.

Ex 19 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que $(X-1)^k | P$. On note $\mu(P)$ le nombre de coefficients non nuls de P . On veut montrer que $\mu(P) \geq k+1$. On raisonne par l'absurde et on pose $A = \{i \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_i \neq 0\}$.

1. Soit $P_0 = 1$ et $P_s = \prod_{j=0}^{s-1} (X-j)$, pour $s \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall s \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, P^{(s)}(1) = \sum_{i \in A} a_i P_s(i)$.
2. En déduire que : $\forall i \in A, a_i = 0$. Conclure.
3. L'inégalité démontrée est-elle optimale ?

Ex 20 : [Mines] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n , avec $n \geq 2$ et ayant n racines réelles distinctes et non nulles $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Calculer $\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(a_i)}$ et $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i P'(a_i)}$.

Ex 21 : [Mines] Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et B sont inversibles et préciser le sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par A et B .
2. Dans le cas $n = 3$, préciser les matrices de G qui sont diagonalisables.

Ex 22 : [Centrale] On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_n \in \mathbb{N}^*$.
 2. Calculer $\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$.
 3. Donner tous les entiers tels que C_n soit pair. En déduire tous les entiers tels que C_n soit impair.
-

Ex 23 : [Centrale] On note d_n le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sans points fixes que l'on appellera dérangement.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$.
(b) Montrer que la série $\sum \frac{d_n}{n!} t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
On note $D(t)$ la somme de cette série.
(c) Calculer $e^t D(t)$.
(d) En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.
(e) Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la probabilité p_n qu'un élément de \mathcal{S}_n soit un dérangement.
 2. (a) Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on note $s_n(p)$ le nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, p \rrbracket$. Montrer que $p^n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} s_n(k)$.
(b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $\left(s_n(p) \frac{x^p y^n}{p! n!} \right)_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. On note $S(x, y)$ sa somme.
(c) Calculer $e^x S(x, y)$.
(d) En déduire la valeur de $s_n(p)$ dans le cas $n = p$, puis dans le cas général.
-

Ex 24 : [Mines] Soit $p \in]0, 1[$. Dans un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n , on tire S jetons où S est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et p . Quelle est la probabilité d'obtenir des jetons de numéros consécutifs.

Ex 25 : [Mines] On considère une urne remplie avec des boules numérotées de 1 à $2n$. On procède à une suite de tirages sans remise.

1. Calculer la probabilité que les boules impaires soient tirées exactement dans l'ordre 1, 3, ..., $2n-1$.
 2. Soit X la variable correspondant au nombre de tirages nécessaires pour obtenir toutes les boules impaires. Déterminer la loi et l'espérance de X .
-

Ex 26 : [Mines] On tire au hasard un élément A de $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Calculer la probabilité que $\text{card}(A)$ soit un entier pair.

Ex 27 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur \mathcal{S}_n . Pour $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $X_m = \min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(k) \geq m\}$ et $Y_m = \max\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(k) \geq m\}$. Calculer la loi de X_m et Y_m et leur espérance.

Ex 28 : [Mines] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi uniforme sur $\{-1, 2\}$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $A_n = (\exists k \geq 0, S_k = -n)$ et $p_n = P(A_n)$.

1. Exprimer $P(\exists k > 0, S_k = 0)$ en fonction de p_{-1} et p_2 .
2. Trouver une relation entre p_{n+2}, p_n et p_{n-1} .
3. En déduire la valeur de p_n .

Séance du 30/5 : Matrices et déterminant

Ex 29 : [Centrale]

1. Rappeler la formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. En déduire, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une relation entre $\text{Com}(A)$, A et $\det(A)$.
 2. Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n}$ définie par $a_{i,i} = 2$, pour i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $a_{i,j} = -1$ si $|i - j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. Calculer $\det(A)$.
 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres sont négatifs et tels que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} > 0$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 - (a) Montrer que A est inversible.
 - (b) Montrer que les coefficients de A^{-1} sont positifs.
-

Ex 30 : [Centrale]

1. Rappeler la définition de l'indicatrice d'Euler et exprimer $\varphi(n)$ en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n .
 2. Pour $n \geq 2$, calculer $\sum_{d|n} \varphi(d)$.
 3. En déduire le déterminant de $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n}$, avec $a_{i,j} = i \wedge j$.
-

Ex 31 : [Centrale] On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que toute matrice est trigonalisable sur \mathbb{C} .

2. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ et $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Montrer qu'il existe un polynôme f tel que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(\alpha_i)^2 = \alpha_i$. En déduire que $f(D)^2 = D$.

On considère la suite (c_k) définie par $c_0 = 1$ et pour $k \in \mathbb{N} : c_{k+1} = \sum_{i=0}^k c_i c_{k-i}$ et le polynôme

$$\phi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^{k+1}.$$

3. Déterminer le reste de la division euclidienne de ϕ par X^{n+1} .
4. Trouver un polynôme g tel que, pour toute matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on ait : $g(N)^2 = I_n + N$.
5. Soit A une matrice inversible. Montrer qu'il existe $R \in \{P(A), P \in \mathbb{C}[X]\}$ tel que $R^2 = A$.

Ex 32 : [Mines] Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq 2n}$ telle que $a_{i,i} = a$ et $a_{i, 2n-i+1} = b$, pour $1 \leq i \leq 2n$ et les autres coefficients sont nuls.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.
2. À quelle condition A est-elle inversible ?
3. Calculer A^k , pour $k \in \mathbb{N}$.

Ex 33 : [Mines] Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$.
2. Lorsque $\det(A) \neq 0$, étudier le cas d'égalité.

Ex 34 : [Mines] Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et $f : M \mapsto PM - MP$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Calculer sa trace.

Ex 35 : [Mines]

1. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $CD = DC$. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.
2. Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :
 - i. λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 0 & A^{-1}C \\ I_n & A^{-1}B \end{pmatrix}$;
 - ii. il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que la fonction $t \mapsto e^{\lambda t} x$ soit solution de $Ay'' - By' - Cy = 0$.

Ex 36 : [Mines] Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - (-1)^n}$?

Ex 37 : [Mines] Quelles sont les fonctions de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} qui sont limite uniforme sur \mathbb{R}_+ d'une suite d'applications polynomiales réelles ?

Ex 38 : [Centrale] Soient $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\beta \in]1, +\infty[$. Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\alpha^n t)}{\beta^n}$.

1. Montrer que f est définie et continue. Si $\alpha < \beta$, montrer que f dérivable.
 2. On suppose $\alpha \geq \beta$. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
-

Ex 39 : [Centrale] Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ croissante telle que : $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{x}$, avec $a > 0$.

1. Citer le théorème d'intégration des relations de comparaison, puis trouver un équivalent de $\ln(f(x))$ quand x tend vers $+\infty$.
 2. Donner le domaine de définition de $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)e^{-nx}$. Déterminer les limites de u aux bornes de son domaine de définition.
 3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{C}{x} f(1/x)$.
-

Ex 40 : [Mines] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.
 2. Dans ce cas, montrer que $\sum n(u_{n+1} - u_n)$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} n(u_{n+1} - u_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
 3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
-

Ex 41 : [Mines] Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs.

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \exp(-\lambda_n x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .

On suppose dans le suite que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$

2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge et la calculer.

3. Traiter le cas particulier où $\lambda_n = n + 1$.

Ex 42 : [Mines] On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \ln(1 + xe^{-t}) dt$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter son développement.

Séance du 05/06 : Réduction

Ex 43 : [Mines] Soient $a_1 < \dots < a_n$ des réels et $M = \begin{pmatrix} a_1 + 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 + 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a_n + 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M .
 2. Montrer que M est diagonalisable et que ses espaces propres sont des droites.
-

Ex 44 : [Mines] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec B diagonalisable. On suppose que $AB^3 = B^3A$. Montrer que A et B commutent. Pour quels p , peut-on généraliser le résultat avec $AB^p = B^pA$?

Ex 45 : [Mines] On note \mathbb{B} l'ensemble des suites bornées de $(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}}$.

On s'intéresse à l'endomorphisme T de \mathbb{B} qui à $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ associe $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T .
2. Soit $S \subset \mathbb{B}$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{B} de dimension finie stable par T . On note \tilde{T} l'endomorphisme induit par T sur S . Montrer que l'on dispose de $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ distincts tels que

$$S = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(\tilde{T} - \lambda_i \text{Id}_S).$$

Ex 46 : [Mines] Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de f tel que 0 soit racine simple de P . Montrer que :
 $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

On suppose dans la suite que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $fg = 0$. Montrer que f et g sont cotrigonalisables.
 3. Soient $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent entre eux. Montrer que f_1, \dots, f_p sont cotrigonalisables.
 4. Soient $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents qui commutent. Calculer $f_1 \circ \dots \circ f_n$.
-

Ex 47 : [Mines] Soit u un endomorphisme diagonalisable de \mathbb{C}^n . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- i. u admet n valeurs propres distinctes ;
 - ii. la famille $(id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre ;
 - iii. il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit libre.
-

Ex 48 : [Mines]

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.
 2. Soient A, B, C diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$. Montrer que $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont semblables.
-

Ex 49 : [Mines]

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si e^A l'est. Que se passe-t-il sur \mathbb{R} ?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $e^M = A$ admette une solution $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Séance du 06/06 : Séries entières, dérivation

Ex 50 : [Centrale] On considère la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1} (t - k) dt$ et $a_0 = 1$.

1. Montrer que le rayon de convergence R est au moins égal à un.
 2. Calculer $S(x)$, pour $|x| < 1$, puis montrer que $R = 1$.
 3. Déterminer un équivalent de a_n .
-

Ex 51 : [Mines] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right)$. Déterminer un équivalent de u_n .

Ex 52 : [Centrale] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trois fois dérivable telle que $ff^{(3)} = 0$.

1. Montrer que, si f' est strictement monotone sur un intervalle I , alors f prend une même valeur au plus deux fois sur I .
2. On pose $\Gamma = \{x \in I, f''(x) = 0\}$. Montrer que, si Γ est non vide, alors Γ n'est ni majoré, ni minoré.
3. Montrer que Γ est un intervalle et en déduire f .

Ex 53 : [Mines] Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $f(0) = 0$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = e^{-1/x^2}$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
 2. La fonction f est-elle solution sur \mathbb{R} d'une équation différentielle linéaire homogène normalisée à coefficients continus ?
-

Ex 54 : [Centrale]

1. Montrer le théorème d'intégration des séries uniformément convergentes sur un segment.
 2. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on pose
$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$
 On considère la même définition si f est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On note pour $r > 0$, $\gamma_r : t \in [0, 2\pi] \rightarrow re^{it}$.
Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$. Montrer que $f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz$.
 3. En déduire, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour r assez grand (à préciser), l'égalité
$$\exp(M) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} e^z (zI_n - M)^{-1} dz.$$
-

Ex 55 : [Centrale]

1. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et X_x une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre x . Calculer $\mathbf{E}(X_x)$, puis montrer que pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $P(|X_x - \mathbf{E}(X_x)| \geq \varepsilon x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$, quand x tend vers $+\infty$.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n!} x^n$.

2. Déterminer le domaine de définition de u_α .
 3. Déterminer u_1 et u_2 .
 4. Montrer que pour tout $\alpha < 0$, on a : $u_\alpha(x) = o(e^x)$, quand x tend vers $+\infty$.
 5. Montrer que pour tout $\alpha \in]-1, 0[$, on a : $u_\alpha(x) \sim x^\alpha e^x$, quand x tend vers $+\infty$.
-

Ex 56 : [Centrale] Soit $f : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \sin(nx) e^{-n^\alpha}$, avec $0 < \alpha$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Est-elle décomposable en série entière au voisinage de 0 ?

Séance du 10/06 : Espaces euclidiens et préhilbertiens

Ex 57 : [Centrale] Pour $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(S) \leq \lambda_2(S) \leq \dots \leq \lambda_n(S)$ le spectre ordonné de S . On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire canoniquement noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note S^{n-1} la sphère unité.

1. Montrer que, si S est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda_1(S) = \min\{\langle Sx, x \rangle, x \in S^{n-1}\}$.
 2. Soit $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et on note \mathcal{V}_d l'ensemble des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimension d .
Montrer que pour k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a :
$$\lambda_k(S) = \min_{V \in \mathcal{V}_k} \max\{\langle Sx, x \rangle, x \in V \cap S^{n-1}\} = \max_{V \in \mathcal{V}_{n-k+1}} \min\{\langle Sx, x \rangle, x \in V \cap S^{n-1}\}.$$
 3. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i+j \leq n+1$ et $S, S' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, montrer que : $\lambda_{i+j-1}(S) \geq \lambda_i(S) + \lambda_j(S)$.
-

Ex 58 : [Mines] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_0^{+\infty} e^{-x}(P(x) + x^n)^2 dx \geq (n!)^2$.

Ex 59 : [Mines] Soit E un espace euclidien.

1. Trouver les endomorphismes f tels que : $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$.
 2. Pour un tel f , discuter de la nature de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k$.
-

Ex 60 : [Mines] Soit E un espace euclidien de dimension 4. Trouver les $f \in \mathcal{L}(E)$ non nuls tels que $tr(f) = 0, f + f^4 = 0$ et $f^* = -f^2$.

Ex 61 : [Mines] Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E), u^* = -u\}$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'ensemble $T = \{tr(uv), v \in \mathcal{O}(E)\}$ est majoré.
 2. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tu) \in \mathcal{O}(E)$.
 3. On suppose que $\sup(T)$ est atteint en $v = Id_E$. Montrer que u est dans $S^+(E)$.
 4. Étudier la réciproque.
-

Ex 62 : [Mines] On munit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ et on note $\| \cdot \|_2$ la norme associée. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall f \in F, \|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$.

1. Montrer que $F \neq E$.
2. Soit (f_1, \dots, f_n) une famille orthonormale de F . Montrer que :

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \left| \sum_{i=1}^n a_i f_i \right| \leq C \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

3. En déduire que F est de dimension finie majorée par C^2 .
-

Ex 63 : [Mines]

1. Montrer que $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(M) = 1\}$ est un fermé non compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
3. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

4. En déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(M) > 0\}$ sont connexes par arcs.

Séance du 12/06 : Équations différentielles, calcul différentiel, fonctions vectorielles

Ex 64 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Trouver les fonctions $y \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ solutions de $\sum_{k=0}^n y^{(k)} \omega^{n-k} = 0$.

Ex 65 : [Mines] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note (S) le système différentielle :

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_p^{(m)}(t) = \sum_{q=1}^n a_{p,q} x_q(t).$$

Montrer que A est nilpotente si et seulement si toutes les solutions de (S) sont polynomiales.

Ex 66 : [Mines]

1. Soient $A \in \mathbb{R}_+$ et $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continues. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)dt. \text{ Montrer que : } \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq A \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right).$$

Soit $(*)$ l'équation différentielle $x''(t) + a(t)x'(t) = b(t)$, avec a et b continues sur \mathbb{R}_+ et telles que b et $t \mapsto ta(t)$ soient intégrables sur \mathbb{R}_+ . Soit x solution de $(*)$

2. Montrer que : $\forall t \in [1, +\infty[$, $x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \int_1^t (t-u)a(u)x(u)du + \int_1^t (t-u)b(u)du$.

3. On pose, pour $t \geq 1$, $y(t) = \frac{|x(t)|}{t}$. Montrer l'existence de K tel que :

$$\forall t \in [1, +\infty[, y(t) \leq K \exp\left(\int_1^t u|a(u)|du\right) \leq K \exp\left(\int_1^{+\infty} u|a(u)|du\right).$$

Ex 67 : [Mines] On considère l'équation différentielle $y'' - y = |\cos(x)|$. Existe-t-il des solutions positives ? Bornées ? Positives et bornées ?

Ex 68 : [Mines] Soit $K \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions $f :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 solutions de l'équation : $x \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) - y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = K f(x, y)$.

Ex 69 : [Mines] Pour $x = (x_0, \dots, x_n)$ et $y = (y_0, \dots, y_n)$ dans \mathbb{R}^{n+1} on pose

$$f(x, y) = \left(\sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j=k}} x_i y_j \right)_{k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket} \in \mathbb{R}^{2n+1}.$$

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nuls. Montrer que $f(x, y)$ est non nul.
 2. Soient u et v les applications de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dans \mathbb{R}^{2n+1} définies par $u : x \mapsto f(x, x)$ et $v : x \mapsto \frac{f(x, x)}{\|f(x, x)\|}$ où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^{2n+1} . Calculer les différentielles de u et v .
 3. Soit $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul. Calculer $\text{rg}(dv(x))$.
-

Ex 70 : [Mines] Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne canonique.

On pose $f : M \in E \mapsto \|M\|^2 = \text{tr}(M^T M)$ et $g : M \in E \mapsto \det(M) - 1$. On note h la restriction de f à $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in E, \det(M) = 1\}$.

1. Justifier que f et g sont de classe \mathcal{C}^1 et calculer leur gradient en une matrice $M \in SL_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f admet un minimum sur $SL_n(\mathbb{R})$. Soit M_0 une matrice où il est atteint.
3. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale au gradient de g en M_0 . Montrer qu'il existe un chemin γ de classe \mathcal{C}^1 défini sur un voisinage de 0, à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = H$.
4. Montrer que $(\nabla f(M_0))^\perp = (\nabla g(M_0))^\perp$.
5. Calculer le minimum de h sur $SL_n(\mathbb{R})$.

Séance du 13/06 : Variables aléatoires

Ex 71 : [Mines] Une puce se trouve sur l'origine de \mathbb{Z}^2 . À chaque étape, elle saute aléatoirement dans l'une des quatre directions. On note X_n l'abscisse de la puce à l'étape n . Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_n^2)$.

Ex 72 : [Mines] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer l'existence de α dans \mathbb{R}_+^* que l'on déterminera tel que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{1}{\ln(n)} \max_{1 \leq k \leq n} X_k - \alpha \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Ex 73 : [Centrale]

1. Rappeler la formule des probabilités totales et composées.

On fixe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[[1, d]]$. Soit $N_d = \inf\{n \geq 2, U_n \in \inf\{U_1, \dots, U_n\}\}$.

2. Quelles sont les valeurs prises par N_d ?
 3. Montrer que $P(N_d > k) = \frac{d!}{d^k (d-k)!}$, pour $k \in [[0, d]]$.
 4. Pour tout réel $x > 0$, calculer $\lim_{d \rightarrow +\infty} P \left(\frac{N_d}{\sqrt{d}} > x \right)$.
-

Ex 74 : [Mines] On suppose que lorsqu'un enfant naît, il a une chance sur deux d'être une fille. Dans une famille donnée, le nombre d'enfants est la variable aléatoire Z et le nombre de fille est X .

1. Montrer que : $\forall t \in [0, 1], G_X(t) = G_Z\left(\frac{1+t}{2}\right)$.
2. Expliciter la loi de X si Z suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Ex 75 : [Mines] Soit $g : t \mapsto \frac{e^t}{(1+e) - t}$.

1. Montrer que g est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}
2. Soit $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X . Déterminer la

probabilité que $M = \begin{pmatrix} 0 & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ait un nombre fini de sous-espaces stables.

Ex 76 : [Mines] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$ d'espérance $E(X) = m$.

1. Montrer que $V(X) \leq (m-a)(b-m)$.
2. Montrer que cette inégalité est optimale.

Ex 77 : [Mines]

1. Soit (X_1, \dots, X_n) une famille i.i.d. de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On note $S = \sum_{k=1}^n X_k$.

Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, E(e^{tS}) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2}\right)$.

En déduire que : $\forall a \in \mathbb{R}_+, P(|S| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$.

2. Généraliser au cas où les X_k sont des variables aléatoires discrètes i.i.d., à valeurs dans $[-1, 1]$ centrées.

Séance du 17/06 : Espaces vectoriels normés, suites, fonctions usuelles

Ex 78 : [Centrale] Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soit $d \in \mathbb{N}$.

Pour $P = p_0 + p_1X + \dots + p_dX^d \in \mathbb{R}_d[X]$, on pose $\|P\| = \max(|p_0|, \dots, |p_d|)$.

1. Vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.
2. (a) Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E , convergeant vers $\ell \in E$. Montrer que l'ensemble $Y = \{y_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.
 (b) Soit $f : E \rightarrow E'$ continue telle que pour tout compact K de E' , $f^{-1}(K)$ est un compact de E . Montrer que si F est un fermé de E , alors $f(F)$ est un fermé de E' .
3. Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ est une racine de P telle que $|x| > 1$, alors : $|x| \leq \|P\| + 1$.

4. En déduire que l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de $\mathbb{R}_d[X]$ est fermé dans $\mathbb{R}_d[X]$.

Ex 79 : [Centrale]

- Rappeler la règle de d'Alembert pour une série à termes positifs.
 - On considère une suite croissante $(q_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
 - Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{q_1 \dots q_n}$?
 - Montrer que si la suite (q_n) est stationnaire, alors le réel $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 \dots q_n}$ est dans $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
 - On admet réciproquement que si (q_n) tend vers $+\infty$, alors : $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que les réels e , $\text{ch}(\sqrt{2})$ et $e^{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.
 - Montrer la réciproque admise ci-dessus.
-

Ex 80 : [Mines] Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

- Montrer que : $\forall x \in E, \exists y \in F, d(x, F) = \|y - x\|$.
 - On suppose $F \neq E$. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.
 - En déduire que $\overline{B}(0, 1)$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.
-

Ex 81 : [Mines] On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \cdot \|_{\infty}$. Pour $f \in E$, on pose

$$u(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k f\left(\frac{1}{k}\right).$$

- Montrer que u est bien définie sur E .
 - Montrer que u est continue sur E et déterminer sa norme subordonnée.
-

Ex 82 : [Mines] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image de tout ouvert par f est un ouvert.

Ex 83 : [Mines] On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, pour $A \in E$, $\|A\| = \sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$.

- Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme d'algèbre.
 - Soit $E \in A$. Étudier la convergence de la série $\sum A^k$, si $\|A\| < 1$.
Cette condition est-elle nécessaire pour que la série soit convergente ?
 - Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_k = \left(I_n + \frac{A}{k}\right)^k$. Étudier la convergence et la limite de la suite (U_k) .
-

Ex 84 : [Mines] Pour $n \geq 2$, on considère l'équation $\sin(x) = \frac{x}{n}$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution sur $]0, \pi[$ que l'on notera x_n .
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ converge. Quelle est sa limite ?
3. Donner un développement asymptotique de (x_n) à la précision $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.