14-Équations différentielles

Ex 1 : Résoudre les équations différentielles sur les intervalles précisés :

1. $y'(x) - \tan(x)y + (\cos x)^2 = 0$ sur $]-\pi/2;\pi/2[$;
2. $y' - y = \sin(2x)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
3. $y' + \frac{1}{2(x+i)}y = 0$ sur $\mathbb{R}$;
4. $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$ sur $\mathbb{R}$;
5. $(e^x - 1)y' + e^x y = 1$ sur $\mathbb{R}$;
6. $|x|y' + (x-1)y = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 2 : (*) ***1.*** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x) + \alpha f(x)) = 0$. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f''(x) + 3f'(x) + 2f(x)) = 0$. Montrer que :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$.

Ex 3 : (*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f'(x) + f(x) = \ell + \frac{m}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}$, avec $\lim_{+\infty} \varepsilon = 0$. Donner un développement asymptotique de f en $+\infty$.

Ex 4 : Soit $(E) : y' = a(x)y + b(x)$ où a et b sont continues et T-périodiques sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si y est solution de (E) alors $z : x \mapsto y(x+T)$ aussi.
2. En déduire qu'une solution y est T-périodique si et seulement si $y(T) = y(0)$.
3. On suppose $\int_0^T a(t)\,dt \neq 0$. Montrer que (E) possède une unique solution T-périodique.

Ex 5 : Résoudre sur les intervalles appropriés les équations différentielles suivantes

a. $y'' + y' - 2y = \cos(2x)$;
b. $y'' - 4y' + 3y = 6 + 4e^x + 8e^{-x}$;
c. $x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$;
d. $y'' + y = \cos^2 x$;
e. $y'' + 4y = \tan(t)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$;
f. $y^{(3)} + y'' = 1$;
g. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$;
h. $y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = \frac{4\ln(t)}{t}$;
i. $y'' + 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Ex 6 : (*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) \geq 0$. Montrer que $f(x) + f(x+\pi) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ex 7 : Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.
(Pour cela, on pourra poser $g(x) = (f(x) + f(-x))/2$ et $h(x) = (f(x) - f(-x))/2$).

Ex 8 : Déterminer les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2-x)$.

Ex 9 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation $f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1 - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Trouver toutes les fonctions f solution de l'équation étudiée.

Ex 10 : On étudie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $(E) : ty'' + (1-2t)y' + (t-1)y = 0$.

1. Vérifier que $\varphi : t \mapsto e^t$ détermine une solution de (E).
2. Donner une expression du wronskien w de deux solutions de cette équation.
3. En déduire une solution de (E) indépendante de φ et exprimer la solution générale de (E).

Ex 11 : *1.* Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t-x/t}}{\sqrt{t}} dt$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie l'équation différentielle : $(E) : 2xy'' + y' - 2y = 0$.
3. On pose $y(x) = z(\sqrt{x})$. Résoudre (E).
4. Donner l'expression de $f(x)$.

Ex 12 : Sur $\mathbb{R}$, soit $(E) : 4tx'' + 2x' - x = 0$.

1. Déterminer une solution DSE φ_1 telle que $\varphi_1(0) = 1$.

2. *a.* Exprimer φ_1 en fonction de ch sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. À l'aide du wronskien, terminer la résolution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On se place sur $\mathbb{R}_-^*$. Reprendre les mêmes question, en exprimant φ_1 en fonction de cos.

4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Ex 13 : Soit (E) l'équation différentielle $2xy'' + y' - y = 0$.

1. Trouver une solution f de (E) développable en série entière au voisinage de 0 et telle que $f(0) = 1$.

2. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles, puis résoudre (E).

Ex 14 : (*) Soient r et q deux fonctions continues définies sur $I = [a, b]$ telles que : $\forall x \in I,\, r(x) \leq q(x)$.
On considère les équations différentielles : $(E_1) : y'' + qy = 0$, et $(E_2) : z'' + rz = 0$.
Soit x_0 un zéro d'une solution y de l'une de ces équations. On admet qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\},\ y(x) \neq 0$.

1. Soit y une solution de (E_2) et x_0, x_1 deux zéros consécutifs de y. $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ peuvent-ils être nuls ? Que dire de leurs signes ?

2. Soient z une solution de (E_1) et $W(x) = y(x)z'(x) - y'(x)z(x)$. Calculer $W'(x)$ et $W(x_1) - W(x_0)$.

3. Montrer que z a un zéro dans $]x_0, x_1[$ ou $z(x_0) = z(x_1) = 0$.

4. Soit u une solution de (E_2). Montrer que u est soit proportionnelle à y, soit admet un unique zéro dans $]x_0, x_1[$.

Ex 15 : *1.* Montrer qu'il existe une solution h de l'équation $(E) : xy'' + y' + y = 0$, développable en série entière et vérifiant $h(0) = 1$.
2. Montrer que h s'annule sur $[0, 2]$, puis qu'elle s'annule qu'une seule fois sur $[0, 2]$.

Ex 16 : Soit $(E) : y'' + f(t)y = 0$ où f est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si y_1 et y_2 sont solutions de (E), alors $y_1'y_2 - y_2'y_1$ est constante.

2. Montrer que si y est une solution de (E) bornée sur $\mathbb{R}$, alors $y'(t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$, puis montrer que cette limite est nulle.

3. Montrer que (E) admet une solution non bornée.

Ex 17 : (*) Soient $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que : $q \geq m$. Soit $(H) : y'' + qy = 0$. Soit f une fonction non nulle solution de (H).

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) + if'(t) \neq 0$.

2. Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que $u^2 + v^2 = 1$. Soit $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(0) + iv(0) = e^{i\alpha_0}$. Soit $\theta : t \mapsto \alpha_0 + \int_0^t (uv' - u'v)$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ u(t) + iv(t) = \exp(i\theta(t))$.

3. Montrer qu'il existe $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que $f + if' = \rho \exp(i\theta)$.

4. Exprimer θ' en fonction de q et θ. En déduire que θ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ sur $\theta(\mathbb{R}_+)$.

5. Montrer que f possède une infinité de zéros.

Ex 18 : Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On considère l'équation différentielle : $(x^2-1)y'' - 2pxy' + p(p+1)y = 0$.

1. Montrer, à l'aide de dérivations successives de l'équation différentielle, que toute solution y de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $p+1$. Déterminer y si : $y(1) = 0$. Même question si $y(-1) = 0$.
2. Donner selon p, la dimension de $\mathcal{S}_\mathbb{R}$ des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Ex 19 : Soit $(E) : (2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$.

1. Chercher une solution de (E) de la forme $\varphi : x \mapsto e^{ax}$.
2. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $Z = y/\varphi$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z = Z'$ est solution d'une équation linéaire d'ordre un à préciser.
3. Résoudre (E) sur $]-1/2, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1/2[$.
4. Trouver l'ensemble des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ et en la dimension et une base.

Ex 20 : 1. Résoudre l'équation $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ via le changement de variable $t = e^x$.
2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t^2y'' + 4ty' + 2y = 1$.

Ex 21 : Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation : $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = \operatorname{Arccos} x$ en posant $x = \cos(t)$.

Ex 22 : (*) Soit $E_n = \left\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0\right\}$. Montrer que E_n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont on donnera la dimension et une base.

Ex 23 : Résoudre $y''' - 3y' + 2y = \sin x$.

Ex 24 : On considère le système différentiel suivant : $(E) : \begin{cases} x'(t) &= 2tx(t) - y(t) + t\cos(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2ty(t) + t\sin(t) \end{cases}$.

1. Déterminer $\operatorname{Vect}(X_1, X_2)$ l'espace des solutions de l'équation homogène associée à (E) en procédant au changement de fonction $u(t) = x(t)e^{-t^2}$ et $v(t) = y(t)e^{-t^2}$.
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $X : t \mapsto a(t)X_1(t) + b(t)X_2(t)$.
3. Résoudre (E).

Ex 25 : Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x' &= \cos(t)x + \sin(t)y \\ y' &= -\sin(t)x + \cos(t)y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' &= (2-t)x + (t-1)y \\ y' &= 2(1-t)x + (2t-1)y \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' &= 4x - 2y \\ y' &= x + y \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' &= -x - y + t^2 + 2t + 3 \\ y' &= 2x + y - t^2 - 2t - 1 \end{cases}$
(chercher des solutions particulières avec x et y polynomiales de degré respectivement 1 et 2).
5. $\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x \\ z' &= x + y + z \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' &= -x + 3y + te^{-t} \\ y' &= 3x + 2y + e^t \end{cases}$
7. $\begin{cases} x' &= -6x + 5y + 3z + 1/t \\ y' &= -8x + 7y + 4z \\ z' &= -2x + y + z + 2/t \end{cases}$, on montrera que $\begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
8. $\begin{cases} x' &= x - z \\ y' &= x + y + z \\ z' &= -x - y + z \end{cases}$
9. $\begin{cases} x'' &= x - 2y \\ y'' &= -3x + 2y \end{cases}$
10. $\begin{cases} x' &= x - y + t \\ y' &= 2x + 4y + e^t \end{cases}$

Ex 26 : (*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.

1. Montrer que $\varphi : x \mapsto \det(f(x))$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Si $f(0) = I_n$, montrer que : $\varphi'(0) = Tr(f'(0))$.
2. On suppose que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y)$ et qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x_0) \in GL_n(\mathbb{C})$.
   a. Déterminer $f(0)$.
   b. Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par φ.
   c. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}\ \varphi(x) = e^{xTr(f'(0))}$.

Ex 27 : Résoudre $\begin{cases} x' = z + \cos t \\ y' = y + \mathrm{e}^{3t} \\ z' = x + \sin t \end{cases}$, puis trouver la solution telle que x et z soient bornées sur $\mathbb{R}_+$ et que $x(0) = z(0)$.

Ex 28 : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Résoudre $y^{(n)} = f$, avec : $y(0) = y'(0) = ... = y^{(n-1)}(0) = 0$.

Ex 29 : Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue et T-périodique. Montrer que le système différentiel $X' = AX$ admet une solution Y non nulle, définie sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t+T) = \lambda Y(t)$.

Ex 30 : (*) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, E l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $U \in E$, on note $Y_{Y_0,U}$ l'unique solution du problème de Cauchy $Y(0) = Y_0$ et :
$\forall t \in [0, T],\ Y'(t) = AY(t) + BU(t)$.

1. Montrer que, si $t \in [0, T]$, il existe $\varphi_t \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ tel que :
   $\forall (Y_0, U) \in E \times \mathbb{R}^n,\ Y_{Y_0,U}(t) = e^{tA}Y_0 + \varphi_t(U)$.
2. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
   a. $\forall Y_1 \in \mathbb{R}^n, \exists U \in E, \varphi_T(U) = Y_1$;
   b. $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n, \exists U \in E, Y_{Y_0,U}(T) = 0$;
   c. l'image de φ_T est dense dans $\mathbb{R}^n$.

Ex 31 : Soit $S : \mathbb{R} \mapsto S_n(\mathbb{R})$ une fonction continue telle que : $\forall t \in \mathbb{R},\ Sp(S(t)) \subset]-\infty, -1]$. Montrer que toutes les solutions du système $X'(t) = S(t)X(t)$ ont une limite nulle en $+\infty$.

Ex 32 : Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Ex 33 : (*) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $[A, B] = AB - BA$, on suppose que A et B commutent avec $[A, B]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^kB - BA^k = kA^{k-1}[A, B]$.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
3. Montrer que : $e^{A+B} = e^Ae^Be^{-\frac{[A,B]}{2}}$.

Ex 34 : Résoudre les équations non linéaires suivantes

1. $y'y = x$;
2. $y' = |y|$;
3. $y' + e^{x-y} = 0$;
4. $y' = y^2$.

Ex 35 : Soient $T, N \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, R^2)$ telles que $(T(t), N(t))$ soit une base orthonormée pour tout $t \in I$ Montrer qu'il existe $c : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $T' = cN$ et $N' = -cT$.