Bienvenue en classe de MP. L'année de spé étant très courte (les concours débutent mi-avril), il faut être mobilisé dès le debut de l'année et être prêt à démarrer sur un rythme soutenu. Il est donc nécessaire d'avoir dès la rentrée des connaissances solides.
Afin de vous guider dans un programme de révision, voici ce document.

Voici un extrait de 38 exercices de la banque de CCINP des oraux. Cette banque comporte initialement 112 exercices couvrant le programme de sup et de spé. Lors de l'oral de CCINP, vous serez interrogés sur l'un de ces exercices et celui-ci est noté sur 8 points.
Ces 38 exercices couvrent une bonne partie du programme de sup et je vous demande de les travailler à fond et de les connaître, vous serez interrogés dessus dès le jour de la rentrée et cela constituera votre première évalutation de l'année.

Ne vous y mettez pas au dernier moment. Bon été et bon courage !

Nicolas Jacquet.

CONCOURS COMMUN INP
FILIÈRE MP - FILIÈRE MPI

BANQUE ÉPREUVE ORALE DE MATHÉMATIQUES SESSION 2024

avec corrigés

Dernière mise à jour : le 29/04/2024

Introduction

L'épreuve orale de mathématiques du CCINP, filière MP et filière MPI, se déroule de la manière suivante :
- 25mn de préparation sur table.
- 25mn de passage à l'oral.

Chaque sujet proposé est constitué de deux exercices :
- un exercice sur 8 points issu de la banque publique accessible sur le site https://www.concours-commun-inp.fr/fr/index.html
- un exercice sur 12 points.

Les deux exercices proposés portent sur des domaines différents.

Ce document contient les **112 exercices de la banque pour la session 2024** :
- 58 exercices d'analyse (exercice 1 à exercice 58).
- 36 exercices d'algèbre (exercice 59 à exercice 94).
- 18 exercices de probabilités (exercice 95 à exercice 112).

Dans l'optique d'aider les futurs candidats à se préparer au mieux aux oraux du CCINP, chaque exercice de la banque est proposé, dans ce document, avec un corrigé.

Il se peut que des mises à jour aient lieu en cours d'année scolaire.
Cela dit, il ne s'agira, si tel est le cas, que de mises à jour mineures : reformulation de certaines questions pour plus de clarté, relevé d'éventuelles erreurs, suppression éventuelle de questions ou d'exercices.
Nous vous conseillons donc de vérifier, en cours d'année, en vous connectant sur le site :
https://www.concours-commun-inp.fr/fr/index.html
Si une nouvelle version a été mise en ligne, la date de la dernière mise à jour se trouvera en haut de chaque page.
Si tel est le cas, les exercices concernés seront signalés dans le présent document, page 3.

Remerciements à David DELAUNAY pour l'autorisation de libre utilisation du fichier source de ses corrigés des exercices de l'ancienne banque, diffusés sur son site http://mp.cpgedupuydelome.fr

NB : la présente banque intègre des éléments issus des publications suivantes :

- A. Antibi, L. d'Estampes et interrogateurs, Banque d'exercices de mathématiques pour le programme 2003-2014 des oraux CCP-MP, *Éd. Ress. Pédag. Ouv. INPT*, **0701** (2013) 120 exercices.
  http://pedagotech.inp-toulouse.fr/130701
- D. Delaunay, Prépas Dupuy de Lôme, cours et exercices corrigés MPSI - MP, 2014.
  http://mp.cpgedupuydelome.fr

L'équipe des examinateurs de l'oral de mathématiques du CCINP, filière MP et filière MPI.

Contact : Valérie BELLECAVE, coordonnatrice des oraux de mathématiques du CCINP, filière MP et filière MPI.
vbellecave@gmail.com

EXERCICE 3 analyse

Énoncé exercice 3

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Corrigé exercice 3

1. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
   On prouve, par récurrence, que :
   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g^{(k)}(x) = 2^k\mathrm{e}^{2x}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.
2. g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$:
   $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 2^{n-k}\mathrm{e}^{2x}\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n!\mathrm{e}^{2x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}$.
3. Notons (P_n) la propriété :
   Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et :
   $\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$.
   Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n.
   La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).

   Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$.
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I.
   Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$.
   Pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I.
   Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et :
   $\forall\, x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right)$.
   En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient : $\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$.
   C'est-à-dire
   $(fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + \binom{n}{0} f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \binom{n}{n} f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)$.
   Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k-1} = \dbinom{n+1}{k}$.
   On remarque également que $\dbinom{n}{0} = 1 = \dbinom{n+1}{0}$ et $\dbinom{n}{n} = 1 = \dbinom{n+1}{n+1}$.
   On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$.
   Donc (P_{n+1}) est vraie.

EXERCICE 4 analyse

Énoncé exercice 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Corrigé exercice 4

1. Théorème des accroissements finis :
   Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
   On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
   Alors $\exists\, c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
2. On pose $l = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.
   Soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a, b]$.
   En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f, entre x_0 et $x_0 + h$, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c_h)h$.
   Quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \to x_0$.
   Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \left(f(x_0 + h) - f(x_0)\right) = \lim\limits_{h \to 0} f'(c_h) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l$.
   On en déduit que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.
3. La fonction g est clairement continue et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

   $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|g(x)| \leqslant x^2$ donc $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} g(x) = 0 = g(0)$. Donc g est continue en 0.

   g est également dérivable en 0 car $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x}\left(g(x) - g(0)\right) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   Or $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ x \neq 0}} h \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ car $|x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)| \leqslant |x|$.
   Donc, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

   Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Cependant, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   $2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ (car $|2x \sin(\dfrac{1}{x})| \leqslant 2|x|$), mais $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.
   Donc g' n'a pas de limite en 0.

EXERCICE 5 analyse

Énoncé exercice 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas $\boldsymbol{\alpha \leqslant 0}$**

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$**

   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Corrigé exercice 5

1. (a) Cas $\alpha \leqslant 0$
   $\forall\, n \geqslant 3$, $\ln n \geqslant 1$ donc $(\ln n)^{\alpha} \leqslant 1$.
   On en déduit que : $\forall\, n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ diverge.

   Donc , par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$
   Soit $n \geqslant 3$.
   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc
   $\forall k \in [\![3, n]\!]$, $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k-1)$
   donc $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k-1)$
   C'est-à-dire, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \int_{2}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$
   f étant positive, on peut donc écrire dans $[0, +\infty]$ l'inégalité
   $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} f(k)$
   de sorte que la série et l'intégrale sont simultanément finies,
   autrement dit, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

   Puisque $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$, on peut affirmer que : $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha > 1$.
   On en déduit que : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Au voisinage de $+\infty$,
$\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{\mathrm{e}}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.

De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(n^2+n\right)=2\ln n+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=2\ln n+\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Donc $\ln\left(n^2+n\right)\underset{+\infty}{\sim}2\ln n$.

Et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\underset{+\infty}{\sim}1$, on en déduit que $u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}}{8}\times\dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$.

Or, d'après 1.(b), $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$ converge.

Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n$ converge.

EXERCICE 6 analyse

Énoncé exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n!}{n^n}$?

Corrigé exercice 6

1. Par hypothèse : $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}/\ \forall n\geqslant N,\ |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-l|\leqslant\varepsilon.$ (1)

   Prenons $\varepsilon=\dfrac{1-l}{2}$.
   Fixons un entier N vérifiant (1).
   Alors $\forall\,n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N\Longrightarrow |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-l|\leqslant\dfrac{1-l}{2}$.
   Et donc, $\forall n\geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{1+l}{2}$.
   On pose $q=\dfrac{1+l}{2}$. On a donc $q\in\,]0,1[$.
   On a alors $\forall n\geqslant N,\ u_{n+1}\leqslant qu_n$.
   On en déduit, par récurrence, que $\forall n\geqslant N,\ u_n\leqslant q^{n-N}u_N$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant N}q^{n-N}u_N=u_Nq^{-N}\sum\limits_{n\geqslant N}q^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant N}q^n$ converge car $q\in\,]0,1[$.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2. On pose : $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

   $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>0$ et $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$.
   Or $-n\ln(1+\dfrac{1}{n})\underset{+\infty}{\sim}-1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\mathrm{e}^{-1}<1$.
   Donc, d'après 1., la série $\sum u_n$ converge.

EXERCICE 7 analyse

Énoncé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .
   (a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive.
   Prouver que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.
   Remarque 1 : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Corrigé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .
   (a) Par hypothèse, $\exists\, N_0 \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \implies v_n \neq 0$.
   Ainsi la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0.
   De plus, comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
   Alors, $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}/N \geqslant N_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$. (1)
   Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Fixons un entier N vérifiant (1).
   Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   C'est-à-dire, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. (*)
   On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   Et donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \dfrac{u_n}{v_n} > 0$.
   Ce qui implique que u_n et v_n sont de même signe à partir du rang N.
   (b) On suppose que (v_n) est positive.
   En reprenant les mêmes notations que dans 1.(a) : $\exists\, N_0 \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \implies v_n \neq 0$.
   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \implies v_n > 0$.

   De plus, on a prouvé, dans 1.(a), que :
   $\exists N \in \mathbb{N}/N \geqslant N_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. (*)

   On en a déduit dans 1.(a) que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \dfrac{u_n}{v_n} > 0$.
   Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies v_n > 0$.
   Donc on a aussi : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n > 0$.

   D'après (*), $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{3}{2}$. (**)

   Premier cas : Si $\sum v_n$ converge
   D'après (**), $\forall\, n \geqslant N$, $u_n \leqslant \dfrac{3}{2} v_n$.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
   Deuxième cas : Si $\sum v_n$ diverge
   D'après (**), $\forall\, n \geqslant N$, $\dfrac{1}{2} v_n \leqslant u_n$.

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Par symétrie de la relation d'équivalence, on obtient le résultat.

2. On pose $\forall\, n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{((-1)^n + \mathrm{i}) \ln n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3} - 1\right)}$.

   $|u_n| = \dfrac{\sqrt{2} \ln n \sin(\dfrac{1}{n})}{\left(\sqrt{n+3} - 1\right)}$.

   De plus $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$

   On a $n^{\frac{5}{4}} v_n = \dfrac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{1}{4}}}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\frac{5}{4}} v_n = 0$. On en déduit que $\sum v_n$ converge.

   D'après 1., $\sum\limits_{n \geqslant 2} |u_n|$ converge.

   Donc $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ converge absolument.

   De plus, la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ converge.

EXERCICE 39 analyse

Énoncé exercice 39

On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\ |\ )$ est un produit scalaire dans l^2.
   On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\ ||$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire [redacted] de l^2 dans $\mathbb{R}$.

3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\ |\ )$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Corrigé exercice 39

1. (a) Soit $(x, y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|x_n y_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x_n^2 + y_n^2\right)$.
   Or $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum x_n y_n$ converge absolument, donc converge.

   (b) La suite nulle appartient à l^2.

   Soit $(x, y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Montrons que $z = x + \lambda y \in l^2$.
   On a $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n^2 = (x_n + \lambda y_n)^2 = x_n^2 + \lambda^2 y_n^2 + 2\lambda x_n y_n$. (1)
   Par hypothèse, $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent et d'après 1.(a), $\sum x_n y_n$ converge.
   Donc, d'après (1), $\sum z_n^2$ converge.
   Donc $z \in l^2$.

   On en déduit que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

2. Soit $(x, y) \in l^2$ où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On pose $z = x + \lambda y$ avec $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.
   Ainsi, $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(z) = z_p = x_p + \lambda y_p = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.
   Donc φ est linéaire sur l^2. (*)

   [redacted]

3. On remarque déjà que $F \subset l^2$.
   Analyse :
   Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^\perp$.
   Alors $\forall\, y \in F$, $(x|y) = 0$.
   Soit $p \in \mathbb{N}$.

On considère la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F définie par :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\, y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$y \in F$, donc $(x|y) = 0$, donc $x_p = 0$.
On en déduit que, $\forall\, p \in \mathbb{N},\, x_p = 0$.
C'est-à-dire $x = 0$.

Synthèse :
la suite nulle appartient bien à $F^{\perp}$.

Conclusion : $F^{\perp} = \{0\}$.

Ainsi, $(F^{\perp})^{\perp} = l^2$.
On constate alors que $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$.

EXERCICE 42 analyse

Énoncé exercice 42

On considère les deux équations différentielles suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Corrigé exercice 42

1. On trouve comme solution de l'équation homogène sur $]0, +\infty[$ la droite vectorielle engendrée par $x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$.
   En effet, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{3}{2x}$ sur $]0, +\infty[$ est $x \longmapsto \dfrac{3}{2} \ln x$.
2. On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une fonction k telle que $x \longmapsto k(x)x^{\frac{3}{2}}$ soit une solution de l'équation complète (E) sur $]0, +\infty[$.
   On arrive alors à $2k'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}$ et on choisit $k(x) = -\dfrac{1}{2x}$.
   Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $x \longmapsto kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. On suppose qu'il existe une solution f de (E) sur $[0, +\infty[$.
   Alors f est aussi solution de E sur $]0, +\infty]$.
   Donc, il existe une constante k telle que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
   De plus, comme f est solution de E sur $[0, +\infty[$ alors f est dérivable sur $[0, +\infty[$.
   Donc en particulier, f est continue en 0.
   Donc $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} \left(kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x} \right) = 0$.
   f doit également être dérivable en 0.
   Or, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = k\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$.
   Donc f n'est pas dérivable en 0.
   Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ est l'ensemble vide.

EXERCICE 43 analyse

Enoncé exercice 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.

Corrigé exercice 43

On pose $f(x) = \text{Arctan}\, x$.

1. (a) **Premier cas** : Si $u_1 < u_0$
   Puisque la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}\, x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\text{Arctan}(u_1) < \text{Arctan}(u_0)$ c'est-à-dire $u_2 < u_1$.
   Par récurrence, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
   Deuxième cas : Si $u_1 > u_0$
   Par un raisonnement similaire, on prouve que la suite (u_n) est strictement croissante.
   Troisième cas : Si $u_1 = u_0$
   La suite (u_n) est constante.
   Pour connaître les variations de la suite (u_n), il faut donc déterminer le signe de $u_1 - u_0$, c'est-à-dire le signe de $\text{Arctan}(u_0) - u_0$.
   On pose alors $g(x) = \text{Arctan}x - x$ et on étudie le signe de la fonction g.
   On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{-x^2}{1+x^2}$ et donc $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) < 0$.
   Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(0) = 0$ alors :
   $\forall x \in \left]0, +\infty\right[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in \left]-\infty, 0\right[$, $g(x) > 0$.
   On a donc trois cas suivant le signe de x_0 :
   - Si $x_0 > 0$, la suite(u_n) est strictement décroissante.
   - Si $x_0 = 0$, la suite (u_n) est constante.
   - Si $x_0 < 0$, la suite(u_n) est strictement croissante.

   (b) La fonction g étant strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   0 admet donc un unique antécédent par g et, comme $g(0) = 0$, alors 0 est le seul point fixe de f.
   Donc si la suite (u_n) converge, elle converge vers 0, le seul point fixe de f.
   Premier cas : Si $u_0 > 0$
   L'intervalle $\left]0, +\infty\right[$ étant stable par f, on a par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge et ce vers 0, unique point fixe de f.
   Deuxième cas : Si $u_0 < 0$
   Par un raisonnement similaire, on prouve que (u_n) est croissante et majorée par 0, donc elle converge vers 0.
   Troisième cas : Si $u_0 = 0$
   La suite (u_n) est constante.

   Conclusion : $\forall\, u_0 \in \mathbb{R}$, (u_n) converge vers 0.
2. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.
   On a alors $h(x) = h(u_0) = h(\text{Arctan}(u_0)) = h(u_1) = h(\text{Arctan}(u_1)) = h(u_2) = \ldots$.
   Par récurrence, on prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(x) = h(u_n)$.
   De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} h(u_n) = h(0)$ par convergence de la suite (u_n) vers 0 et par continuité de h.
   On obtient ainsi : $h(x) = h(0)$ et donc h est une fonction constante.

Réciproquement, toutes les fonctions constantes conviennent.
Conclusion : Seules les fonctions constantes répondent au problème.

EXERCICE 46 analyse

Énoncé exercice 46

On considère la série : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Corrigé exercice 46

1. $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$.

   Or, au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}) - \dfrac{1}{8n^2} + O(\dfrac{1}{n^3}) = 1 + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{3}{8n^2} + O(\dfrac{1}{n^3})$.

   Donc, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

   D'après 1., $v_n = \cos\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})\right)$.

   Donc $v_n = \dfrac{3\pi}{8}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$ (*)

   $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (d'après le critère spécial des séries alternées).

   De plus, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge donc par critère de domination, $\sum\limits_{n\geqslant 1} O(\dfrac{1}{n^2})$ converge absolument donc converge.

   Donc d'après $(*)$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge.
3. D'après le développement asymptotique du 2., on a $|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3\pi}{8n}$.

   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}|v_n|$ diverge, c'est-à-dire $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ ne converge pas absolument.

EXERCICE 55 analyse

Énoncé exercice 55

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.

   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Corrigé exercice 55

1. (a) Montrons que E est un sous-espace-vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   La suite nulle appartient à E (obtenue pour $(u_0, u_1) = (0, 0)$).

   Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
   Montrons que $w = u + \lambda v \in E$.
   On a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + \lambda v_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $w_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2}$.
   Or $(u, v) \in E^2$, donc $w_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n + \lambda\left(2av_{n+1} + 4(ia - 1)v_n\right)$
   c'est-à-dire $w_{n+2} = 2a\left(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}\right) + 4(ia - 1)\left(u_n + \lambda v_n\right)$
   ou encore $w_{n+2} = 2aw_{n+1} + 4(ia - 1)w_n$.
   Donc $w \in E$.

   Donc E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

   (b) On considère l'application φ définie par :
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$
   Par construction, φ est linéaire et bijective.
   Donc φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   On en déduit que $\dim E = \dim \mathbb{C}^2 = 2$.

2. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   On introduit l'équation caractéristique (E) : $r^2 - 2ar - 4(ia - 1) = 0$.

   On a deux possibilités :
   — si (E) admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$
   avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.

   — si (E) a une unique racine double r, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha n + \beta)r^n$
   avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.

   Le discriminant réduit de (E) est $\Delta' = a^2 + 4ia - 4 = (a + 2i)^2$.

   Premier cas : $a = -2i$
   $r = a = -2i$ est racine double de (E).
   Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha n + \beta)(-2i)^n$.

   Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $1 = \beta$ et $1 = (\alpha + \beta)(-2i)$.
   On en déduit que $\alpha = \dfrac{i}{2} - 1$ et $\beta = 1$.

   Deuxième cas : $a \neq -2i$
   On a deux racines distinctes $r_1 = 2(a + i)$ et $r_2 = -2i$.
   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\left(2(a + i)\right)^n + \beta\left(-2i\right)^n$.

   Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $\alpha + \beta = 1$ et $2(a + i)\alpha - 2i\beta = 1$.
   On en déduit, après résolution, que $\alpha = \dfrac{1 + 2i}{2a + 4i}$ et $\beta = \dfrac{2a + 2i - 1}{2a + 4i}$.

BANQUE ALGÈBRE

EXERCICE 59 algèbre

Énoncé exercice 59

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

[redacted]

Corrigé exercice 59

1. f est clairement linéaire. (*) De plus, $\forall\, P \in E \setminus \{0\}$, $\deg P' < \deg P$ donc $\deg(P - P') = \deg P$.
   Et, si $P = 0$, alors $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = \deg P = -\infty$.
   On en déduit que $\forall\, P \in E$, $\deg f(P) = \deg P$.
   Donc $f(E) \subset E$. (**)

   D'après (*) et (**), f est bien un endomorphisme de E.

   (a) Déterminons $\mathrm{Ker} f$.
   Soit $P \in \mathrm{Ker} f$.
   $f(P) = 0$ donc $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = -\infty$.
   Or, d'après ce qui précéde, $\deg(P - P') = \deg P$ donc $\deg P = -\infty$.
   Donc $P = 0$.
   On en déduit que $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.
   Donc f est injectif.

   Or, $f \in \mathcal{L}(E)$ et E est de dimension finie ($\dim E = n + 1$) donc f est bijectif.

   (b) Soit $e = (1, X, ..., X^n)$ la base canonique de E. Soit A la matrice de f dans la base e.
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$
   $\det A = 1$ d'où $\det A \neq 0$.
   Donc f est bijectif.

2. Soit $Q \in E$.
   D'après 1. : $\exists\,! P \in E$, tel que $f(P) = Q$.
   $P - P' = Q$, $P' - P'' = Q'$,..., $P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$.
   Or $P^{(n+1)} = 0$, donc, en sommant ces $n+1$ égalités, $P = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$.

3. [redacted]

EXERCICE 60 algèbre

Énoncé exercice 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

Corrigé exercice 60

1. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On a $f(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$.
   Alors $M \in \operatorname{Ker} f \iff \exists\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$.
   C'est-à-dire, $M \in \operatorname{Ker} f \iff \exists\,(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$.
   On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. (*)
   On pose $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   D'après (*), la famille (M_1, M_2) est génératrice de $\operatorname{Ker} f$.
   De plus, M_1 et M_2 sont non colinéaires ; donc (M_1, M_2) est libre.
   Donc (M_1, M_2) est une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, donc f est non injectif.
   Or f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
   On en déduit que f est non surjectif.
3. Par la formule du rang, $\operatorname{rg} f = 2$.
   On pose $M_3 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   M_3 et M_4 sont non colinéaires, donc (M_3, M_4) est une famille libre de $\operatorname{Im} f$.
   Comme $\operatorname{rg} f = 2$, (M_3, M_4) est une base de $\operatorname{Im} f$.
4. On a $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. (1)

   Prouvons que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
   Soit $M \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.
   D'après 1. et 3., $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aM_1 + bM_2$ et $M = cM_3 + dM_4$.
   On a donc $\begin{cases} -2a = c \\ -2b = 2d \\ a = 2c \\ b = 4d \end{cases}$.
   On en déduit que $a = b = c = d = 0$.
   Donc $M = 0$.
   Donc $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ (2)

   Donc, d'après (1) et (2), $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

EXERCICE 62 algèbre

Énoncé exercice 62

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:

   [redacted]
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

Corrigé exercice 62

1. f est linéaire donc :
   $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0 \Longleftrightarrow f \circ (f - \mathrm{Id}) = (f - \mathrm{Id}) \circ f = 2\mathrm{Id} \Longleftrightarrow f \circ (\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}) = (\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}) \circ f = \mathrm{Id}$.

   On en déduit que f est inversible, donc bijectif, et que $f^{-1} = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}$.
2. ([redacted]

   [redacted] **Analyse (unicité) :**
   Soit $x \in E$. Supposons que $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $b \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
   Alors par linéarité de f, $f(x) = f(a) + f(b) = -a + 2b$.
   On en déduit que $a = \dfrac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \dfrac{x + f(x)}{3}$.

   Synthèse (existence) :
   Soit $x \in E$. On pose $a = \dfrac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \dfrac{x + f(x)}{3}$.
   On a bien $x = a + b$. (*)
   $(f + \mathrm{Id})(a) = \dfrac{1}{3}\left(2f(x) - f^2(x) + 2x - f(x)\right) = \dfrac{1}{3}\left(-f^2(x) + f(x) + 2x\right) = 0$ car $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.
   Donc $a \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$. (**)

   $(f - 2\mathrm{Id})(b) = \dfrac{1}{3}\left(f(x) + f^2(x) - 2x - 2f(x)\right) = \dfrac{1}{3}\left(f^2(x) - f(x) - 2x\right) = 0$ car $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.
   Donc $b \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $b \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

   Conclusion : $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
3. Prouvons que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
   Soit $y \in \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id})$.
   $\exists\, x \in E \,/\, y = f(x) + x$.
   Alors $(f - 2\mathrm{Id})(y) = f(y) - 2y = f^2(x) + f(x) - 2f(x) - 2x = f^2(x) - f(x) - 2x = 0$ car $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.
   Donc $y \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
   Donc $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$. (*)
   Posons $\dim E = n$.
   D'après 2., $n = \dim \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
   De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id})$.
   On en déduit que $\dim \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \dim \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$. (**)

   Donc, d'après (*) et (**), $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

EXERCICE 64 algèbre

Énoncé exercice 64

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Corrigé exercice 64

1. Supposons $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
   Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ (*)

   Montrons que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$.
   Soit $y \in \mathrm{Im} f$.
   Alors, $\exists\, x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Or $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$, donc $\exists\, (a, b) \in E \times \mathrm{Ker} f$ tel que $x = f(a) + b$.
   On a alors $y = f^2(a) \in \mathrm{Im} f^2$.
   Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$ (**)

   D'après (*) et (**), $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) On a $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$.
   On en déduit que $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f \Longleftrightarrow \mathrm{rg} f^2 = \mathrm{rg} f$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \Longleftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2$.
   Alors, en utilisant le théorème du rang,
   $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f^2 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.

   (b) Supposons $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

   Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$.
   $\exists\, a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$.
   On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \mathrm{Ker} f^2$.
   Or, d'après l'hypothèse et 2.(a), $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$ donc $a \in \mathrm{Ker} f$ c'est-à-dire $f(a) = 0_E$.
   C'est-à-dire $x = 0$.
   Ainsi $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. (***)

   De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim E$. (****)

   Donc, d'après (***) et (****), $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

EXERCICE 71 algèbre

Énoncé exercice 71

Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Corrigé exercice 71

1. $D=\operatorname{Vect}((1,2,3))$.
   $(1,2,3)\notin P$ car les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ ne vérifient pas l'équation de P.
   Donc $D\cap P=\{0\}$. (*)
   De plus, $\dim D+\dim P = 1+2=\dim\mathbb{R}^3$. (**)
   D'après (*) et (**), $\mathbb{R}^3 = P\oplus D$.
2. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   Par définition d'une projection, $p(u)\in P$ et $u-p(u)\in D$.
   $u-p(u)\in D$ signifie que $\exists\,\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $u-p(u)=\alpha(1,2,3)$.
   On en déduit que $p(u)=(x-\alpha, y-2\alpha, z-3\alpha)$. (***)
   Or $p(u)\in P$ donc $(x-\alpha)+(y-2\alpha)+(z-3\alpha)=0$, c'est-à-dire $\alpha=\dfrac{1}{6}(x+y+z)$.
   Et donc, d'après (***), $p(u)=\dfrac{1}{6}(5x-y-z, -2x+4y-2z, -3x-3y+3z)$.

   Soit $e=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   Soit A la matrice de p dans la base e. On a $A=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ -2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}$.
3. On pose $e'_1=(1,2,3)$, $e'_2=(1,-1,0)$ et $e'_3=(0,1,-1)$.
   e'_1 est une base de D et (e'_2,e'_3) est une base de P.
   Or $\mathbb{R}^3=P\oplus D$ donc $e'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   De plus $e'_1\in D$ donc $p(e'_1)=0$. $e'_2\in P$ et $e'_3\in P$ donc $p(e'_2)=e'_2$ et $p(e'_3)=e'_3$.

   Ainsi, $M(p,e')=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 76 algèbre

Énoncé exercice 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Corrigé exercice 76

1. (a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
   On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
   Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2$, $|\,(x|y)\,| \leqslant ||x||\,||y||$
   Preuve :
   Soit $(x,y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = ||x + \lambda y||^2$.
   On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geqslant 0$.
   De plus, $P(\lambda) = (x + \lambda y | x + \lambda y)$.
   Donc, par bilinéarité et symétrie de $(\,|\,)$, $P(\lambda) = ||y||^2\lambda^2 + 2\lambda\,(x|y) + ||x||^2$.
   On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $||y||^2 \neq 0$.
   Premier cas : si $y = 0$
   Alors $|\,(x|y)\,| = 0$ et $||x||\,||y|| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.
   Deuxième cas : $y \neq 0$
   Alors $||y|| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
   Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.
   On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.
   Or $\Delta = (x|y)^2 - ||x||^2||y||^2$ donc $(x|y)^2 \leqslant ||x||^2||y||^2$.
   Et donc, $|\,(x|y)\,| \leqslant ||x||\,||y||$.

   (b) On reprend les notations de 1. .
   Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2$, $|\,(x|y)\,| = ||x||\,||y|| \iff x$ et y sont colinéaires.

   Supposons que $|\,(x|y)\,| = ||x||\,||y||$.
   Premier cas : si $y = 0$
   Alors x et y sont colinéaires.
   Deuxième cas : si $y \neq 0$
   Alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0.
   C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(\,|\,)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.
   Donc x et y sont colinéaires.

   Supposons que x et y soient colinéaires.
   Alors $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.
   Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).
   $|\,(x|y)\,| = |\alpha|.|\,(y|y)\,| = |\alpha|\,||y||^2$ et $||x||\,||y|| = \sqrt{(x|x)}\,||y|| = \sqrt{\alpha^2(y|y)}||y|| = |\alpha|.||y||^2$.
   Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par :
   $\forall (f,g) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.
   On pose $A = \left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$.
   $A \subset \mathbb{R}$.
   $A \neq \emptyset$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \longmapsto 1$ de E).

De plus, $\forall f \in E, \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc A est minorée par 0.

On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.
Soit $f \in E$.

On considère la quantité $\displaystyle\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2$.

D'une part, $\displaystyle\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^2 = (b-a)^2$.

D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(\,|\,)$ on obtient :

$\displaystyle\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.

On en déduit que $\forall f \in E$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2$.

Donc $m \geqslant (b-a)^2$.

Et, si on considère la fonction $f : t \longmapsto 1$ de E, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = (b-a)^2$.

Donc $m = (b-a)^2$.

EXERCICE 77 algèbre

Énoncé exercice 77

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Corrigé exercice 77

1. On a $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. (*)
   En effet, $\forall x \in A, \forall y \in A^{\perp}, (x \mid y) = 0$.
   C'est-à-dire, $\forall\, x \in A,\, x \in (A^{\perp})^{\perp}$.

   Comme E est un espace euclidien, $E = A \oplus A^{\perp}$ donc $\dim A = n - \dim A^{\perp}$.
   De même, $E = A^{\perp} \oplus \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ donc $\dim \left(A^{\perp}\right)^{\perp} = n - \dim A^{\perp}$.
   Donc $\dim \left(A^{\perp}\right)^{\perp} = \dim A$. (**)

   D'après (*) et (**), $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. (a) Procédons par double inclusion.

   Prouvons que $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$.
   Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   Soit $y \in F + G$.
   Alors $\exists\, (f,g) \in F \times G$ tel que $y = f + g$.
   $$(x \mid y) = \underbrace{(x \mid f)}_{\substack{=0 \\ \text{car } f \in F \text{ et } x \in F^{\perp}}} + \underbrace{(x \mid g)}_{\substack{=0 \\ \text{car } g \in G \text{ et } x \in G^{\perp}}} = 0.$$
   Donc $\forall\, y \in (F+G)$, $(x \mid y) = 0$.
   Donc $x \in (F+G)^{\perp}$.

   Prouvons que $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   Soit $x \in (F+G)^{\perp}$.
   $\forall\, y \in F$, on a $(x \mid y) = 0$ car $y \in F \subset F + G$.
   Donc $x \in F^{\perp}$.
   De même, $\forall\, z \in G$, on a $(x \mid z) = 0$ car $z \in G \subset F + G$.
   Donc $x \in G^{\perp}$.
   On en déduit que $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

   Finalement, par double inclusion, $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

   (b) D'après 2.(a), appliquée à $F^{\perp}$ et à $G^{\perp}$, on a $\left(F^{\perp} + G^{\perp}\right)^{\perp} = \left(F^{\perp}\right)^{\perp} \cap \left(G^{\perp}\right)^{\perp}$.
   Donc, d'après 1., $\left(F^{\perp} + G^{\perp}\right)^{\perp} = F \cap G$.
   Donc $\left(\left(F^{\perp} + G^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.
   C'est-à-dire, en utilisant 1. à nouveau, $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.

EXERCICE 79 algèbre

Énoncé exercice 79

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   On pose : $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Corrigé exercice 79

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.

   On pose $\forall\,x \in [a,b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)dt$.
   h est continue sur $[a,b]$ donc F est dérivable sur $[a,b]$.
   De plus, $\forall\,x \in [a,b]$, $F'(x) = h(x)$.
   Or h est positive sur $[a,b]$ donc F est croissante sur $[a,b]$. (*)
   Or $F(a) = 0$ et, par hypothèse, $F(b) = 0$. C'est-à-dire $F(a) = F(b)$. (**)

   D'après (*) et (**), F est constante sur $[a,b]$.
   Donc $\forall\,x \in [a,b]$, $F'(x) = 0$.
   C'est-à-dire, $\forall\,x \in [a,b]$, $h(x) = 0$.
2. On pose $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

   Par linéarité de l'intégrale, $(\,|\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ est symétrique.
   On en déduit que $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

   Soit $f \in E$. $(f|f) = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.
   Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive sur $[a,b]$ et $a < b$ donc $(f|f) \geqslant 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est positive. (**)

   Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$.
   Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[a,b]$.
   Donc, d'après 1., f est nulle sur $[a,b]$.
   Donc $(\,|\,)$ est définie. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E.
3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^1 x\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$.

EXERCICE 80 algèbre

Énoncé exercice 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Corrigé exercice 80

1. On pose $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(\,|\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ est symétrique.
   On en déduit que $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

   Soit $f \in E$. $(f|f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$.
   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive sur $[0, 2\pi]$ et $0 < 2\pi$, donc $(f|f) \geqslant 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est positive. (**)

   Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = 0$.
   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive et continue sur $[0, 2\pi]$.
   Donc, f est nulle sur $[0, 2\pi]$.
   Or f est 2π-périodique donc $f = 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est définie. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E.
2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$.
   $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x) \in F$.
   De plus, si on note h l'application $x \mapsto \dfrac{1}{2}$,
   $(h|f) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x \mathrm{d}x = 0$ et $(h|g) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2x)\mathrm{d}x = 0$ donc $h \in F^{\perp}$ (car $F = \mathrm{Vect}(f, g)$).

   On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

EXERCICE 81 algèbre

Énoncé exercice 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Corrigé exercice 81

1. On a immédiatement $\mathcal{F} = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On peut donc affirmer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   $\mathcal{F} = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathcal{F}$.
   De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.
   On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Comme (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$,
   $M \in \mathcal{F}^\perp \iff \varphi(M, \mathrm{I}_2) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0$.
   C'est-à-dire, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff a + d = 0$ et $b - c = 0$.
   Ou encore, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff d = -a$ et $c = b$.
   On en déduit que $\mathcal{F}^\perp = \operatorname{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{F}^\perp$ donc (A, B) est une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. On peut écrire $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.
   Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}^\perp$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. On note $d(J, \mathcal{F})$ la distance de J à $\mathcal{F}$.
   D'après le cours, $d(J, \mathcal{F}) = ||J - p_{\mathcal{F}}(J)||$ où $p_{\mathcal{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}$.
   On peut écrire à nouveau que $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.
   Donc $p_{\mathcal{F}}(J) = \mathrm{I}_2$.
   On en déduit que $d(J, \mathcal{F}) = ||J - p_{\mathcal{F}}(J)|| = ||J - \mathrm{I}_2|| = ||B|| = \sqrt{2}$.

EXERCICE 82 algèbre

Énoncé exercice 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Corrigé exercice 82

1. On pose $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, $B = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   $(A + A'|B) = \left(\begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right) = (a + a')a'' + (b + b')b'' + (c + c')c'' + (d + d')d''$.
   Donc $(A + A'|B) = (aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + (a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') = (A|B) + (A'|B)$.
   $(\alpha A|B) = \left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right) = \alpha aa'' + \alpha bb'' + \alpha cc'' + \alpha dd'' = \alpha\,(A|B)$.
   On en déduit que $(\,.\,|\,.\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   De plus, par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,.\,|\,.\,)$ est symétrique.
   Donc $(\,.\,|\,.\,)$ est une forme bilinéaire et symétrique. (*)

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.
   $(A|A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0$. Donc $(\,.\,|\,.\,)$ est positive. (**)

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ telle que $(A|A) = 0$.
   Alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$.
   Comme il s'agit d'une somme de termes tous positifs, on en déduit que $a = b = c = d = 0$ donc $A = 0$.
   Donc $(\,.\,|\,.\,)$ est définie. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur E.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in F$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in F^\perp$ car $\forall (a, b, d) \in \mathbb{R}^3$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = 0$.

   On en déduit que le projeté orthogonal, noté $p_F(A)$, de A sur F est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $d(A, F) = ||A - p_F(A)|| = || \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} || = 1$.

EXERCICE 84 algèbre

Énoncé exercice 84

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Corrigé exercice 84

1. Soit z un complexe non nul. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
   Un argument de z est un réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. $z = 0$ n'est pas solution de l'équation $z^n = 1$.
   Les complexes solutions s'écriront donc sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   On a $z^n = 1 \iff \left\{\begin{array}{c} r^n = 1 \\ \text{et} \\ n\theta = 0 \mod 2\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} r = 1 \\ \text{et} \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$
   Les réels $\dfrac{2k\pi}{n}$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont deux à deux distincts et $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi[$.
   Or $\begin{array}{ccc} [0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{array}$ est injective.
   Donc, $\left\{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ est constitué de n solutions distinctes de l'équation $z^n = 1$.
   Les solutions de l'équation $z^n = 1$ étant également racines du polynôme $X^n - 1$, il ne peut y en avoir d'autres.
   Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ est $S = \left\{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.
3. $z = i$ n'étant pas solution de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$,

$$\begin{aligned}
(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n &\iff \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n = 1 \\
&\iff \exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \\
&\iff \exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } z\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right) = -\mathrm{i}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right)
\end{aligned}$$

   En remarquant que $z\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right) = -\mathrm{i}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right)$ n'admet pas de solution pour $k = 0$, on en déduit que :

$$(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n \iff \exists\, k \in [\![1, n-1]\!] \text{ tel que } z = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} - 1}$$

   En écrivant $\mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} - 1} = \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}} = \mathrm{i}\,\dfrac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$, on voit que les solutions sont des réels.

   On pouvait aussi voir que si z est solution de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ alors $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$ et donc le point d'affixe z appartient à la médiatrice de $[A, B]$, A et B étant les points d'affixes respectives i et $-\mathrm{i}$, c'est-à-dire à la droite des réels.

EXERCICE 85 algèbre

Énoncé exercice 85

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Corrigé exercice 85

1. (a) $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.
   (b)

$$\begin{aligned}
a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-r}[X] \text{ tel que } Q(a) \neq 0 \text{ et } P = (X-a)^r Q \\
&\iff \exists (q_0, \ldots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = (X-a)^r \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^i \\
&\iff \exists (q_0, \ldots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^{r+i} \\
&\iff \exists (q_0, \ldots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{k=r}^{n} q_{k-r} (X-a)^k
\end{aligned}$$

   D'après la formule de Taylor (rappelée ci-dessus) et l'unicité de la décomposition de P dans la base $(1, (X-a), \ldots, (X-a)^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ il vient enfin :

$$a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P \iff \forall k \in \{0, \ldots, r-1\} \quad P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } P^{(r)}(a) \neq 0$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
1 \text{ est racine double de } P = X^5 + aX^2 + bX &\iff P(1) = P'(1) = 0 \text{ et } P''(1) \neq 0 \\
&\iff \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \\ 20 + 2a \neq 0 \end{cases} \\
&\iff a = -4 \text{ et } b = 3
\end{aligned}$$

   On obtient $X^5 - 4X^2 + 3X = X(X-1)^2(X^2+2X+3)$ et c'est la factorisation cherchée car le discriminant de $X^2 + 2X + 3$ est strictement négatif.

EXERCICE 86 algèbre

Énoncé exercice 86

1. Soit $(a,b,p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$.
   Indication : procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Corrigé exercice 86

1. On suppose $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$.
   D'après le théorème de Bézout,
   $\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_1 p + v_1 a = 1$. (1)
   $\exists (u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_2 p + v_2 b = 1$. (2)
   En multipliant les équations (1) et (2), on obtient :
   $\underbrace{(u_1 u_2 p + u_1 v_2 b + u_2 v_1 a)}_{\in \mathbb{Z}} p + \underbrace{(v_1 v_2)}_{\in \mathbb{Z}}(ab) = 1$.
   Donc, d'après le théorème de Bézout, $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. $\binom{p}{k} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$.
   Donc $\binom{p}{k} k! = p(p-1)...(p-k+1)$.
   donc $p \mid \binom{p}{k} k!$. (3)
   Or, $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $p \wedge i = 1$ (car p est premier) donc, d'après 1., $p \wedge k! = 1$.
   Donc, d'après le lemme de Gauss, (3) $\Longrightarrow p \mid \binom{p}{k}$.
   (b) Procédons par récurrence sur n.
   Pour $n = 0$ et pour $n = 1$, la propriété est vérifiée.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Supposons que la propriété (P_n) : $n^p \equiv n \mod p$ soit vérifiée.
   Alors, d'après la formule du binôme de Newton, $(n+1)^p = n^p + \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + 1$. (4)
   Or $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \mid \binom{p}{k}$ donc $p \mid \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$.
   Donc d'après (4) et (P_n), $(n+1)^p \equiv n+1 \mod p$ et (P_{n+1}) est vraie.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que p ne divise pas n.
   Comme p est premier, alors $p \wedge n = 1$.
   La question précédente donne p divise $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$.
   Or comme p est premier avec n, on en déduit, d'après le lemme de Gauss, que p divise $n^{p-1} - 1$.
   Ce qui signifie que $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$. (petit théorème de Fermat).

EXERCICE 87 algèbre

Énoncé exercice 87

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant
$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Corrigé exercice 87

1. L'application $u : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \cdots, P(a_n)) \end{array}$ est linéaire.
Montrons que $\mathrm{Ker} u = \{0\}$.

   Si $P \in \mathrm{Ker} u$, alors $P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$ et le polynôme P, de degré inférieur ou égal à n, admet $n+1$ racines distinctes.
Donc $P = 0$.
Ainsi u est injective et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

   Enfin les conditions recherchées sont équivalentes à : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u(P) = (b_0, \ldots, b_n)$.

   La bijectivité de u dit que ce problème admet une unique solution P et on a $P = u^{-1}((b_0, \ldots, b_n))$.

2. Pour ce choix de $b_0, b_1, \cdots, b_n$ le polynôme L_k vérifie les conditions :
$$\deg L_k \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0,n]\!],\ L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

   Comme $a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ sont n racines distinctes de L_k qui est de degré $\leqslant n$, il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$$L_k = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)$$

   La condition supplémentaire $L_k(a_k) = 1$ donne $\lambda = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i)}$ et finalement :
$$L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

3. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.

   Les polynômes $\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k$ et X^p vérifient les mêmes conditions d'interpolation :

   $$\deg P \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, \cdots, n\} \quad P(a_i) = a_i^p$$

   Par l'unicité vue en première question, on a $\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

EXERCICE 89 algèbre

Énoncé exercice 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Corrigé exercice 89

1. On pose $Z = z^k - 1$.
   $Z = e^{\mathrm{i}\,\dfrac{k2\pi}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}} \right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}}\, 2\mathrm{i} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

   c'est-à-dire $Z = 2\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\dfrac{k\pi}{n}+\dfrac{\pi}{2})}$

   Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $0 < \frac{k\,\pi}{n} < \pi$, donc $\sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right) > 0$.

   Donc le module de Z est $2\,\sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right)$ et un argument de Z est $\dfrac{k\pi}{n} + \dfrac{\pi}{2}$.
2. On remarque que pour $k = 0$, $|z^k - 1| = 0$ et $\sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right) = 0$.

   Donc d'après la question précédente, on a $S = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right)$.

   S est donc la partie imaginaire de $T = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}}$.

   Or, comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{n}} \neq 1$, on a $T = 2\dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}} = \dfrac{4}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}$.

   Or $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}} \right) = -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}} \sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

   On en déduit que $T = \dfrac{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}}}{-2\mathrm{i}\,\sin\dfrac{\pi}{2n}} = \dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}}$.

   En isolant la partie imaginaire de T, et comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) \neq 0$ $(n \geqslant 2)$, on en déduit que $S = \dfrac{2}{\tan\dfrac{\pi}{2n}}$.

EXERCICE 90 algèbre

Énoncé exercice 90

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Corrigé exercice 90

1. Par linéarité de l'évaluation $P \mapsto P(a)$ (où a est un scalaire fixé), Φ est linéaire.

   Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$.
   Alors $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$, donc P admet trois racines distinctes.
   Or P est de degré inférieur ou égal à 2 ; donc P est nul.
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$ i.e. Φ est injective.

   Enfin, $\dim\big(\mathbb{K}_2[X]\big) = \dim\big(\mathbb{K}^3\big) = 3$ donc Φ est bijective.

   Par conséquent, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.

2. (a) Φ est un isomorphisme donc l'image réciproque d'une base est une base.
   Ainsi, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

   (b) $L_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et vérifie $\Phi(L_1) = (1, 0, 0)$ i.e. $\big(L_1(a_1), L_1(a_2), L_1(a_3)\big) = (1, 0, 0)$.
   Donc, comme a_2 et a_3 sont distincts, $(X - a_2)(X - a_3) \,|L_1$.
   Or $\deg L_1 \leqslant 2$, donc $\exists k \in \mathbb{K}$ tel que $L_1 = k(X - a_2)(X - a_3)$.
   La valeur $L_1(a_1) = 1$ donne $k = \dfrac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.
   Donc $L_1 = \dfrac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.
   Un raisonnement analogue donne $L_2 = \dfrac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}$ et $L_3 = \dfrac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$.

3. (L_1, L_2, L_3) base de $\mathbb{K}_2[X]$ donc $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$.
   Par construction, $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, L_i(a_j) = \delta_{ij}$ donc $P(a_j) = \lambda_j$.
   Ainsi, $P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$.

4. On pose $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$. Ces trois réels sont bien distincts.
   On cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) = (1, 3, 1)$.
   Par bijectivité de Φ et d'après 3. , l'unique solution est le polynôme $P = 1.L_1 + 3.L_2 + 1.L_3$.
   On a $L_1 = \dfrac{(X - 1)(X - 2)}{2}$, $L_2 = \dfrac{X(X - 2)}{-1}$ et $L_3 = \dfrac{X(X - 1)}{2}$.
   Donc $P = -2X^2 + 4X + 1$.

EXERCICE 92 algèbre

Énoncé exercice 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.

On pose : $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A\,,B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^{\perp} = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^{\perp}$.

Corrigé exercice 92

1. $\langle\,,\rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable par linéarité de la trace, de la transposition et par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans E.
   De plus, une matrice et sa transposée ayant la même trace, on a :
   $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A\,,B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}\left(\left(A^T B\right)^T\right) = \operatorname{tr}(B^T A) = \langle B\,,A\rangle$.
   Donc $\langle\,,\rangle$ est symétrique.
   On en déduit que $\langle\,,\rangle$ est bilinéaire et symétrique. (1)

   Soit $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$.
   $\langle A\,,A\rangle = \operatorname{tr}(A^T A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(A^T A)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(A^T)_{i,k}A_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{k,i}^2$ donc $\langle A\,,A\rangle \geqslant 0$.
   Donc $\langle\,,\rangle$ est positive. (2)

   Soit $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$ telle que $\langle A\,,A\rangle = 0$.
   Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{k,i}^2 = 0$. Or, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $A_{k,i}^2 \geqslant 0$.
   Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $A_{k,i} = 0$. Donc $A = 0$.
   Donc $\langle\,,\rangle$ est définie. (3)

   D'après (1),(2) et (3), $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

   Remarque importante : Soit $(A,B) \in E^2$.
   On pose $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
   Alors $\langle A\,,B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(A^T B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(A^T\right)_{i,k}B_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{k,i}B_{k,i}$.
   Donc $\langle\,,\rangle$ est le produit scalaire canonique sur E.

2. (a) Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$.
   alors $M^T = M$ et $M^T = -M$ donc $M = -M$ et $M = 0$.
   Donc $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. (1)

   Soit $M \in E$.
   Posons $S = \dfrac{M + M^T}{2}$ et $A = \dfrac{M - M^T}{2}$.
   On a $M = S + A$.
   $S^T = \left(\dfrac{M + M^T}{2}\right)^T = \dfrac{1}{2}\left(M^T + (M^T)^T\right) = \dfrac{1}{2}\left(M^T + M\right) = S$, donc $S \in S_n(\mathbb{R})$.
   $A^T = \left(\dfrac{M - M^T}{2}\right)^T = \dfrac{1}{2}\left(M^T - (M^T)^T\right) = \dfrac{1}{2}\left(M^T - M\right) = -A$, donc $A \in A_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que $E = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$. (2)

D'après (1) et (2), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
Remarque : on pouvait également procéder par analyse et synthèse pour prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouvons que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.
Prouvons que $\forall\, A \in A_n(\mathbb{R})$, $\langle S\,, A\rangle = 0$.
Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$.
$\langle S\,, A\rangle = \mathrm{tr}(S^T A) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(-A^T S) = -\mathrm{tr}(A^T S) = -\langle A\,, S\rangle = -\langle S\,, A\rangle$.
Donc $2\langle S\,, A\rangle = 0$ soit $\langle S\,, A\rangle = 0$.

On en déduit que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$ (1)

De plus, $\dim A_n(\mathbb{R})^{\perp} = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.
Or, d'après 2.(a), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ donc $\dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^{\perp}$. (2)

D'après (1) et (2), $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.

3. On introduit la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :
$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $E_{i,j} = (e_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ avec $e_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
On a alors $F = \mathrm{Vect}\,(E_{1,1}, E_{2,2}, ..., E_{n,n})$.
Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$.
Alors, en utilisant la remarque importante de la question 1.,
$M \in F^{\perp} \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle M\,, E_{i,i}\rangle = 0 \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ m_{i,i} = 0$.
Donc $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(E_{i,j} \text{ telles que } (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ et } i \neq j\right)$.
En d'autres termes, $F^{\perp}$ est l'ensemble des matrices comprenant des zéros sur la diagonale.

EXERCICE 94 algèbre

Énoncé exercice 94

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbb{N}$.

   Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
3. On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{ccc} x & \equiv & 6 \quad [17] \\ x & \equiv & 4 \quad [15] \end{array}\right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Corrigé exercice 94

1. Théorème de Bézout :
   Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
   $a \wedge b = 1 \Longleftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \;/\; au + bv = 1$.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $a \wedge b = 1$.
   Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouvons que $ab|c \Longrightarrow a|c \text{ et } b|c$.
   Si $ab|c$ alors $\exists k \in \mathbb{Z} \;/\; c = kab$.
   Alors, $c = (kb)a$ donc $a|c$ et $c = (ka)b$ donc $b|c$.

   Prouvons que $(a|c \text{ et } b|c) \Longrightarrow ab|c$.
   $a \wedge b = 1$ donc $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \;/\; au + bv = 1$. (1)
   De plus $a|c$ donc $\exists k_1 \in \mathbb{Z} \;/\; c = k_1 a$. (2)
   De même, $b|c$ donc $\exists k_2 \in \mathbb{Z} \;/\; c = k_2 b$. (3)
   On multiplie (1) par c et on obtient $cau + cbv = c$.
   Alors, d'après (2) et (3), $(k_2 b)au + (k_1 a)bv = c$, donc $(k_2 u + k_1 v)(ab) = c$ et donc $ab|c$.

   On a donc prouvé que $(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
3. (a) **Première méthode** (méthode générale) :
   Soit $x \in \mathbb{Z}$.

   $$\begin{array}{rcl} x \text{ solution de}(S) & \Longleftrightarrow & \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 17k \\ x = 4 + 15k' \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 17k \\ 6 + 17k = 4 + 15k' \end{array}\right. \end{array}$$

   Or $6 + 17k = 4 + 15k' \Longleftrightarrow 15k' - 17k = 2$.
   Pour déterminer une solution particulière x_0 de (S), il suffit donc de trouver une solution particulière (k_0, k_0') de l'équation $15k' - 17k = 2$.
   Pour cela, cherchons d'abord, une solution de l'équation $15u + 17v = 1$.
   17 et 15 sont premiers entre eux.
   Déterminons alors un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tel que $15u_0 + 17v_0 = 1$.
   On a : $17 = 15 \times 1 + 2$ puis $15 = 7 \times 2 + 1$.
   Alors $1 = 15 - 7 \times 2 = 15 - 7 \times (17 - 15 \times 1) = 15 - 17 \times 7 + 15 \times 7 = 15 \times 8 - 17 \times 7$
   Donc $8 \times 15 + (-7) \times 17 = 1$

   Ainsi, $16 \times 15 + (-14) \times 17 = 2$.

   On peut prendre alors $k_0' = 16$ et $k_0 = 14$.
   Ainsi, $x_0 = 6 + 17 \times k_0 = 6 + 17 \times 14 = 244$ est une solution particulière de (S).

   Deuxième méthode :
   En observant le système (S), on peut remarquer que $x_0 = -11$ est une solution particulière.
   Cette méthode est évidemment plus rapide mais ne fonctionne pas toujours.

(b) x_0 solution particulière de (S) donc $\begin{cases} x_0 & = & 6 \quad [17] \\ x_0 & = & 4 \quad [15] \end{cases}$.

On en déduit que x solution de (S) si et seulement si $\begin{cases} x - x_0 & = & 0 \quad [17] \\ x - x_0 & = & 0 \quad [15] \end{cases}$

c'est-à-dire x solution de $(S) \iff (17|x - x_0$ et $15|x - x_0)$.

Or $17 \wedge 15 = 1$ donc d'après 2., x solution de (S) $\iff (17 \times 15)|x - x_0$.

Donc l'ensemble des solutions de (S) est $\{x_0 + 17 \times 15k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{244 + 255k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

BANQUE PROBABILITÉS

EXERCICE 95 probabilités

Énoncé exercice 95

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Corrigé exercice 95

1. (a) L'expérience est la suivante : l'épreuve "le tirage d'une boule dans l'urne" est répétée 5 fois.
   Comme les tirages se font avec remise, ces 5 épreuves sont indépendantes.
   Chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le joueur tire une boule blanche (succès avec la probabilité $p = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$) ou le joueur tire une boule noire (échec avec la probabilité $\dfrac{4}{5}$).
   La variable X considérée représente donc le nombre de succès au cours de l'expérience et suit donc une loi binomiale de paramètre $(5, \dfrac{1}{5})$.

   C'est-à-dire $X(\Omega) = [\![0,5]\!]$ et : $\forall\, k \in [\![0,5]\!]$, $P(X=k) = \binom{5}{k}(\dfrac{1}{5})^k(\dfrac{4}{5})^{5-k}$.

   Donc, d'après le cours, $E(X) = 5 \times \dfrac{1}{5} = 1$ et $V(X) = 5 \times \dfrac{1}{5} \times \left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{4}{5} = 0,8$.

   (b) D'après les hypothèses, on a $Y = 2X - 3(5-X)$, c'est-à-dire $Y = 5X - 15$.
   On en déduit que $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in [\![0,5]\!]\}$.

   Et on a $\forall\, k \in [\![0,5]\!]$, $P(Y = 5k-15) = P(X=k) = \binom{5}{k}(\dfrac{1}{5})^k(\dfrac{4}{5})^{5-k}$.

   $Y = 5X - 15$, donc $E(Y) = 5E(X) - 15 = 5 - 15 = -10$.

   De même, $Y = 5X - 15$, donc $V(Y) = 25V(X) = 25 \times \dfrac{4}{5} = 20$.
2. Dans cette question, le joueur tire successivement, sans remise, 5 boules dans cette urne.
   (a) Comme les tirages se font sans remise, on peut supposer que le joueur tire les 5 boules dans l'urne en une seule fois au lieu de les tirer successivement. Cette supposition ne change pas la loi de X.
   $X(\Omega) = [\![0,2]\!]$.
   Notons A l'ensemble dont les éléments sont les 10 boules initialement dans l'urne.
   L'univers Ω correspond à l'ensemble des tirages possibles dans A.
   Il est constitué de toutes les parties à 5 éléments de A.
   Donc $\operatorname{card}\Omega = \dbinom{10}{5}$.

   Soit $k \in [\![0,2]\!]$.
   L'événement $(X = k)$ est réalisé lorsque le joueur tire k boules blanches et $(5-k)$ boules noires dans l'urne.
   Notons A_k l'ensemble des parties à 5 éléments de A contenant k boules blanches et $(5-k)$ boules noires.

Il y a $\binom{2}{k}$ possibilités pour le choix des boules blanches et $\binom{8}{5-k}$ possibilités pour le choix des boules noires.
C'est-à-dire, $\text{card}A_k = \binom{2}{k}\binom{8}{5-k}$.

Donc, comme tous les tirages sont équiprobables, $\forall\, k \in [\![0,2]\!]$, $P(X=k) = \dfrac{\text{card}A_k}{\text{card}\Omega} = \dfrac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.

(b) On a toujours $Y = 5X - 15$.
On en déduit que $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in [\![0,2]\!]\}$.

Et on a $\forall\, k \in [\![0,2]\!]$, $P(Y = 5k-15) = P(X=k) = \dfrac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.

EXERCICE 98 probabilités

Énoncé exercice 98

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k|X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Corrigé exercice 98

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont indépendantes.
   De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1 - p$ (échec).
   La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binômiale de paramètres (n, p).
   C'est-à-dire $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2. (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$.
   Sous la condition $(X = i)$, la secrétaire rappelle $n - i$ correspondants lors de la seconde série d'appels.
   Comme cette nouvelle série d'appels se fait dans les mêmes conditions que pour la question 1., sauf pour le nombre de répétitions qui est maintenant égal à $n - i$, alors on se retrouve dans le schéma d'une loi binomiale de paramètre $(n - i, p)$.

   Donc $P(Y = k|X = i) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in [\![0, n-i]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

   (b) $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i \cap Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(Y = k - i|X = i)P(X = i)$.

   Soit $k \in [\![0,n]\!]$. D'après les questions précédentes, $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} p^k (1-p)^{2n-k-i}$.

   Or, d'après l'indication, $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

   Donc $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i$.
   Donc d'après le binôme de Newton,
   $P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k = \binom{n}{k} (p(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k}$.
   On vérifie que $1 - p(2 - p) = (1 - p)^2$ et donc on peut conclure que :
   Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2 - p))$.

   Remarque : preuve (non demandée dans l'exercice) de l'égalité proposée dans l'indication :
   $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{(n-k)!\,(k-i)!}\frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n!}{(k-i)!\,(n-k)!\,i!} = \frac{k!}{(k-i)!\,i!}\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

(c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$, alors :
$E(Z) = np(2-p)$ et $V(Z) = np(2-p)\,(1-p(2-p)) = np(2-p)(p-1)^2$.

EXERCICE 99 probabilités

Énoncé exercice 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi [redacted].

   On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Prouver que : $\forall\, a \in]0,+\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Corrigé exercice 99

1. Soit $a \in]0,+\infty[$. Pour toute variable aléatoire X [redacted], on a :
   $P\left(|X - E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$.
2. On pose $X = \dfrac{S_n}{n}$.
   Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.
   De plus, comme les variables sont indépendantes, on a $V(X) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{1}{n}V(Y_1)$.
   Alors, en appliquant 1. à X, on obtient le résultat souhaité.
3. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.
   Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \dfrac{2}{5} = 0,4$.
   Les variables Y_i suivent la même loi, sont indépendantes et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i \in L^2$.
   On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1-0,4) = 0,24$.
   On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   Alors $T_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) > 0,95$.
   Or $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) = P\left(0,35 \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant 0,45\right) = P\left(-0,05 \leqslant \dfrac{S_n}{n} - E(Y_1) \leqslant 0,05\right)$
   $= P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leqslant 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   On a donc $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Donc $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) \geqslant 1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n, on a $1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2} \geqslant 0,95$.
   La résolution de cette inéquation donne $n \geqslant \dfrac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geqslant 1920$.

EXERCICE 104 probabilités

Énoncé exercice 104

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Corrigé exercice 104

1. $X(\Omega) = [\![0, 2]\!]$.
2. (a) Pour que l'événement $(X = 2)$ se réalise, on a $\binom{3}{2}$ possibilités pour choisir les 2 compartiments restant vides. Les deux compartiments restant vides étant choisis, chacune des n boules viendra se placer dans le troisième compartiment avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.
   De plus les placements des différentes boules dans les trois compartiments sont indépendants.
   Donc $P(X = 2) = \dbinom{3}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

   (b) Déterminons $P(X = 1)$.
   Pour que l'événement $(X = 1)$ se réalise, on a $\binom{3}{1}$ possibilités pour choisir le compartiment restant vide. Le compartiment restant vide étant choisi, on note A l'événement : «les n boules doivent se placer dans les deux compartiments restants (que nous appellerons compartiment a et compartiment b) sans laisser l'un d'eux vide».

   Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   On note A_k l'événement : « k boules se placent dans le compartiment a et les $(n-k)$ boules restantes dans le compartiment b».
   On a alors $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k$.
   On a $\forall\, k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(A_k) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k} = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

   Donc $P(X = 1) = \dbinom{3}{1}P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k\right) = 3\sum\limits_{k=1}^{n-1} P(A_k)$ car $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ sont deux à deux incompatibles.
   Donc
   $P(X = 1) = 3\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dbinom{n}{k} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k} - 2\right) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 2)$.
   Donc $P(X = 1) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 2)$.

   Enfin, $P(X = 0) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1)$ donc $P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 2)$.
   Donc $P(X = 0) = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 1)$.

Autre méthode :
Une épreuve peut être assimilée à une application de $[\![1,n]\!]$ (ensemble des numéros des boules) dans $[\![1,3]\!]$ (ensemble des numéros des cases).
Notons Ω l'ensemble de ces applications.
On a donc : $\operatorname{card}\Omega = 3^n$.
Les boules vont se "ranger aléatoirement dans les trois compartiments", donc il y a équiprobabilité sur Ω.

(a) L'événement $(X = 2)$ correspond aux applications dont les images se concentrent sur le même élément de $[\![1,3]\!]$, c'est-à-dire aux applications constantes.
Donc $P(X=2) = \dfrac{3}{3^n} = \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

(b) Comptons à présent le nombre d'applications correspondant à l'événement $(X = 1)$, c'est-à-dire le nombre d'applications dont l'ensemble des images est constitué de deux éléments exactement.
On a 3 possibilités pour choisir l'élément de $[\![1,3]\!]$ qui n'a pas d'antécédent et ensuite, chaque fois, il faut compter le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ vers les deux éléments restants de $[\![1,3]\!]$, en excluant bien sûr les deux applications constantes.
On obtient donc $2^n - 2$ applications.
D'où $P(X=1) = \dfrac{3\times(2^n-2)}{3^n} = \dfrac{1}{3^{n-1}}\,(2^n-2)$.

Enfin, comme dans la méthode précédente, $P(X = 0) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1)$ donc
$P(X=0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

3. (a) $E(X) = 0P(X=0) + 1P(X=1) + 2P(X=2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2) + 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

   Donc $E(X) = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   (b) D'après 3.(a), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X) = \lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.
   Quand le nombre de boules tend vers $+\infty$, en moyenne aucun des trois compartiments ne restera vide.

EXERCICE 105 probabilités

Énoncé exercice 105

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Corrigé exercice 105

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
   Soit B un événement de probabilité non nulle et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   Alors, $\forall\, i_0 \in I$, $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}$.

   Preuve : $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i0}}(B)}{P(B)}$. (1)

   Or $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements donc $P(B) = \displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i \cap B)$.

   Donc $P(B) = \displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)$. (2).

   (1) et (2) donnent le résultat souhaité.

2. (a) On tire au hasard un dé parmi les 100 dés.
   Notons T l'événement : «le dé choisi est pipé».
   Notons A l'événement :« On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
   On demande de calculer $P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.

   On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \dfrac{3}{4}$.

   Alors, d'après la formule de Bayes, on a :

   $$P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\times\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On choisit au hasard un dé parmi les 100 dés.
   $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient le chiffre 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

   On pose $A = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k$.

   On nous demande de calculer $p_n = P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.

   On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$.

   Alors d'après la formule de Bayes, on a :

$$p_n = P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P\left(\overline{T}\right)}$$

Donc $p_n = \dfrac{\dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{6}\right)^n \times \dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}}$.

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}}$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$.

Ce qui signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

EXERCICE 107 probabilités

Énoncé exercice 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Corrigé exercice 107

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1.
   Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2.
   (U_1, U_2) est un système complet dévénements.
   Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
   Donc $p_1 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{35}$
   On a donc $p_1 = \dfrac{17}{35}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
   Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
   Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{4}{7}(1 - p_n)$.
   Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
   Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
   On résout l'équation $l = -\dfrac{6}{35}l + \dfrac{4}{7}$ et on trouve $l = \dfrac{20}{41}$.
   On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - l$.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\dfrac{6}{35}$, donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
   Or $u_1 = p_1 - l = \dfrac{17}{35} - \dfrac{20}{41} = -\dfrac{3}{1435}$.
   On en déduit que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\dfrac{3}{1435}\left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} + \dfrac{20}{41}$.

EXERCICE 109 probabilités

Énoncé exercice 109

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Corrigé exercice 109

1. $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
   $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, on note B_i la $i^{\text{ème}}$ boule blanche.
   $\forall\, i \in [\![1, 2]\!]$, on note N_i la $i^{\text{ème}}$ boule noire.
   On pose $E = \{B_1, B_2, ..., B_n, N_1, N_2\}$.
   Alors Ω est l'ensemble des permutations de E et donc $\text{card}(\Omega) = (n + 2)!$.

   $(X = 1)$ correspond aux tirages des $(n + 2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est blanche.
   On a donc n possibilités pour le choix de la première boule blanche et donc $(n + 1)!$ possibilités pour les tirages restants.
   Donc $P(X = 1) = \dfrac{n \times (n + 1)!}{(n + 2)!} = \dfrac{n}{n + 2}$.

   $(X = 2)$ correspond aux tirages des $(n + 2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est noire et la seconde est blanche.
   On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis n possibilités pour la seconde boule et enfin $n!$ possibilités pour les tirages restants.
   Donc $P(X = 2) = \dfrac{2 \times n \times (n)!}{(n + 2)!} = \dfrac{2n}{(n + 1)(n + 2)}$.

   $(X = 3)$ correspond aux tirages des $(n + 2)$ boules pour lesquels la première boule et la seconde boule sont noires.
   On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis une seule possibilité pour la seconde et enfin $n!$ possibilités pour les boules restantes.
   Donc $P(X = 3) = \dfrac{2 \times 1 \times (n)!}{(n + 2)!} = \dfrac{2}{(n + 1)(n + 2)}$.

   Autre méthode :
   Dans cette méthode, on ne s'interesse qu'aux "premières" boules tirées, les autres étant sans importance.
   $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.

   $(X = 1)$ est l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage".
   Donc $P(X = 1) = \dfrac{\text{nombre de boules blanches}}{\text{nombre de boules de l'urne}} = \dfrac{n}{n + 2}$.

   $(X = 2)$ est l'événement : " obtenir une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au second tirage".
   D'où $P(X = 2) = \dfrac{2}{n + 2} \times \dfrac{n}{n + 1} = \dfrac{2n}{(n + 2)(n + 1)}$, les tirages se faisant sans remise.

   $(X = 3)$ est l'événement : "obtenir une boule noire lors de chacun des deux premiers tirages puis une boule blanche au troisième tirage".
   D'où $P(X = 3) = \dfrac{2}{n + 2} \times \dfrac{1}{n + 1} \times \dfrac{n}{n} = \dfrac{2}{(n + 2)(n + 1)}$, les tirages se faisant sans remise.
2. $Y(\Omega) = [\![1, n + 1]\!]$.
   Soit $k \in [\![1, n + 1]\!]$.

L'événement $(Y = k)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules où les $(k-1)$ premières boules tirées ne sont ni B_1 ni N_1 et la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est B_1 ou N_1.
On a donc, pour les $(k-1)$ premières boules tirées , $\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}$ choix possibles de ces boules et $(k-1)!$ possibilités pour leur rang de tirage sur les $(k-1)$ premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la $k^{\text{ième}}$ boule et enfin $(n+2-k)!$ possibilités pour les rangs de tirage des boules restantes.

Donc $P(Y=k) = \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} \times (k-1)! \times 2 \times (n+2-k)!}{(n+2)!} = \dfrac{2\dfrac{n!}{(n-k+1)!} \times (n+2-k)!}{(n+2)!}$

Donc $P(Y=k) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.

Autre méthode :
$Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.

On note A_k l'événement " une boule ne portant pas le numéro 1 est tirée au rang k".

Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.
On a : $(Y = k) = A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}$.

Alors, d'après la formule des probabilités composées,
$P(Y=k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)...P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-2}}(A_{k-1})P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1}}(\overline{A_k})$.

$P(Y=k) = \dfrac{n}{n+2} \times \dfrac{n-1}{(n+2)-1} \times \dfrac{n-2}{(n+2)-2} \times ... \times \dfrac{n-(k-2)}{(n+2)-(k-2)} \times \dfrac{2}{(n+2)-(k-1)}$

$P(Y=k) = \dfrac{n}{n+2} \times \dfrac{n-1}{n+1} \times \dfrac{n-2}{n} \times ... \times \dfrac{n-k+2}{n-k+4} \times \dfrac{2}{n-k+3}$.

$P(Y=k) = 2\,\dfrac{n!}{(n-k+1)!} \times \dfrac{(n-k+2)!}{(n+2)!}$.

$P(Y=k) = \dfrac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}$.

EXERCICE 112 probabilités

Énoncé exercice 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Corrigé exercice 112

1. On note $F = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\right\}$.
   Soit $p \in [\![0, n]\!]$. On pose $F_p = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset B \text{ et } \operatorname{card} B = p\right\}$.
   Pour une partie B à p éléments donnée, le nombre de parties A de E telles que $A \subset B$ est $\operatorname{card} \mathcal{P}(B) = 2^p$.
   De plus, on a $\binom{n}{p}$ possibilités pour choisir une partie B de E à p éléments.
   On en déduit que : $\forall\, p \in [\![0, n]\!]$, $\operatorname{card} F_p = \binom{n}{p} 2^p$.

   Or $F = \bigcup\limits_{p=0}^{n} F_p$ avec $F_0, F_1, ..., F_n$ deux à deux disjoints.

   Donc $a = \operatorname{card} F = \sum\limits_{p=0}^{n} \operatorname{card} F_p = \sum\limits_{p=0}^{n} \dbinom{n}{p} 2^p = 3^n$, d'après le binôme de Newton.

   Conclusion : $a = 3^n$.

   Autre méthode :
   Le raisonnement suivant (corrigé non détaillé) permet également de répondre à la question 1.
   Notons encore $F = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\right\}$.
   À tout couple (A, B) de F, on peut associer l'application $\varphi_{A,B}$ définie par :

   $$\varphi_{A,B} : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \{1, 2, 3\} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in A \\ 2 & \text{si} & x \notin A \text{ et } x \in B \\ 3 & \text{si} & x \notin B \end{array}\right. \end{array}$$

   On note $\mathcal{A}(E, \{1, 2, 3\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{1, 2, 3\}$.

   Alors l'application $\Theta : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathcal{A}(E, \{1, 2, 3\}) \\ (A, B) & \longmapsto & \varphi_{A,B} \end{array}$ est bijective.
   Le résultat en découle.
2. $\left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \cap B = \emptyset\right\} = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\}$.

   $$\begin{array}{rcl} \text{Or card } \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\} & = & \text{card } \left\{(A, \overline{B}) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\} \\ & = & \text{card } \left\{(A, C) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset C\right\} \\ & = & a. \end{array}$$

   Donc $b = a$.
3. Compter tous les triplets (A, B, C) tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et tels que $A \cup B \cup C = E$ revient à compter tous les couples (A, B) tels que $A \cap B = \emptyset$ car, alors, C est obligatoirement égal à $\overline{A \cup B}$.

   En d'autres termes, $c = \operatorname{card} \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \cap B = \emptyset\right\} = b = 3^n$.