

## 12-Régularité des intégrales dépendant d'un paramètre

**Ex 1** : On pose, pour  $x$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^3 + t}}$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
2. Donner le tableau de variations de  $f$ .
3. Calculer la limite de  $f$  en  $0^+$ .
4. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**Ex 2** : On pose :  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est définie, continue et décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. On pose :  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^x)} dt$ . Montrer que  $g(x) = \frac{\ln 2}{x}$ .
3. Calculer  $f(1)$ .
4. Montrer que  $g(x) - \frac{\ln 2}{2x+1} \leq f(x) \leq g(x)$ .
5. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et un équivalent de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

**Ex 3** : Pour  $t \in \mathbb{R}_+^*$  et  $z \in \mathbb{C}$ , on pose  $t^z = \exp(z \ln(t))$ . Soit  $f : z \mapsto \int_0^1 \frac{t^z}{1+t} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > -1\}$ .
2. Lier  $f(z)$  et  $f(z+1)$  et en déduire un développement asymptotique à deux termes de  $f(z)$  quand  $z$  tend vers  $-1$ .
3. Donner un équivalent de  $f(z)$  quand  $\operatorname{Re}(z)$  tend vers  $+\infty$ .

**Ex 4** : Soit  $f : x \mapsto \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}} dy$ .

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ; calculer  $f(0)$ .
2. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) dt$ . Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $f$  est solution de  $xy'' + y' + xy = 0$ .
4. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$ .

**Ex 5** :

1. Montrer que  $t \mapsto e^{-t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Soient  $f(x) = \left[ \int_0^x e^{-t^2} dt \right]^2$  et  $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$ .
  - a. Montrer que  $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$  et calculer leurs dérivées.
  - b. Simplifier  $f' + g'$ .
  - c. Calculer  $g(0)$  et  $\lim_{+\infty} g$ .
  - d. En déduire la valeur de  $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2} dt$ .

**Ex 6** : Soit  $F : t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-u^2+i)t^2}}{u^2-i} du$ .

1. Quel est l'ensemble de définition de  $F$  ?
  2. Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$ .
  3. Calculer  $F'$  sur son domaine de dérivabilité.
  4. De  $F(0)$ , déduire les valeurs de  $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$  et  $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ .
- 

**Ex 7** : Montrer qu'il existe un unique  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \ln(t)}{1+t^x} dt = 0$ .

---

**Ex 8** : On pose lorsque l'intégrale est définie  $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$ .

1. Donner le domaine de définition de  $f$ , étudier sa continuité et sa monotonie.
  2. Calculer  $f(x) + f(x+1)$ . En déduire un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .
- 

**Ex 9** : Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère  $f(\alpha) = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .

1. Montrer que l'intégrale converge si et seulement si  $\alpha > 0$ .
  2. Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  3. Montrer que  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ .
  4. Grâce à une intégration par parties, montrer que pour  $\alpha > 0$ ,  $f(\alpha+2) = \frac{\alpha}{\alpha+1} f(\alpha)$ .
  5. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $f(n)$  et exprimer le résultat à l'aide de factoriels.
  6. Donner un équivalent de  $f(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0.
- 

**Ex 10** : (\*) Soit  $F : a \mapsto \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(a^2-x^2)}}$ .

1. Montrer que  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  2. Déterminer  $\lim_{+\infty} F$  et  $\ell = \lim_{0+} F$ .
  3. Donner un équivalent en  $0^+$  de  $F - \ell$ .
- 

**Ex 11** : Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4 x^2}} dx$  ;
  2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+ixt)}$  ;
  3.  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \int_0^\pi \sin(a \sin(x)) dx$  ;
  4.  $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+ax+e^a x^2}} dx$  (s'aider du changement de variable  $x = \text{sh}(t)$ ).
- 

**Ex 12** : Soit  $x \in \mathbb{R}$  et on pose  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2} dt$ .

1. Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}$  de  $g$  et montrer que  $g$  est continue sur  $\mathcal{D}$ .
  2. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$  et déterminer  $g'$ .
  3. Que vaut  $g(0)$  ? En déduire  $g$ .
- 

**Ex 13** : Soit  $F$  la fonction définie par  $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt^2) e^{-t} dt$ .

1. Montrer que  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
3. Donner pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $F^{(k)}(0)$  puis donner, si possible, le développement en série entière de  $F$ .

**Ex 14** : Étudier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer à l'aide d'une dérivation par rapport au paramètre que l'on justifiera.

1. (\*)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$ ; 2.  $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t)) dt$ ; 3.  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \operatorname{sh} t}{t} dt$ ; 4.  $\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$ .

---

**Ex 15** : On pose  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} dt$  et  $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dt$ .

1. Montrer que  $G$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . On admet que  $F$  l'est aussi.
  2. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $G(x) = xG(1)$ .
  3. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq G(x) - F(x) \leq \frac{\pi}{2}$ . En déduire que  $F(x)$  est équivalente à  $xG(1)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
  4. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et que sa dérivée seconde est donnée par :  
 $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $F''(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{1+t^2} dt$ .
  5. Montrer que  $F$  est solution de l'équation différentielle  $y''(x) - 4y(x) = \pi - 4xG(1)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  6. En déduire une expression de  $F$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  puis sur  $\mathbb{R}$ .
- 

**Ex 16** : Soit  $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x+t|} \cos(x+t)}{\sqrt{|t|(1+|t|)}} dt$ .

1. Existence et continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  2. Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
- 

**Ex 17** : Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et on pose  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ .

1. Quel est la domaine de définition de  $I$  et déterminer  $I(0)$ .
  2. Déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha)$ .
  3. Étudier la parité de  $I$ .
  4. Calculer  $I(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$ .
- 

**Ex 18** : Soit  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2} dt$ . On admet que  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$ .

1. Déterminer  $\mathcal{D}_f$ .
  2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  3. Déterminer un équivalent de  $f'(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
  4. Calculer  $f(x) - f'(x)$ , puis donner un développement asymptotique à deux termes de  $f$  en  $+\infty$ .
- 

**Ex 19** : Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t^2)^n}$ .

1. Calculer  $I_1(x)$ .
  2. Montrer que  $I_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  3. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I'_n = -nI_{n+1}$ .
  4. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x) = 0$ .
  5. En déduire l'expression de  $I_n(x)$ .
- 

**Ex 20** : Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x \tan(t))}{\tan(t)} dt$ .

1. Pour  $x \geq 0$ , calculer  $g(x)$ .

2. Résoudre l'équation  $g(x) = \pi/2$ .

3. En déduire l'intégrale  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \cos(t)}{\sin(t)} dt$ .

4. Pour  $a > 0$  et  $b > 0$ , calculer  $H(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(au) \text{Arctan}(bu)}{u^2} du$ .

---

**Ex 21** : (\*) Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n \geq 2$ . On suppose par l'absurde que  $P$  ne possède pas de racines dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $F : r \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{r^n e^{in\theta}}{P(re^{i\theta})} d\theta$ .

1. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

2. Montrer que  $F$  est constante.

3. Conclure en regardant le comportement de  $F$  en 0 et  $+\infty$ .

---

**Ex 22** : Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{C}$  telle que pour tout  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{f(t)}{t+x}$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On pose  $\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x} dt$ , pour  $x > 0$ .

1. Montrer que  $\tilde{f}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x)$ .

3. On suppose  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$ . Trouver un équivalent de  $\tilde{f}$  en  $+\infty$  (en précisant une condition sur  $f$ ).

---

**Ex 23** : Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ ,  $t \mapsto t^k f(t)$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t) dt$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . On appelle  $g$  la transformée de Fourier de  $f$ .

2. On note  $\alpha_k = \int_{\mathbb{R}} |t^k f(t)| dt$  et on suppose que :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_k \leq k^k$ . Montrer que  $g$  est développable en série entière sur un intervalle  $] -A, A[$  à préciser.

3. Calculer  $g$  lorsque  $f = t \mapsto 1_{t \geq 0} e^{-at}$ , puis en déduire  $\int_{\mathbb{R}} f_n(t) e^{-itx} dt$  quand  $f_n : t \mapsto t^n 1_{t \geq 0} e^{-at}$ .

---

**Ex 24** : (\*) Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telle que  $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$  existe, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+^*$ .

1. On suppose que  $\int_0^{+\infty} f$  converge. Étudier alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} Lf(x)$ .

2. Si  $\lim_{x \rightarrow 0^+} Lf(x) = \ell \in \mathbb{R}$  et que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t f(t) = 0$ , montrer que  $\int_0^{+\infty} f$  converge.

3. On suppose que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $Lf(x) = 0$ . Montrer que  $f = 0$ .

---

**Ex 25** : (\*) Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $F(x) = \int_a^b f(t) e^{-itx} dt$ , avec  $a < 0 < b$ .

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ .

2. Montrer que  $F(x) = \frac{f(a)e^{-iax} - f(b)e^{-ibx}}{ix} + o_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right)$ .

3. Montrer la convergence de l'intégrale  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^2/2} dt$ .

4. Soit  $g(x) = \int_a^b f(t) e^{-ixt^2/2} dt$ . Montrer que :  $g(x) = \frac{I \cdot f(0)}{\sqrt{x}} + o_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ .

---

**Ex 26** : (\*) (Fubini) Soit  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Pour  $x \in [a, b]$ , on pose  $H(x) = \int_a^x \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$  et  $G(x) = \int_c^d \left( \int_a^x f(x, y) dx \right) dy$ . En dérivant  $H$  et  $G$ , montrer que :  $\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ .

---

**Ex 27** : (\*) Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$   $T$ -périodique. Montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) g(\lambda t) dt = \frac{1}{T} \left( \int_0^{+\infty} f \right) \left( \int_0^T g \right).$$