Séance du 22/05 : Algèbre linéaire

Ex 1 : [CCINP 2023] On note S l'espace vectoriel des suites complexes. On considère l'endomorphisme (de décalage) de S défini par $L\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Trouver le noyau de $L - \lambda\,\mathrm{id}$ et celui de $(L - \lambda\mathrm{id})^2$.
2. On note F le sous-espace vectoriel de S des suites (u_n) vérifiant :
   $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = \dfrac{1}{2}u_{n+3} + 3u_{n+2} - \dfrac{7}{2}u_{n+1} + u_n.$
   Montrer que $F = \mathrm{Ker}(2L - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(L + 2\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(L - \mathrm{id})^2$.
3. Déterminer la dimension de F et une base de F.

Ex 2 : [CCINP 2023] Soit E un espace vectoriel.
Soient p et q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q = \{0_E\}$.
2. Soit $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Ex 3 : [CCINP 2023] Soit E un espace vectoriel de dimension n, $f, g \in \mathcal{L}(E)^2$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. i. Si $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$, montrer que : $\forall k \geqslant p, \quad \mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^k)$.
   ii. En déduire que si f est non injective, $(\mathrm{Ker}(f^k))_{k\geqslant 0}$ est strictement croissante puis stationnaire à partir d'un certain indice p.
   Que peut-on dire de p ?
2. i. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que : $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}(g) \oplus H$.
   ii. On considère : $h : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array} \right.$.
   Montrer que $h(H) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\dim(h(H)) = \dim(H)$.
   iii. En déduire que $\dim \mathrm{Ker}(f \circ g) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Ker}(g)$;
3. On suppose que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ et que f est nilpotente.
   i. Préciser la suite $(\dim(\mathrm{Ker}(f^k)))_{k\geqslant 0}$.
   ii. Montrer que $p = n$

Ex 4 : [CCINP 2023] Soit $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ non nul tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ et que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}\left(u^2 + \mathrm{id}\right)$.
2. Montrer que u n'est pas injective, puis que $\mathrm{rg}(u) = 2$.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 5 : [IMT 1 2023] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $rg(A) < n$. Soit $G = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid ABA = 0\}$. Montrer que G est un espace vectoriel, puis déterminer sa dimension.

Ex 6 : [IMT 2 2023] Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.

1. Montrer la formule du rang : $n = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.

Ex 7 : [Navale 2023] Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $p_1, \ldots, p_n$ des endomorphismes non nuls vérifiant $\forall i, j \in [\![1, n]\!], p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$, où δ est le symbole de Kronecker.

1. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\,(p_i)$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$, sont en somme directe.
2. Montrer que les p_i sont de rang 1 .

Séance du 23/05 : Intégration

Ex 8 : [CCINP 2023] On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\sin(t)}{t^2+1}\,dt$.

1. Montrer que I converge.
2. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ J(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{t\,|\sin(t)|}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J(n\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{(u+k\pi)\sin(u)}{(u+k\pi)^2+1}\,\mathrm{d}u$.
3. I converge-t-elle absolument ?

Ex 9 : [CCINP 2023] Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que, pour tout $x > 0$, $F(x) - F'(x) = \dfrac{1}{x}$.
   En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $F(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x)$.
5. Montrer que $F(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x$.

Ex 10 : [CCINP 2023] Soit $F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Donnez le domaine de définition D de F.
2. Calculez F(1). On pourra poser $u = \dfrac{1}{t}$.
3. En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in D$.

Ex 11 : [CCINP 2023]

1. Soient $a, b > 0$. Donner les primitives sur $\mathbb{R}$ de $u \mapsto \dfrac{1}{au^2+b}$.
2. Exprimer $\cos(t)$ en fonction de $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ lorsque $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \neq 0$.
3. Soit $f : x \in]1, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\cos(t)+x)\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, puis exprimer f' sans intégrale.
4. En déduire une expression de f.

Ex 12 : [IMT 2 2023]

1. Montrer que :$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1+x$.
   En déduire que : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1-t^2 \leq e^{-t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ On pose } I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt,\ I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt,\ J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

2. Justifier l'existence de ces intégrales et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \leq \dfrac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n$.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose } W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n = W_{2n+1}$ et $J_n = W_{2n-2}$.
4. Déterminer une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.
5. En déduire que $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
6. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$ et en déduire la valeur de I.

Ex 13 : [CCINP 2022] Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifiez l'existence de ces intégrales
2. Montrer que I_n est constante. On pourra calculer $I_{n+1} - I_n$.
3. Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = 0$
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (I_n - J_n) = 0$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.

Ex 14 : [IMT 2 2023] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{4x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2}$.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Donner un équivalent de f en 0 .

Séance du 27/05 : Algèbre générale

Ex 15 : [CCINP 2023] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$, à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que $P(0) \neq 0$ et que P est scindé sur $\mathbb{R}$, et on note $x_1, \dots, x_n$ ses racines. On note également $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i, \sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$ et $\sigma_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i$.

1. Montrer que $\ln\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \geqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln\left(x_i^2\right)$, puis que $\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
2. Quelles sont les valeurs possibles de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n$?
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 3$.
4. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ scindés sur $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.

Ex 16 : [IMT 1 2023] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme vérifiant $XP(X) = (X-3)P(X+1)$.

1. Montrer que si P vérifie la relation alors 1, 2 et 3 sont racines de P.
2. Donner tous les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q(X) = Q(X+1)$.
3. Conclure.

Ex 17 : [IMT 1 2022]

1. Le groupe $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique ?
2. Le groupe $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique ?
3. Soient des entiers p, q supérieurs ou égaux à 2 tels que $p \wedge q = 1$. Montrer que $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Ex 18 : [IMT 1 2022] Pour un anneau A, on dit qu'un idéal I de A est premier si et seulement si :
$\forall (x, y) \in A^2, xy \in I \implies x \in I$ ou $y \in I$.
Soit A un anneau commutatif dont tous les idéaux sont premiers, montrer que A est un anneau intègre, puis que A est un corps.

Ex 19 : [CCINP 2022] On note E l'espace des polynômes réels de degré au plus n. Soient F, G deux polynômes de degrés $n+1$. On considère f l'application de E dans E qui à P associe le reste de la division euclidienne de FP par G.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. f est-il un automorphisme ? (Discuter selon que F et G sont premiers entre eux ou pas)
3. Supposons que $F \wedge G = 1$ et que G soit scindé à racines simples. Quels sont les valeurs propres de f ? L'endomorphisme f est diagonalisable ?

Ex 20 : [St Cyr 2023] Soit A l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrivant $t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt)$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n$ constantes réelles.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Calculer en fonction des a_k l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$.
3. En déduire que A est intègre.

Ex 21 : [IMT 2 2023] Montrer que $P = X^3 + 3X^2 + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

Séance du 29/05 : Probabilité, dénombrement

Ex 22 : [CCINP 2023] On obtient aléatoirement un entier strictement positif n avec une probabilité de $\dfrac{1}{2^n}$ On note A_k l'événement : « n est un multiple de k ».

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer $P(A_k)$.
3. Calculer $P(A_2 \cup A_3)$.
4. Soient p, q dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
   (a) Montrer que $A_p \cap A_q = A_m$, avec $m = p \vee q$.
   (b) Montrer que A_p et A_q ne sont pas indépendantes.

Ex 23 : [IMT 2 2023] On pose $p_n = a\dfrac{2^n}{n!}$ et on suppose que c'est la probabilité pour une famille d'avoir n enfants.

1. Déterminer a pour pour $(p_n)_{n \geqslant 0}$ soit une distribution de probabilité.
2. La probabilité d'avoir une fille (resp un garçon) vaut $1/2$.
   Déterminer la probabilité d'avoir au moins un garçon.
3. Quelle est la probabilité d'avoir exactement un garçon ?

Ex 24 : [IMT 1 2023] On considère $E = \{1, 2, \dots, n\}, m = 2^n - 2, F_1, \dots, F_m$ les parties de E non triviales (c'est-à-dire dans $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E) \backslash \{\emptyset, E\}$).

1. Montrer qu'il existe une unique bijection g de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $\forall F \in \mathcal{F}, g(F) \cap F = \emptyset$.
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 1$ si $F_i \cap F_j \neq \emptyset, a_{i,j} = 0$ sinon. Calculer $\det(A)$.

Ex 25 : [IMT 1 2022] On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire k boules en même temps dans l'urne. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le numéro de la plus petite boule tirée.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i}{k-1}$.
3. Calculer l'espérance de X.

Ex 26 : [IMT 1 2022] On admet : $\forall q \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[, \displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soient $p \in]0, 1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes). On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte. Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$. La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser. Les tirs de laser sont indépendants. La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

Ex 27 : [IMT 2 2022] Un mobile se déplace sur l'axe des abscisses ; il avance de 1 avec la probabilité p et recule de 1 avec probabilité $q = 1 - p$. On note X_n une variable aléatoire donnant l'emplacement du mobile au temps n.

1. Déterminer $P(X_n = 0)$.
2. Exprimer la loi de X_n.
3. Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Ex 28 : [IMT 2 2023] Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes finies définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, Supposons que : $\forall k \in \mathbb{N}, E(X^k) = E(Y^k)$
Montrer que X et Y ont la même loi.

Séance du 30/5 : Matrices et déterminant

Ex 29 : [CCINP 2023] Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ? Donner une base de l'image de A.
2. Donner une équation de l'image de A. Le vecteur B appartient-il à l'image de A ?

Ex 30 : [CCINP 2023] Soient $\varphi \in \mathbb{R}$ et $M_n = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = 2\cos(\varphi)$ si $i = j, m_{i,j} = 1$ si $|i-j| = 1$, les autres coefficients étant nuls.

1. On suppose que $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$. Trouver une relation de récurrence vérifiée par $D_n = \det(M_n)$ et exprimer D_n.
2. Déterminer D_n lorsque $\varphi \in \pi\mathbb{Z}$.

Ex 31 : [CCINP 2023] Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $AB - BA = B$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ AB^k - B^kA = kB^k$.
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ det(B^k) \cdot \det(A + kI_n) = \det(B^k) \cdot \det A$.
3. i. Montrer que A admet un nombre limité de valeurs propres.
   ii. Montrer que $\det B = 0$.
4. Supposons B inversible. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\lambda + 1$ est aussi une valeur propre de A (on pourra utiliser la relation $AB - BA = B$).
   Retrouver le résultat précédent.

Ex 32 : [IMT 1 2023] Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Montrer que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Ex 33 : [IMT 1 2023] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est inversible, que B est nilpotente et que A et B commutent.

1. Montrer que $A - B$ et $A + B$ sont inversibles.
2. Si A et B ne commutent pas, montrer qu'alors $A + B$ n'est pas forcément inversible.

Ex 34 : [IMT 1 2023] Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Calculer $\det(P(X + i + j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Ex 35 : [CCINP 2022] Calculer les dimensions de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. En déduire le déterminant de $u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^T \end{cases}$

Séance du 03/06 : Séries, suites et séries de fonctions

Ex 36 : [CCINP 2023] On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature.
   En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.
3. Montrer que $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et $\sum u_n^3$ sont de même nature.
   En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Ex 37 : [CCINP 2023] Soient a et b, deux réels strictements positifs.

1. Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{t^{3/2} + t^{1/2}}\mathrm{dt}$.
   Indication : Poser $u = \sqrt{t}$.
2. Justifier l'existence de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2} + k^{1/2}}$.
3. Montrer l'inégalité suivante : $2\,\mathrm{Arctan}\,(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}) \leq R_n \leq 2\,\mathrm{Arctan}\,(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$.
4. En déduire un équivalent simple de R_n au voisinage de $+\infty$.

Ex 38 : [CCINP 2023] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in [0, \pi/2] \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n).
2. (a) La suite converge-t-elle uniformément sur $[0, \pi/2]$?
   Indication Considérer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t$.
   (b) Soit $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, La suite converge-t-elle uniformément sur $[\alpha, \pi/2]$?
3. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, \pi/2], \mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)g(t)\mathrm{d}t = g(0)$.
   Ind. Utiliser $\left|\displaystyle\int_0^{\pi/2} [f_n(t)g(t) - f_n(t)g(0) + f_n(t)g(0)]\,\mathrm{d}t - g(0)\right|$

Ex 39 : [CCINP 2023] Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que S est définie sur $]0, +\infty[$. Calculer $S(1)$ et en déduire $xS(x) = \dfrac{1}{e} + S(x+1)$.
2. Montrer que $S(x) \sim \dfrac{1}{x}$ quand $x \to 0$.
3. Montrer S est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Ex 40 : [CCINP 2023] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto \dfrac{2\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{e}^{nx}-1}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et sous réserve d'existence, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_n existe.
2. Montrer que $I_n = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{sh}(x)\mathrm{e}^{-knx}\,\mathrm{d}x$,
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

Ex 41 : [IMT 2 2023]

1. Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.
2. Soit $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. Vérifier que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o(\dfrac{1}{n})$.
3. Soit $a > 1$ et (u_n) une suite strictement positive à partir d'un certain rang telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{a}{n} + o(\dfrac{1}{n})$ et $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = \dfrac{1+a}{2}$.
   Montrer qu'à partir d'un certain rang on a $u_{n+1} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}u_n$.
   En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \leqslant Cv_n$ à partir d'un certain rang.
4. Étudier rapidement le cas $a < 1$.
5. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ où $n \in \mathbb{N}$.
   Étudier la convergence de I_n.
6. Montrer la relation de récurrence $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$.
   Que peut-on en déduire sur la suite (I_n) ?

Ex 42 : [IMT 2 2023] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^{2\alpha}+x^2}$, avec α dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\alpha > 1/2$.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. On note $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
5. Chercher la limite de S en $+\infty$.

Séance du 05/06 : Réduction

Ex 43 : [CCINP 2023] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. Déterminer le spectre de A de trois façons :
   i. En utilisant la définition des valeurs propres et des vecteurs propres.
   ii. En calculant son polynôme caractéristique χ_A.
   iii. En calculant son polynm̂e minimal μ_A.
2. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?
3. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$? Dans ce cas, déterminer $P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Ex 44 : [CCINP 2023] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ distincts, $n \in \mathbb{N}$ et
$u : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto (X-a)(X-b)P' - nXP$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$.
2. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, donner la décomposition en éléments simples de P'/P.
3. Montrer que u est diagonalisable et donner ses vecteurs propres.

Ex 45 : [CCINP 2023] Soient $a \in \mathbb{R}^*, U = \left(a^{j-i}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à U.

1. Déterminer le rang de u et son déterminant.
2. Déterminer la dimension du noyau de u ainsi qu'une équation de ce noyau.
3. Déterminer la dimension de l'image de u et une base de cette image.
4. Étudier la diagonalisabilité de u.
5. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer U^k en fonction de U.
6. Déterminer le polynôme minimal de u et retrouver le résultat de la question précédente.

Ex 46 : [IMT 1 2023] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et (E) l'équation $AM = MB$.

1. On suppose que (E) admet une solution $M \neq 0$. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)M = MP(B)$. Montrer que A et B admettent une valeur propre commune.
2. Établir la réciproque.

Ex 47 : [CCINP 2023] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
On définit la fonction $T(f)$ sur $\mathbb{R}_+$ par $\quad T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt \quad$ si $x > 0$, et $T(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
2. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de T ; T est-il injectif ?
3. Montrer que 1 est valeur propre de T, et donner le sous espace propre associé.
4. Donner le spectre de T et les éléments propres associés.

Ex 48 : [IMT 2 2023] On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = A$.

1. Montrer que M admet une unique valeur propre et elle est de la forme $ik\pi$. Préciser k,
2. Montrer que M est triangulaire supérieure.
3. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\exp(M) = A$.

Ex 49 : [CCINP 2022] Soit $n \geq 2$. On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$A = M(a_1, ..., a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-2} & a_{n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_3 & a_4 & a_5 & . & . & . & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & . & . & . & a_n & a_1 \end{pmatrix}$, avec $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$.

1. Déterminer les éléments propres de J
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(J)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Soit $\mathcal{T} = \{M(a_1, ..., a_n),\ a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donner sa dimension.

Séance du 06/06 : Séries entières, dérivation

Ex 50 : [CCINP 2023]

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{3k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, puis démontrer que : $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3} dt = 0$
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\, dt$.
3. Calculer $\int_0^1 \frac{2t-1}{1-t+t^2}\, dt$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k}$.

Ex 51 : [CCINP 2023]

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{-int}\, dt$.
2. Montrer que si f est bornée alors f est constante.

Ex 52 : [CCINP 2023]

1. Donner le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n(\ln n)\,x^n$. On notera S sa somme.
2. Montrer que : $\forall x\in\,]-1,1[\,,\quad S(x)=\dfrac{1}{1+x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)x^{n+1}$.
3. Montrer que la limite de S en 1^- est égale à $\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.
4. Calculer cette limite en utilisant la formule de Stirling : $n!\sim n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Ex 53 : [CCINP 2023] On considère : $\sum a_nx^n$ série entière de rayon R, de somme $f(x)$, $\sum b_nx^n$ série entière de rayon R', de somme $g(x)$, et $\sum c_nx^n$ avec $\forall n\in\mathbb{N},\ c_n=\sum_{p=0}^{n}a_pb_{n-p}$.

1. Que dire du rayon de convergence de la série $\sum c_nx^n$? Que dire de la somme de la série ? (Aucune démonstration n'est exigée).
2. Donner le rayon de convergence et la somme de la série suivante : $\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$.

Ex 54 : [CCINP 2023] On donne $d_0=1$, $d_1=\dfrac{1}{2}$ et $d_n=\begin{vmatrix}\frac{n}{n+1} & \sqrt{\frac{1}{n+1}} & 0 & \dots & 0\\ -\sqrt{\frac{1}{n+1}} & \frac{n-1}{n} & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{3} & \sqrt{\frac{1}{3}}\\ 0 & \dots & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}$.

1. Calculer d_2 et d_3.
2. Montrer que $\forall n\geq 2$, $(n+1)d_n=nd_{n-1}+d_{n-2}$.
3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|d_n|\leq 1$ et en déduire une information sur le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 0}d_nx^{n+1}$; on notera S la fonction somme définie sur $]-R,R[$.
4. Déterminer une équation différentielle vérifiée par S. En déduire une expression simple de S.
5. Déterminer d_n.

Ex 55 : [IMT 1 2023] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers ℓ.
Soit $f : x\longmapsto\sum_{n>0}\dfrac{a_nx^n}{n!}$.

1. Donner le rayon de convergence de cette série.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}f(x)$.

Ex 56 : [CCINP 2022] On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Il-y-a-t-il convergence uniforme sur D de la série de fonction de somme f ?
3. Déterminer la valeur de $f(x)$.

Séance du 10/06 : Espaces euclidiens et préhilbertiens

Ex 57 : [CCINP 2023] Soit $n \geq 2$ et on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel : pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on pose : $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Soit $F = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = x_n\}$.

1. Montrer que F est un hyperplan.
2. Trouver une base orthonormée de F.
3. Déterminer $F^\perp$
4. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
5. Calculer $d(e_1, F)$.

Ex 58 : [CCINP 2023]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soient u et v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
   On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (u \otimes v)(x) = \langle x, v \rangle u$.
   i. Déterminer $\mathrm{rg}(u \otimes v)$.
   ii. Donner les éléments propres de $u \otimes v$.
   iii. $u \otimes v$ est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(u \otimes v)^2$ et retrouver le résultat de la question 1a.iii).
3. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note g^* son adjoint.
   Montrer que g commute avec $u \otimes v$ ssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \alpha u$ et $g^*(v) = \alpha v$.

Ex 59 : [CCINP 2023] Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Donner les relations entre a, b, c pour que M soit dans $SO_3(\mathbb{R})$.
   On donne l'identité : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ac + ab + cb)$.
2. On pose $\alpha = a + b + c$ et $\beta = ac + ab + cb$. D'après la question précédente, quelles sont les valeurs de α et β pour que M soit dans $SO_3(\mathbb{R})$?
3. Montrer que M est dans $SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $k \in [0, 4/27]$ tel que a, b, c soient les racines de $X^3 - X^2 + k$.
4. Déterminer les triplets (a, b, c) tels que $a = b$ et $M \in O_3(\mathbb{R})$.

Ex 60 : On considère le produit scalaire suivant : $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. (CCINP 2023) Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. (CCINP 2023) Calculer $\langle X^p|X^q\rangle$ pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.
3. (CCINP 2023) Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $F=\mathbb{R}_2[X]$.
4. (IMT 2 2023) Montrer que L_n est un polynôme de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.
5. (IMT 2 2023) Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes orthogonaux.
6. (IMT 2 2023) Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on définit $\phi(P)=XP''+(1-X)P'$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
7. (IMT 2 2023) Soient $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. Montrer que $\langle\phi(P),Q\rangle = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que ϕ est un endomorphisme autoadjoint.

Ex 61 : [IMT 2 2023] Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^T+2A^T+I_n=0$. Déterminer A.

Ex 62 : [CCINP 2022] Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques, c'est-à-dire :

$$u\in\mathcal{A}(E)\Leftrightarrow \forall x,y\in E,\ \langle u(x)|y\rangle = -\langle u(y)|x\rangle\,.$$

1. Montrer que : $[\forall x\in E,\ \langle u(x)|x\rangle=0]\Leftrightarrow u\in\mathcal{A}(E)$.
   Pour $u\in\mathcal{A}(E)$, quelles sont les valeurs propres possibles de u ?
2. Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{A}(E)$ à l'aide de leur matrice dans une base orthonormée.
3. Soit F un sous-espace stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.

   On suppose maintenant que $\mathrm{Ker}\,(u)=\{0\}$.

4. (a) Montrer que u^2 est un endomorphisme autoadjoint.
   Soit x un vecteur propre de u^2. Montrer que $F=vect(x,u(x))$ est un sous-espace stable par u.

   (b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & & & & (0) & \\ \lambda_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & -\lambda_2 & & & \\ & & \lambda_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & (0) & & & 0 & -\lambda_p \\ & & & & & \lambda_p & 0 \end{pmatrix},\ \text{avec } \lambda_1,...,\lambda_p \text{ des réels non nuls.}$$

Séance du 12/06 : Équations différentielles, calcul différentiel, fonctions vectorielles

---

Ex 63 : [CCINP 2023] Soit $(E) : (1-x^2)y' - xy = f(x)$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $]-1,1[$.
2. Soit $h : x \mapsto \sqrt{1-x^2} - \operatorname{Arccos} x$. Démontrer que h est dérivable sur un intervalle à préciser et calculer h'.
3. Résoudre (E) sur $]-1,1[$ pour $f(x) = 1-x$.
4. Montrer que s'il existe une solution de (E) sur $[-1,1]$, alors $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,\mathrm{d}t = 0$.
5. Soit $f(x) = ax+b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une solution de (E) sur $[-1,1]$ si, et seulement si, $b = 0$.

Ex 64 : [CCINP 2023] Soit l'application $f : U \to \mathbb{C}$, avec U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.
Pour $z = x+iy \in U$, avec x et y réels, on pose $f(z) = \tilde{f}(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$, avec $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ réels.
On dit que f est dérivable en $z_0 \in U$ si $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe.
Si f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, on a alors l'expression :

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0).$$

1. Montrer que f est continue en $z_0 \in U$ si et seulement si P et Q sont continues en (x_0,y_0).
2. Montrer que f est dérivable en $z_0 \in U$ si et seulement si P et Q sont différentiable en (x_0,y_0) et $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)$.
3. On suppose que f est deux fois dérivable sur U et que f'' est continue sur U. Déterminer l'expression de f''.
4. En déduire que si f est deux fois dérivable sur U et que f'' est continue sur U, alors $\Delta(P) = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ et $\Delta(Q) = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$

Ex 65 : [IMT 1 2023] Donner les fonctions 2π-périodiques de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x-\pi) + \sin(x)$.

Ex 66 : [CCINP 2023]

1. Déterminer les extrema de $f : (u,v) \in [0,1]^2 \mapsto uv(1-u-v)$.
2. Soit (A,B,C) un triangle d'aire égale à 1 . Soit M un point dans le triangle. Maximiser le produit des distances de M aux côtés du triangle.

1. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{d}f_{I_n}(H) = H^T + H$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(\mathrm{d}f_{I_n})$.
3. En déduire que l'espace tangent à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Ex 67 : [IMT 1 2023] Soit A une matrice symétrique définie positive de taille n. On se donne une solution non nulle $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$. N désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

1. Donner la forme générale des solutions.
2. Montrer que pour tout $r > 0$, il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $N(X(t)) = r$.

Ex 68 : [IMT 2 2022] Soit l'équation différentielle $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$.

1. Chercher les solutions sous forme de somme d'une série entière .
2. Faire le changement de variable $x = t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z'' - z = 0$. En déduire les solutions sur $\mathbf{R}_+^*$
3. Faire le changement de variable $x = -t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z'' + z = 0$. En déduire les solutions sur $\mathbf{R}_-^*$.
4. Faire le raccordement des solutions pour en déduire la solution sur $\mathbf{R}$.

Ex 69 : [IMT 2 2022] Soit S l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation :

$$(E) \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

1. Soit f appartenant à S.
   Soit g l'application telle que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2 : g(u,v) = f(x,y)$ avec $\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & 2x+y \\ v & = & 2x-y \end{array} \right.$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de f en fonction de celles de g.
4. En déduire une expression simplifiée de l'équation (E).
5. Déterminer les solutions de (E).

Séance du 13/06 : Variables aléatoires

Ex 70 : [CCINP 2023] Une personne sur une échelle est en train de peindre un bâtiment. La probabilité qu'un passant reçoive une goutte de peinture est $p \in]0,1[$. On note X (resp. Y) le nombre de passants ayant reçu une goutte de peinture (resp. n'ayant pas reçu de goutte.)

1. On suppose que n personnes sont passées. Donner les lois de X et de Y. Sont-elles indépendantes ?
2. On note à présent N le nombre de passants dans la journée. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Donner la loi de X et de Y. Donner l'espérance et la variance de X.
3. Montrer que X et Y sont indépendantes. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Ex 71 : [CCINP 2023] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$. En posant $\min\emptyset=+\infty$, on définit $T_1=\min\{n\in\mathbb{N}^*, X_n=1\}$ et $T_2=\min\{n>T_1, X_n=1\}$.

1. Que représente T_1 ? Préciser sa loi, son espérance et sa variance.
2. Que représente T_2 ? Calculer $\mathbf{P}(T_2-T_1=k, T_1=n)$.
3. Vérifier que T_2-T_1 et T_1 sont indépendantes. En déduire la loi de T_2.

Ex 72 : [IMT 1 2023] Soient P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$. écrire la matrice dans la base canonique du projecteur sur P parallèlement à D.

Ex 73 : [IMT 2 2023] On considère n tulipes qui ont chaque année chacune une probabilité $p\in]0,1[$ de fleurir, sachant que si une tulipe fleurit une année, elle fleurira toutes les années suivantes. La variable X_i désigne l'année de la première floraison de la tulipe numéro i, X l'année à partir de laquelle toutes les tulipes fleurissent.

1. Exprimer X en fonction des $(X_i)_{i\leqslant n}$.
2. Exprimer la loi des $(X_i)_{i\leqslant n.}$
3. Calculer, pour $k\in\mathbb{N}, \mathbf{P}(X>k)$. Montrer que X est d'espérance finie et calculer cette espérance.

Ex 74 : [St Cyr 2023] Soit $(X_n)_n\geqslant 1$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $C_n=\operatorname{card}\{X_1,\ldots,X_n\}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}, \mathbf{E}(C_n)\leqslant k+n\mathbf{P}(X_1\geqslant k)$.
2. En déduire que $\mathbf{E}(C_n)=o(n)$ quand $n\to+\infty$.
   Dans la suite, on suppose que les X_k sont d'espérance finie.
3. Montrer que $\mathbf{P}(X_1\geqslant k)=o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ quand $k\to+\infty$.
4. En déduire que $\mathbf{E}(C_n)=o(\sqrt{n})$ quand $n\to+\infty$.

Ex 75 : [CCINP 2022] Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ telle que :

$$\forall n,k\in\mathbb{N},\ P(X=n,Y=k)=\begin{cases} e^{-b}\dfrac{b^n}{k!(n-k)!}a^k(1-a)^{n-k} & \text{si}\quad k\leq n\\ 0 & \text{si}\quad k>n\end{cases}.$$

1. Déterminer la loi de X. Préciser son espérance et sa variance.
2. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre ab. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $X-Y$. Vérifier que Y et $X-Y$ sont indépendantes.

Ex 76 : [ENSEA 2022] Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p et q.
Soit $A : \omega \to \begin{pmatrix} X(\omega) & -Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$. Trouver la probabilité que A soit diagonalisable sur $M_2(\mathbb{R})$.

Séance du 17/06 : Espaces vectoriels normé, suites, fonctions usuelles

---

Ex 77 : [CCINP 2023] On note $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$ d'écriture développée $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$, on pose $\|P\| = \sup_k |a_k|$.

1. Montrer que $\|.\|$ est une norme de E.
2. Soit $b \in \mathbb{C}$, on souhaite étudier la continuité de l'application $f : P \in E \mapsto P(b) \in \mathbb{C}$.
3. Montrer que, si $|b| < 1$, alors f est continue. BONUS : déterminer $|||f|||$.
4. Étudier la continuité de f si $|b| = 1$ en utilisant la suite de polynôme $(P_n)_n \geqslant 0$, où, pour $n \in \mathbb{N}, P_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{b}^k X^k$.
5. Montrer que, si $|b| > 1$, alors f n'est pas continue.

Ex 78 : [CCINP 2022]

1. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, et K un compact de E.
   Montrer que K est fermé et borné.

   On s'intéresse à l'espace vectoriel $E = C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$, muni de la norme $\|.\|_2$, définie par $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}$.
2. On admet dans un premier temps que $\|.\|_2$ est une norme sur E.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto e^{inx}$.
   (a) Montrer que pour tous entiers n et p distincts, $\|f_n - f_p\|_2 = 2\sqrt{\pi}$.
   (b) En déduire que la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte.
3. (a) Démontrer pour tous complexes u et v l'inégalité : $|uv| \leqslant \dfrac{|u|^2}{2} + \dfrac{|v|^2}{2}$. En déduire que pour toutes fonctions f et g de E, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$: $\int_0^{2\pi} |fg| \leqslant \dfrac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} |f|^2 + \dfrac{1}{2\lambda^2} \int_0^{2\pi} |g|^2$.
   (b) Soit $(f, g) \in E^2$. En déterminant le minimum de la fonction :
   $h : \lambda \mapsto \dfrac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} |f|^2 + \dfrac{1}{2\lambda^2} \int_0^{2\pi} |g|^2$, démontrer que : $\int_0^{2\pi} |fg| \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$.
   (c) En déduire que $\|.\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire, puis que c'est une norme.

Ex 79 : [IMT 1 2023]

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que dans une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on ait $Mat_{\mathcal{B}}(f) = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$.
   Soit $\mathcal{B}' = \left(\dfrac{e_1}{t}, ..., \dfrac{e_n}{t^n}\right)$.
   Déterminer $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.
2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $Sim(N) = \{PMP^{-1},\ P \in GL_n(\mathbb{R})\}$.
   Montrer que N est nilpotente si et seulement si 0 est dans l'adhérence de $Sim(N)$.

Ex 80 : [IMT 1 2023] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère l'équation $\cos(x) = nx$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution x_n de cette équation sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la monotonie et la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer un développement limité à l'ordre trois en $1/n$ de x_n.
4. La série $\sum \ln(\cos(x_n))$ converge-t-elle ?
5. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i \sim \frac{c}{n!}$.

Ex 81 : [IMT 2 2023] Soit $E = R^2$ le plan euclidien.

1. L'ensemble $\mathcal{H} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 - x^2 = 1\right\}$ est-il un fermé de E ?
2. Donner la définition d'une partie connexe par arcs.
3. Montrer que le cercle de centre 0 et de rayon 1 est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'image par f d'une partie connexe par arcs, fermée et bornée est un segment.

Ex 82 : [IMT 1 2022] On note $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P \in E$, on note $\theta_n(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)t^n dt$.

1. Montrer que pour $P \in E$, $N(P) = \displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}} |\theta_n(P)|$ est bien défini.
2. Montrer que N est une norme.
3. (BONUS) Comparer les normes N et $\|.\|_\infty$, avec : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\|_\infty = \displaystyle\sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$.

Ex 83 : [IMT 2 2022]

1. Montrer que toute application continue f définie sur le segment $[0, 1]$ et telle que $f(0) = 0$ peut être approchée uniformément par une suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_n$ sur $[0, 1]$ avec $Q_n(0) = 0$.
2. Soit $F = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0\right\}$ et $G = \text{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}, n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que G est dense dans F.