

11-Variables aléatoires

Ex 1 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires défini sur cet espace Montrer que $A = \{\omega \in \Omega / \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = 0\}$ est un événement.

Ex 2 : On dispose de n aimants identiques que l'on met côte à côte. Suivant la polarité cela conduit des aimants à se regrouper en blocs. On considère que pour chaque aimant, il y a équiprobabilité entre les deux dispositions possibles. Déterminer le nombre moyen de blocs.

Ex 3 : (*) On considère deux urnes contenant chacune n boules. On effectue des tirages sans remise en choisissant à chaque fois l'une des deux urnes de manière équiprobable. On s'arrête si l'urne choisie est vide. Soit Y_n le nombre de boules restant à ce moment dans l'autre urne. Donner la loi de Y_n et un équivalent de son espérance.

Ex 4 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d., suivant une loi $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$. Pour $n \geq 2$, on pose $A_n = \{X_1 < \dots < X_n\}$. Pour $(n, k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $n \geq 2$ et $k \geq 1$, on pose : $u_n = P(A_n)$, $B_{n,k} = A_n \cap \{X_1 = k\}$, $v_{n,k} = P(B_{n,k})$ et $\pi_l = \prod_{j=1}^l (1 - q^j)$.

1. Calculer u_2 . Montrer que pour $n \geq 3$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{n,k} = pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j}$.
2. Montrer que pour $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{n,k} = \frac{1}{\pi_{n-1}} (pq^{k-1})^n q^{\alpha_n}$, avec α_n un entier que l'on précisera.
3. En déduire que, pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{\pi_n} p^{\beta_n} q^{\gamma_n}$, avec β_n, γ_n des entiers que l'on précisera.

Ex 5 : Soit T une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, P(T > n) > 0$.

On appelle taux de panne associé à T la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $\theta_n = P(T = n | T \geq n)$.

1. Exprimer en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la probabilité $P(T \geq n)$. En déduire la divergence de la série $\sum \theta_n$.
2. Inversement, soit $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n \in [0, 1[$ et $\sum \theta_n$ diverge et $\theta_0 = 1$.
Montrer que la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T .

Ex 6 : Un gardien de phare possède un trousseau de 10 clés, dont une seule ouvre la porte du phare. Chaque jour, pour ouvrir la porte, il y a deux méthodes.

Méthode A : à jeun, il n'essaie qu'une fois chaque clé.

Méthode B : ivre, il oublie les clés déjà testées, et il peut essayer chaque clé plusieurs fois.

1. Déterminer, pour chaque méthode, la loi N du nombre d'essais pour ouvrir la porte ainsi que son espérance.
2. Le gardien est ivre un jour sur trois. Un jour, après avoir essayé 8 clés, il n'a toujours pas ouvert la porte. Quelle est la probabilité pour qu'il soit ivre ?

Ex 7 : Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq m$. On dispose de n cases numérotées de 1 à n , dans lesquelles on répartit aléatoirement m boules. Soit Δ la variable qui donne la différence entre le numéro maximal et minimal des cases non vides. Déterminer la loi et l'espérance de Δ .

Ex 8 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{G}(p)$ et $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ? Inversible ?
 2. Quelle est la probabilité qu'une valeur propre soit le double de l'autre ?
-

Ex 9 : Soit une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = 4P(X = n - 1)/n$. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance (si elles existent).

Ex 10 : Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 change d'état de la manière suivante :

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé.
- si à l'instant $t = n, n \geq 0$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n + 1$, et ceci de manière équiprobable.
- si à l'instant $t = n, n \geq 0$, le spot S_k ($2 \leq k \leq 4$) est allumé, alors le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot S_2 s'allume.

1. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n .
 2. Calculer la probabilité des événements $[X = 1]$ et $[X = 2]$, puis $[X = n]$, pour $n \geq 3$.
 3. Déterminer l'espérance de X .
-

Ex 11 : (*) 1. Soit (u_n) une suite à valeurs positives sous-additive : $\forall n, m \in \mathbb{N}, u_{n+m} \leq u_n + u_m$.

Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le réel $L = \inf \left\{ \frac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$.

2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Soit a un réel strictement positif tel que

$P(X_1 \geq a) > 0$. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n} \ln(P(S_n \geq na))\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Ex 12 : Soit une pièce ayant la probabilité $p \in]0, 1[$ de donner pile et on réalise l'expérience suivante :

- on lance la pièce autant de fois que nécessaire pour obtenir pile. Soit N le nombre de lancers effectués.
- on lance à nouveau la pièce N fois et on compte le nombre X de piles obtenus.

1. Quelle est la loi de N ?
 2. Quelle est la loi de X ?
 3. Calculer $E(X)$.
-

Ex 13 : (CCP 104) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules. Soit X le nombre de compartiments vides.

1. Préciser les valeurs prises par X .
2. a. Déterminer $P(X = 2)$.
b. Finir de déterminer la loi de probabilité de X .
3. a. Calculer $E(X)$.
b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Ex 14 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi $\mathcal{B}(p)$ et indépendantes. On pose $L_1 = \max\{k \in \mathbb{N}^*, X_1 = X_2 = \dots = X_k\}$ si cet ensemble est fini et $+\infty$ sinon.

1. Montrer que L_1 est presque sûrement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.
 2. Si $L_1 < +\infty$, soit $L_2 = \max\{l \in \mathbb{N}^*, X_{L_1+1} = X_{L_1+2} = \dots = X_{L_1+l}\}$ si cet ensemble est fini et $+\infty$ sinon. Montrer que L_2 est presque sûrement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.
-

Ex 15 : On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès $p \in]0, 1[$. On note X (respectivement Y), le rang du premier (respectivement du second) succès.

1. Soit $j \in \mathbb{N}$ avec $j \geq 2$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = j)$.
 2. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi conditionnelle de $Y - i$ sachant $(X = i)$.
-

Ex 16 : Soient $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit U et T des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé à valeurs respectivement dans $\mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et \mathbb{Z} , avec :

$$\forall (n, t) \in (\mathbb{N} \setminus \{0; 1\}) \times \mathbb{Z}, P((U, T) = (n, t)) = \begin{cases} p^2 q^{n-2} & \text{si } |t| \leq n - 2 \text{ et } n \text{ et } |t| \text{ de même parité} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Vérifier que
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{t=-n+2 \\ n \text{ et } |t| \text{ de même parité}}^{n-2}} p^2 q^{n-2} \right) = 1.$$

2. Déterminer la loi de U .

3. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{Z}, P(T = t) = \frac{pq^{|t|}}{1 + q}.$

4. Déterminer l'espérance de T .

5. Quelle est la loi de T sachant $(U = n)$, pour $n \geq 2$.

6. a. Montrer l'existence de $E(U)$ et $E(UT)$.

b. Calculer $cov(U, T)$. U et T sont-elles indépendantes ?

Ex 17 : Soient M et X deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que la loi de X sachant $(M = n)$ est uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Quelles sont les lois de X et $M - X$?
 2. On suppose que $E(M)$ existe. Montrer que $E(X)$ existe puis calculer $E(X)$.
 3. On suppose que $M + 1$ suit une loi $\mathcal{G}(p)$. Quelle est la loi de X ?
-

Ex 18 : X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} telles que : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$, avec $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soient $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. (**CCP 106**) Déterminer la loi du couple (U, V) .

2. (**CCP 106**) Déterminer la loi marginale U .

On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.

3. (**CCP 106**) Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire $E(V)$.

4. (**CCP 106**) U et V sont-elles indépendantes ?

5. Calculer $P(3X = 2Y)$, $V(4X - 5Y)$ et $E(2^{Y-X})$.

6. Déterminer la loi de $Z = |X - Y|$.

Ex 19 : (*CCP 108*) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} .

On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \frac{a}{2^{i+1}j!}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $a = 1/e$.
 2. Déterminer les lois marginales X et Y .
 3. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.
 4. Déterminer l'espérance et la variance de Y .
 5. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
 6. Calculer $P(X = Y)$.
-

Ex 20 : (*) Soient $(X_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi telles que : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X_{i,j} = 1) = P(X_{i,j} = -1) = 1/2$. On pose $A = [X_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n}$ et $D = \det(A)$. Déterminer $V(D)$.

Ex 21 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilitisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Si A est un événement non négligeable, on définit, sous réserve d'existence : $E(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x|A)$.

1. Montrer que si X admet une espérance finie, alors $E(X|A)$ est bien définie.
2. Si X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, calculer $E(X|X > m)$, pour $m \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et si X est d'espérance finie, alors

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)E(X|A_k).$$

Ex 22 : [Modèle d'Ehrenfest] Dans cet exercice, l'unité de temps est choisie de sorte que les instants sont des nombres entiers. Deux compartiments étanches A et B renferment à l'instant 0 certaines quantités d'un même gaz, pas forcément égales. Une valve permet des échanges entre les deux compartiments, modélisés ainsi : à chaque instant, une molécule du gaz, choisie aléatoirement de façon uniforme, passe d'un compartiment à l'autre. On note $2N$ le nombre total de molécules, et X_n le nombre de molécules dans le compartiment A à l'instant n .

1. Pour $1 \leq k \leq 2N$, exprimer $P(X_{n+1} = k)$ en fonction de probabilités de la forme $P(X_n = j)$, avec j à préciser.
 2. En déduire : $E(X_{n+1}) = 1 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_n)$.
 3. En déduire $E(X_n)$. Quelle est la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$? Commenter.
-

Ex 23 : (*) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} suivant toutes la même loi. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $R_n = \text{card}\{X_k, 1 \leq k \leq n\}$.

1. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , majorée par un réel M .
Montrer que : $E(Y) \leq MP(Y \geq 1)$.
2. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{N}, E(R_n) \leq a + nP(X_1 \geq a)$.
3. Montrer que $E(R_n) = o(n)$ et si X_1 est d'espérance finie, $E(R_n) = O(\sqrt{n})$.
4. Montrer que $E(R_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n (X_i = k)\right)$.

Ex 24 : Dans un jardin de $n \geq 1$ tulipes (numérotées), chaque tulipe a une probabilité $p \in]0, 1[$ de fleurir à l'année k . Si une tulipe fleurit à l'année k , elle fleurira aussi les années suivantes. Soit X_i la variable qui compte le nombre d'années au bout desquelles la tulipe i est fleurie. On suppose l'indépendance des X_i . Soit X le nombre d'années au bout duquel tout le jardin est fleuri.

1. Déterminer la loi de chaque X_i . Exprimer X en fonction des X_i .
 2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > k)$ et en déduire la loi de X .
 3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
-

Ex 25 : (*) Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de (Ω, \mathcal{A}, P) . On suppose que $\sum P(E_n)$ converge.

1. Soit $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{E_n}$ ($Z = +\infty$ si la série diverge). Montrer que Z est une variable aléatoire discrète.
 2. Montrer que $P(Z = +\infty) = 0$.
 3. Montrer que Z est d'espérance finie.
-

Ex 26 : On considère des variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes identiquement distribuées selon une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, définies sur un espace probabilisé (Ω, P) .

On pose l'événement $A = \{ \omega \in \Omega, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge } \}$, avec α dans $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

1. Calculer $P(A)$ pour $\alpha > 1$.

On se place maintenant dans le cas $\alpha \in]0, 1[$ et on pose $\beta = 1 - \alpha$.

2. a. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)\right) \leq \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^\beta}$.

- b. Étudier la convergence de la série de terme général q^{n^β} et en déduire que : $P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)\right)$.

Soit $A_\beta = \{ \omega \in \Omega, X_n(\omega) > n^\beta \text{ est vraie pour un nombre fini d'entiers naturels } n \}$.

3. Montrer que $A_\beta = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} (X_n \leq n^\beta)$, puis que $P(A_\beta) = 1$.

4. a. Montrer que si ω est dans A_β , alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ diverge.

- b. Quelle est la probabilité de l'événement A ?
-

Ex 27 : Un joueur joue à pile ou face contre une banque avec une pièce non nécessairement équilibrée (p est la probabilité d'obtenir pile). Sa mise initiale est a (dans \mathbb{N}^*). Tant qu'il obtient face, il perd ce qu'il a misé et décide de miser au prochain coup k fois la mise précédente (avec $k > 1$). Quand il obtient pile, il gagne k fois sa dernière mise et s'arrête de jouer. Quel est son gain moyen ?

Ex 28 : (*) Une urne contient n boules identiques numérotées de 1 à n . On effectue des tirages. Après chaque tirage, on enlève les boules qui ont un numéro supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.

2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $E(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} E(X_k)$.

3. Déterminer un équivalent de $E(X_n)$.

Ex 29 : (*) Une chaîne de caractère ne comportant que les caractères **A, B** ou **C** est générée aléatoirement avec équiprobabilité. Soit T la variable aléatoire dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ donnant le nombre de tirages pour qu'apparaisse pour la première fois le motif « **ACBAC** » ($T = +\infty$ si le motif n'apparaît jamais). Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $f(n)$ le nombre de chaîne de caractères de longueur n et ne comportant pas le motif « **ACBAC** » et $g(n)$ le nombre de chaîne de caractères de longueur n et finissant par le motif « **ACBAC** » et ne comportant qu'une fois ce motif.

1. Montrer que presque sûrement, $T < +\infty$.
 2. Montrer que $f(n) = g(n + 2) + g(n + 5)$, pour $n \in \mathbb{N}$.
 3. En déduire $E(T)$.
-

Ex 30 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini inclus dans \mathbb{R} . On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}, E(X^k) = E(Y^k)$. Montrer que X et Y ont la même loi.

Ex 31 : Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$. $N = an$ clients qui s'approvisionnent chez n fournisseurs. Chaque client choisit un fournisseur au hasard. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i le nombre de clients du fournisseur i et Y le nombre de fournisseurs n'ayant aucun client.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_i .
 2. Que vaut $X_1 + \dots + X_n$? En déduire $E(X_i X_j)$ et $cov(X_i, X_j)$, pour $i \neq j$.
 3. Soit β_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement : « le fournisseur i n'a pas de clients ». Exprimer Y en fonction des β_i . Déterminer $E(Y)$.
 4. Calculer $cov(\beta_i, \beta_j)$, puis la variance de Y .
-

Ex 32 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* , telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$, avec $p \in]0, 1[$. On pose $Y = (-1)^X$.

1. Déterminer la loi de Y .
 2. Calculer $E(Y)$ et $E(XY)$.
-

Ex 33 : Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles à valeurs dans $\{-1; 1\}$ et suivant la même loi. Soit T une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 1. On suppose T, X_1, \dots, X_n mutuellement indépendantes.

1. Soit $V = \prod_{i=1}^T X_i$. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$, V^r est dans L^1 .
 2. Calculer l'espérance et la variance de V .
-

Ex 34 : Dans un bureau de poste, il entre en une journée un nombre X de clients qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Ils se répartissent ensuite de façon équiprobable et indépendante entre N guichets. Pour $1 \leq i \leq N$, on note Y_i le nombre de clients se présentant au guichet i .

1. Montrer que Y_i suit une loi de Poisson et préciser son espérance.
 2. Pour $i \neq j$, déterminer $cov(Y_i, Y_j)$ (examiner la loi de $Y_i + Y_j$).
-

Ex 35 : (*) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer que si X admet une variance, alors : $E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k + 1)P(X > k)$.

Ex 36 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p , avec : $0 < p < 1$. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose : $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.

1. Montrer par récurrence sur n que S_n est à valeurs dans $\mathbb{N} \cap [n, +\infty[$ et que :
$$\forall k \geq n, P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}.$$
 2. Déterminer la fonction génératrice de S_n .
 3. Déterminer l'espérance de S_n .
-

Ex 37 : Soit X une variable aléatoire discrète réelle. On note I_X l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels la quantité suivante existe : $M_X(t) = E(e^{tX})$.

1. Montrer que I_X est un intervalle contenant 0.
 2. On suppose que 0 est intérieur à l'intervalle I_X . Montrer que la variable X admet des moments à tout ordre et que sur un intervalle centré en 0 :
$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n.$$
 3. On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle $] -a, a[$. Montrer qu'elle y est de classe \mathcal{C}^∞ et qu'on a : $E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$.
 4. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer $M_X(t)$.
-

Ex 38 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} et de même loi. On suppose que la variable $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer $E(X)$.
 2. Calculer la fonction génératrice de X .
 3. Reconnaître la loi de X .
-

Ex 39 : Soit Z une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer la variance de $X = \mathbf{1}_{\{3|Z\}} \frac{Z}{3}$.

Ex 40 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . On pose $p_n = nP(X = n)$ et $r_n = P(X > n)$ et on note G la série génératrice de X .

1. Montrer que son rayon de convergence de $\sum r_n t^n$ est supérieur ou égal à 1.
 2. Pour $|t| < 1$, on pose : $H(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$. Montrer que :
$$H(t) = \frac{1 - G(t)}{1 - t}.$$
-

Ex 41 : Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes avec $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, q)$. Montrer que $X + Y$ suit une loi binomiale si et seulement si $p = q$.

Ex 42 : 1. Pour $a > 0$ développer $f(t) = \frac{t}{a - t^2}$ en série entière et donner le rayon de convergence.

2. Donner la loi de X , telle que $G_X(t) = \frac{t}{2 - t^2}$; donner son espérance et sa variance.

3. X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , telle que $P(X = n) > 0$, Y une autre variable aléatoire de même loi que X . On suppose X et Y indépendantes; $X + Y$ et $X - Y$ le sont-elles (on pourra s'intéresser à $P(X + Y = 1, X - Y = 0)$)? La réciproque est-elle vraie?

Ex 43 : (*) On munit \mathcal{S}_n de la probabilité uniforme. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on dit que $\sigma(i)$ est un maximum provisoire de σ si $\sigma(i) = \max(\sigma(1), \dots, \sigma(i))$. On désigne par X_n la variable aléatoire représentant le nombre de maximums provisoires des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note Z_k la variable indicatrice de l'événement « $\sigma(k)$ est un maximum provisoire ».

1. Déterminer les lois des Z_k .
 2. On admet que les variables Z_1, \dots, Z_n sont indépendantes.
 - a. Déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ (sous forme de somme) et un équivalent de ces quantités.
 - b. Déterminer la fonction génératrice G_{X_n} . En déduire $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$ et $P(X_n = n)$.
 3. Montrer que les variables aléatoires Z_1, \dots, Z_n sont indépendantes.
-

Ex 44 : Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes ayant un moment d'ordre 2 et centrées. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $S_i = X_1 + \dots + X_i$, $B_i = \{|S_1| < a\} \cap \dots \cap \{|S_{i-1}| < a\} \cap \{|S_i| \geq a\}$.

1. Montrer que pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les variables $S_i \mathbf{1}_{B_i}$ et $S_n - S_i$ sont indépendantes.
En déduire que : $E(S_n^2 \mathbf{1}_{B_i}) = E(S_i^2 \mathbf{1}_{B_i}) + E((S_n - S_i)^2 \mathbf{1}_{B_i}) \geq a^2 P(B_i)$.

2. On pose $C = \{\sup(|S_1|, |S_2|, \dots, |S_n|) \geq a\}$. Montrer que $P(C) = \sum_{i=1}^n P(B_i)$.

3. En déduire que $P(\sup(|S_1|, |S_2|, \dots, |S_n|) \geq a) \leq \frac{\sum_{i=1}^n V(X_i)}{a^2}$.
-

Ex 45 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{G}(1/n)$.

1. Montrer que : $P(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$.
 2. Montrer que : $P(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}$. En déduire que : $P(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.
-

Ex 46 :

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in]0, 1[$, X_n (respectivement Y_n) une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli (respectivement géométrique) de paramètre p_n . On suppose X_n et Y_n indépendantes et on pose $U_n = X_n - Y_n$

1. Calculer l'espérance et la variance de U_n
 2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(V(U_n))_n$ converge vers 0.
 3. Montrer que pour tout $a > 0$, $\lim P\{|U_n - 1| > a\} = 0$.
-

Ex 47 : (*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p_i telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = p$. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

Ex 48 : Un avion peut transporter 400 passagers. Un passager ayant réservé ne se présente pas avec probabilité de 8%. La compagnie a permis à 420 personnes de réserver, quel est son risque ?

Ex 49 : Montrer, en utilisant une variable aléatoire, l'inégalité $\frac{n-1}{n} 2^{4n} \leq \sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k}$.