13-Espaces euclidiens

Ex 1 : On définit une application $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ par $\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})Q(\mathrm{e}^{-i\theta})\,\mathrm{d}\theta$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale pour ce produit scalaire.

Ex 2 : Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$. Préciser les cas d'égalité.

Ex 3 : Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit la fonction suivante : $\forall (f,g) \in E^2 : \quad < f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$

1. Montrer que cette fonction est un produit scalaire.
2. Soit $F = \{f \in E : \forall x \in [0,1] \quad f(x) = 0\}$. Calculer $F^\perp$.
3. Que vaut $F + F^\perp$.

Ex 4 : Soit E un espace préhilbertien et H une partie convexe et compacte de E. Soit $x \in E$.

1. Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $d(x,H) = \|x - h_0\|$. On pourra utiliser pour $h_0, h_1 \in H$ la fonction $q : t \mapsto \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2$.
2. Montrer que h_0 est caractérisé par la condition : $\forall h \in H,\ (x - h_0|h - h_0) \geq 0$ (on pourra utiliser $t \mapsto q(t)$).

Ex 5 : Soit E un espace préhilbertien. On dit qu'une suite (x_n) converge fortement vers x si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$ et converge faiblement vers x si : $\forall y \in E,\ \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - x|y) = 0$.

1. **a.** Montrer que si (x_n) converge faiblement, sa limite est unique.
   b. Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.
2. Montrer que (x_n) converge fortement vers x si et seulement si (x_n) converge faiblement vers x et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
3. Montrer qu'en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.

Ex 6 : (*) Soit $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :
$\forall i,j \in [\![1,p]\!],\ i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j\rangle < 0$. On pose $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| x_i$, avec $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$.

1. Comparer $\|x\|$ et $\|y\|$.
2. Montrer que si $x = 0$, alors les λ_i sont tous nuls ou tous non nuls.
3. Montrer que toute sous-famille à $p-1$ vecteurs des x_i est libre.
4. Donner un exemple d'une telle famille dans $\mathbb{R}^2$, avec $p = 3$.
5. Montrer qu'il existe une famille $(x_1, ..., x_{n+1})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses.

Ex 7 : Soient $\mathcal{U} = (u_1, u_2, \dots, u_q)$ une famille de q vecteurs d'un espace euclidien E et θ l'application $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^q \\ x & \mapsto & ((x|u_1), (x|, u_2), \dots, (x|u_q)) \end{array} \right.$. Montrer que θ est surjective, si et seulement si, la famille $\mathcal{U}$ est libre.

Ex 8 : Nous voulons démontrer qu'il n'existe pas d'hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication pour $n \geq 3$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(U, V) \mapsto tr(U^T V)$. Soit A un élément non nul de l'orthogonal de H.

1. Justifier que pour tout $B \in H$, BA^T est colinéaire à A^T.

2. Montrer que la matrice A^T n'est pas inversible.

3. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par : $W = Im(A^T)$. Montrer que W est stable pour tous les éléments de H.

4. Soient : p le rang de la matrice A^T, $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $Im(A^T)$, complétée en une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}_1$. Montrer que l'application $\varphi_P : M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. En déduire que l'on a : $\dim(H) \leq n^2 - p(n-p)$, puis conclure.

Ex 9 : *1.* On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A, B) \mapsto tr(A^T B)$, dont on note $\| \; \|$ la norme associée. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

2. Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_1^e (\ln t - at - b)^2 dt$.

Ex 10 : Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère l'équation $(*)$: $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Un vecteur X_0 de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est dit *pseudo-solution* de $(*)$ si :
$\|B - AX_0\| = \inf_{X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|B - AX\|$ (il s'agit ici de la norme euclidienne canonique).

a. Montrer l'existence d'au moins une pseudo-solution de $(*)$.

b. Montrer que X est une pseudo-solution de $(*)$ si et seulement si on a : $A^T AX = A^T B$.

c. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(A^T A)$.

d. On suppose A de rang p. Montrer que $(*)$ admet une unique pseudo-solution que l'on déterminera.

Ex 11 : **(CCP 81 et 82)** On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le produit scalaire : $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(A|B) = tr(A^T B)$.
Soient $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ et T^+ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

1. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\varphi(A, A') = aa' + bb' + cc' + dd'$. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel.

3. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

4. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

5. Calculer $d(J, \mathcal{F})$ et $d\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, T^+\right)$.

Ex 12 : *1.* Soit $(a_0, \ldots a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. À quelle condition l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?
On suppose cette condition réalisée et on note $(\cdot|\cdot)$ ce produit scalaire.

2. Donner une base orthonormée pour $(\cdot|\cdot)$.

3. Montrer que $\mathcal{F} = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \; \displaystyle\sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$ est un espace vectoriel et donner $\dim(\mathcal{F})$.

4. Déterminer la distance de X^n à $\mathcal{F}$.

Ex 13 : (*) Soit E l'espace des fonctions continues f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}dt$ converge.

1. Justifier qu'en posant : $\forall f, g \in E,\ (f|g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$, on a un produit scalaire sur E.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale de degré n.
3. Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée.
4. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $e_a : x \mapsto e^{-ax}$. Montrer que $\|e_a\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(L_n|e_a)^2$.
5. **a.** Montrer que $\text{Vect}\left((e_a)_{a\in\mathbb{R}_+^*}\right) \subset \overline{\text{Vect}\left((L_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)}$.

   b. On note $E_0 = \{f \in E,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0\}$. Montrons que : $E_0 \subset \overline{\text{Vect}\left((e_a)_{a\in\mathbb{R}_+^*}\right)}$.

   c. Montrer que $\overline{E_0} = E$.

   d. Montrer que $\overline{vect((L_n)_{n\in\mathbb{N}})} = E$.

Ex 14 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

1. Calculer A_n en distinguant deux cas selon la parité de n. On donne $A_0 = 1$.
2. On pose $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt$. Vérifier que $(.|.)$ est un produit scalaire.
3. Calculer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.
4. Soit $\Phi : P \mapsto XP' - P''$. Montrer que Φ est autoadjoint pour ce produit scalaire.
5. Soit Φ_n l'endomorphisme induit par Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que Φ_n est diagonalisable et déterminer son spectre.
6. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique polynôme H_n de coefficient dominant un tel que $\Phi(H_n) = nH_n$. Montrer que $d°(H_n) = n$.
7. Montrer que $x \mapsto e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$ est polynomiale de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.
8. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$.
9. Montrer que la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

Ex 15 : Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme u de E est dit normal si $u^*u = uu^*$.

1. Montrer que u est normal si et seulement si : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
2. Soit u normal. Montrer que $Sp(u) = Sp(u^*)$ et que : $\forall \lambda \in Sp(u),\ E_\lambda(u) = E_\lambda(u^*)$.
3. Montrer que les sous-espaces propres d'un endomorphisme normal sont deux à deux orthogonaux.
4. Si $\dim(E) = 2$, montrer que tout endomorphisme normal peut être représenté dans une base orthonormé par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ou $S(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a; b \in \mathbb{R}$
5. (*) Montrer qu'un endomorphisme normal peut être représenté dans une base orthonormé par une matrice de la forme $Diag(\lambda_1, ..., \lambda_p, S(a_1, b_1), ..., S(a_q, b_q))$, où $\lambda_1, ..., \lambda_p, a_1, ..., a_q, b_1, ..., b_q \in \mathbb{R}$.

Ex 16 : Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $[u^2 = 0$ et $u + u^* \in GL(E)]$ si et seulement si $\text{Ker}\,(u) = \text{Im}\,(u)$.

Ex 17 : Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}\,(f) \oplus \text{Im}\,(f^*)$.
2. On suppose que $f \circ f^* = f^2$. Montrer que $f = f^*$.

Ex 18 : Soient E un espace euclidien, $(x_0, a, b) \in E^3$ tel que $x_0 \neq 0$. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(x_0) = a$ et $u^*(x_0) = b$ si et seulement si $(x_0|a) = (x_0|b)$.

Ex 19 : Soit E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et p le projecteur orthogonal sur F.

1. **a.** Montrer que $F = \{x \in E,\ \|p(x)\| = \|x\|\}$.

b. Montrer que : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.

2. On considère p_F et p_G deux projecteurs orthogonaux sur deux sous-espaces vectoriels F et G respectivement. On suppose que H est un sous-espace vectoriel tel que $p_F \circ p_G$ est le projecteur orthogonal sur H.

a. Montrer que $F \cap G = H$.

b. Montrer que $p_G \circ p_F = p_F \circ p_G$.

c. On suppose réciproquement que F et G vérifient $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$. Montrer qu'il existe H sous-espace vectoriel de E tel que $p_H = p_F \circ p_G$.

Ex 20 : (*) Soient E un espace euclidien et p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que qp est diagonalisable.

Ex 21 : On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel.

1. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y-z-t = x+3y+z-t = 0\}$. Déterminer la matrice de la projection orthogonale et de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base cononique de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer la distance de $(1,1,1,-1)$ à F.

3. Déterminer $F^\perp$.

4. Déterminer les endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ qui commutent avec tout symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^4$.

Ex 22 : *1.* Montrer que l'ensemble des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.
2. Si A et B sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $|||p_A - p_B||| \leq 1$, puis que $\dim(A) = \dim(B)$ si $|||p_A - p_B||| < 1$.

Ex 23 : Reconnaître les applications suivantes dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 17 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 17 \end{pmatrix}, \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ex 24 : Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dans $O_n(\mathbb{R})$.

Ex 25 : Soient $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E et $u \in \mathcal{L}(E)$. $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u(e_i)|f_j)^2 = tr(u^* \circ u)$.

Ex 26 : Soit E le plan euclidien orienté muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $f_m \in \mathcal{L}(E)$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f_m) = A_m$. Pour quels m, f_m est-telle une isométrie vectorielle et econnaître la nature de f_m pour $A_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} m^2-1 & -m+2+\sqrt{2} \\ 2(m-1-\sqrt{2}) & 1 \end{pmatrix}$ et $A_m = \begin{pmatrix} m-\frac{1}{4} & m+\frac{1}{2} \\ m+\frac{1}{2} & -m+\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Ex 27 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r telle que $A^T A = A^3$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(A^3)$.
2. Montrer qu'il existe $B \in O_r(\mathbb{R})$ tel que $B^3 = I_r$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Ex 28 : Soit $U \in S_n(\mathbb{R})$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice antisymétique V telle que : $U + V \in O(n)$.

1. On suppose que U convient. Montrer que : $UV = VU$ et $I_n = U^2 - V^2$.
2. (*) Montrer que si λ est dans $Sp(U)$, alors λ est dans $[-1, 1]$ et que si λ est dans $]-1, 1[$, alors $\mathrm{Ker}\,(U - \lambda I_n)$ est de dimension paire.
3. Conclure.

Ex 29 : Soit E un espace euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in E$, $v \neq 0$. Pour $x \in E$ on pose $f(x) = x + \lambda(x|v)v$. Condition nécessaire et suffisante sur λ et v pour que $f \in \mathscr{O}(E)$; dans ce cas, caractériser f.

Ex 30 : (*) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Pour $f \in O(E)$, on pose $F_f = \mathrm{Ker}\,(f - Id_E)$.

1. Soit $f \in O(E) \setminus \{Id_E\}$ et $x \in E \setminus F_f$. Montrer que $H = \{y \in E,\ \|x - y\| = \|y - f(x)\|\}$ est un hyperplan. Soit r la réflexion d'hyperplan H, montrer que F_f est strictement contenu dans $F_{r \circ f}$.
2. Montrer que tout élément de $O(E)$ est la composée d'au plus n réflexions.

Ex 31 : Soient E un espace euclidien et $u \in O(E)$. Montrer que $u^2 = Id_E$ si et seulement si u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$.

Ex 32 : Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E et $\varphi \in O(E)$ telle que $\varphi(F) = F^{\perp}$.
On note respectivement p et $p_{\perp}$ les projections orthogonales sur F et $F^{\perp}$.
Enfin pour $x \in E$ on pose $f(x) = \varphi\big(p(x)\big) + \varphi^{-1}\big(p_{\perp}(x)\big)$.

1. Montrer que E est de dimension paire et que $\dim E = 2 \dim F$.
2. Montrer que f est la symétrie vectorielle par rapport à $F_1 = (\varphi + \mathrm{Id}_E)(F)$ et parallèlement à $F_2 = (Id_E - \varphi)(F)$.
3. Montrer que f est la symétrie orthogonale par rapport à $(\varphi + \mathrm{Id}_E)(F)$.

Ex 33 : [Inégalité d'Hadamard] Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$. Nous voulons démontrer :
$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Les vecteurs colonnes $(C_1, ..., C_n)$ de A forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on appelera $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{D}$ une base d'orthonormalisation obtenue par le procédé de Gram-Schmidt de $\mathcal{C}$.
   a. Que dire de $P_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$? Préciser ses éléments diagonaux.
   b. En utilisant des matrices de passage, montrer l'inégalité d'Hadamard.
2. Étudier le cas d'égalité.

Ex 34 : (*) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall A \in O_n(\mathbb{R}),\ P(A) \in O_n(\mathbb{R})$.

Ex 35 : Montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Ex 36 : Soit E un espace vectoriel euclidien et $s \in S(E)$. Montrer que s est k-lipschitzienne si et seulement si : $\forall \lambda \in Sp(s),\ |\lambda| \leq k$.

Ex 37 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$,et p un projecteur orthogonal de E de rang r tel que $1 \leq r \leq n-1$. Soit φ définie sur $\mathcal{S}(E)$ par $f \mapsto pfp$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ et déterminer son rang.

Ex 38 : Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$. Pour P, Q dans E, notons $\langle P, Q\rangle = \int_{-2}^{2} P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que les sous-espaces des polynômes pairs et impairs sont supplémentaires orthogonaux dans E, puis donner une base orthogonale de E.
3. Pour P dans E, on pose $f(P) = 2XP' + (X^2-4)P''$. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E et en déduire les valeurs propres de f. Donner une base de vecteurs propres de f.

Ex 39 : Soient E un espace euclidien et a, b deux vecteurs non nuls de E. Soit φ l'endomorphisme de E défini par $\varphi(x) = x + (x|a)b$. Montrer que φ est un endomorphisme autoadjoint si et seulement s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $b = \gamma a$.

Ex 40 : (*) Soit E un espace euclidien et $f \in S(E)$ telle que $tr(f) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur x unitaire tel que : $(f(x)|x) = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ (f(e_i)|e_i) = 0$.

Ex 41 : On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \int_0^1 PQ$.

1. Montrer que l'application u définie sur E par : $u(P) = \int_0^1 (X+t)^n P(t)dt$ est un endomorphisme autoadjoint de E.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(P_0, ..., P_n)$ formée de vecteurs propres de u. On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres associées.
3. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x)P_k(y)$. En déduire $tr(u)$.

Ex 42 : (*) Soit E espace euclidien et $u, v \in S^+(E)$ tels qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{2p} = v^{2p}$. Montrer que : $u = v$.

Ex 43 : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1-i & -7 & 4 & -5 \\ -7 & 2-i & 14 & 37 \\ 4 & 14 & 3-i & 3 \\ -5 & 37 & 3 & 4-i \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Ex 44 : Soit A une matrice symétrique réelle telle que : $\exists k \in \mathbb{N},\ A^k = I_n$. Calculer A^2.

Ex 45 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^2 + A^T = I_n$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 4. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que : 0 et 1 ne sont pas dans $Sp(A)$ (considérer X^TAX, avec X bien choisi).
3. Montrer que A est symétrique et expliciter sa forme.
4. Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A^2 + A^T = I_n$.

Ex 46 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que : $\sqrt[n]{\det(A)} \leq \frac{1}{n} tr(A)$. Étudier le cas d'égalité.

Ex 47 : Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :
i) $A_1A_2 = A_2A_1$; ***ii)*** $A_1A_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; ***iii)*** il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que P^TA_1P et P^TA_2P soient diagonales.

Ex 48 : (*) Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P^TP$ et $B = P^TDP$.

2. En déduire que pour $U, V \in S_n^+(\mathbb{R})$, on a : $tr(UV) \geq 0$.

Ex 49 : (*) Soit $n \geq 2$. Pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit A_1 la matrice obtenue en ôtant à A sa première ligne et sa première colonne. On note $(.,.)$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A_1 \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.

2. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que : $(Ax,x)(A^{-1}y,y) \geq (x,y)^2$.

3. Trouver $y \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall A \in S_n^{++}(\mathbb{R}),\ \min\left\{\frac{(Ax,x)}{(x,y)^2};\ x \in \mathbb{R}^n,\ (x,y) \neq 0\right\} = \frac{\det(A)}{\det(A_1)}$.

4. Pour $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, comparer $\frac{\det(A+B)}{\det(A_1+B_1)}$ et $\frac{\det(A)}{\det(A_1)} + \frac{\det(B)}{\det(B_1)}$.

Ex 50 : Montrer que $A = [\min(i,j)]_{1\leq i,j\leq n}$ est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Ex 51 : L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système : $\left\{\begin{array}{l} MM^T = M^TM \\ M^2 = 4I_2 \end{array}\right.$.

1. Soit $N = M^TM/4$. Montrer que N est dans $S_n^+(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$.

2. En déduire que $N = I_2$.

3. Montrer alors que $M/2$ est la matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormale.

4. Vérifier la réciproque.

Ex 52 : Soient A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $M = AB - BA$ est antisymétrique et que $\operatorname{tr}(M^4) \geq 0$.

2. Montrer que si $\operatorname{tr}(M^4) = 0$, alors $M = 0$.

Ex 53 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ semblable à son inverse. Montrer que $tr(A^2) \geq n$ et qu'il y a égalité si et seulement si A est une symétrie orthogonale.

Ex 54 : (*) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B - A$ soit dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) \leq \det(B)$ (traiter d'abord les cas $\det(B) = 0$ et $B = I_n$).

Ex 55 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que : $\frac{(\operatorname{tr}(A))^2}{\operatorname{tr}(A^2)} \leq \operatorname{rg}(A)$.

Ex 56 : Soit $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} I_p & C \\ C^T & I_q \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : λ est dans $Sp(B)$ si et seulement si $-\lambda$ l'est et que λ et $-\lambda$ ont la même multiplicité.

2. En déduire que $\det(A) \leq 1$.

3. Soit $U \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $V \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $U = V^2$.

4. Soient $n \geq 2$, $p \in [\![1, n-1]\!]$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On écrit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$, avec $B \in S_p(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(B) > 0$, puis que $\det(A) \leq \det(B)\det(D)$.

Ex 57 : Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $AA^TA = I_n$.

Ex 58 : Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que : $\det(A) + \det(B) \leq \det(A + B)$ (on pourra diagonaliser A dans une base orthonormée).

Ex 59 : Soit $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^n = 0\}$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{N}$. Montrer que $F \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. En déduire que $\dim(F) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Ex 60 : Soient $p \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $S = \left[\frac{1}{(\alpha_i+\alpha_j)^p}\right]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $s, p \in \mathbb{R}_+^*$, les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-st^{1/p}}dt$ et $\int_0^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}du$ convergent et établir une relation entre les deux intégrales.
2. En déduire que S est dans $S_n^+(\mathbb{R})$ et donner une condition nécessaire et suffisante pour que S soit dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Ex 61 : (*) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(X_1, ..., X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(AX_1, ..., AX_n)$ soit une base orthogonale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ex 62 : Soit $\Phi \in \mathcal{L}(S_n(\mathbb{R}))$ telle que $\Phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est fermé dans $S_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\Phi(S_n^+(\mathbb{R})) = S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Montrer que Φ est un isomorphisme.

Ex 63 : Soient $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

1. Soit $(F_1, ..., F_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $tr(A) = \sum_{i=1}^n (F_i|AF_i)$.
2. Montrer que $tr(AB) \leq tr(A)tr(B)$.

Ex 64 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que : $A = B^2$.
2. Soit $C \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que AC est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AD + DA = 0$. Montrer que $D = 0$.
4. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AC + CA = B$.

Ex 65 : L'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.

1. Soient A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X une colonne propre de A^2. Montrer que les sous-espaces $\text{Vect}(X, AX)$ et $(\text{Vect}(X, AX))^\perp$ sont stables par A.
2. Montrer par récurrence sur n que, pour tout matrice antisymétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale par blocs avec des blocs diagonaux nuls ou de la forme $\Delta_a = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.
3. En déduire que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et a son spectre inclus dans $i\mathbb{R} = \{iy \,|\, y \in \mathbb{R}\}$.
4. (*) Montrer que pour $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, on a : $\det(A + S) \geq \det(S)$.

Ex 66 : Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint défini positif. Montrer que $(x, y) \mapsto (f(x)|y)$ définit un produit scalaire sur E.