Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels, applications linéaires et sous-espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels, définitions

Voici la définition d'un espace vectoriel, mais concrètement, dans la pratique, celle-ci n'est pas utilisée.

Définition 1.1.1 (Espace vectoriel) *Soit E un ensemble muni de deux opérations l'une que l'on appelle loi interne notée $+$ et l'autre que l'on appelle loi externe notée $\cdot$, ces lois étant les applications suivantes :*

$$+ : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \right. \qquad \cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$$

On dit que le triplet $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-ev) si

1. *$(E,+)$ est un groupe commutatif :*
   (a) *L'addition est associative : $\forall x,y,z \in E,\ (x+y)+z = x+(y+z)$.*
   (b) *L'addition est commutative : $\forall x,y \in E,\ x+y = y+x$.*
   (c) *Il existe dans E un élément neutre 0_E, appelé vecteur nul, tel que : $\forall x \in E,\ x+0_E = 0_E + x = x$.*
   (d) *Tout élément x admet un opposé, noté $(-x)$ ou $-x$ tel que : $x+(-x) = (-x)+x = 0_E$.*
2. *Pour tous x, $y \in E$, λ, $\mu \in \mathbb{K}$,*

$$\begin{array}{lll} \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda \cdot y & (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x & \textit{(Distributivité)} \\ 1\cdot x = x & \lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda\mu)\cdot x & \textit{(Compatibilité de } \cdot) \end{array}$$

   ($\lambda\mu$ étant la multiplication usuelle dans $\mathbb{K}$ et $\lambda+\mu$ l'addition dans $\mathbb{K}$)

   Les éléments de E sont appelés vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ scalaires.

Exemple 1.1.1 *Voici les exemples de référence (on pourra affirmer sans démonstrations que ce sont des espaces vectoriels) :*

1. $\mathbb{K}^n = \{(x_1,x_2,...,x_n),\ x_1,x_2,...,x_n \in \mathbb{K}\}$ *;*
2. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, les matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$;*
3. $\mathbb{K}[X]$*, les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;*
4. $\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{K}) = \mathbb{K}^\Omega$ *les fonctions définies sur un ensemble Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$;*
5. $\mathbb{K}^\mathbb{N}$*, les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Définition 1.1.2 (Combinaison linéaire) *Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Un vecteur $x \in E$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(e_i)_{i\in I}$ s'il existe une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ (c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un nombre fini de λ_i non nuls) telle que $x = \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.*

Proposition 1.1.1 (Espace vectoriel produit) *Soient $(E_1,+,\cdot),(E_2,+,\cdot),...,(E_p,+,\cdot)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
Sur $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$, on définit pour tous $(x_1,x_1') \in E_1^2$, $(x_2,x_2') \in E_2^2$, ..., $(x_p,x_p') \in E_p^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

- *la multiplication externe $\lambda\cdot(x_1,x_2,...,x_p) = (\lambda\cdot x_1,\lambda\cdot x_2,...,\lambda\cdot x_p)$.*
- *l'addition $(x_1,x_2,...,x_p)+(x_1',x_2',...,x_p') = (x_1+x_1',x_2+x_2',...,x_p+x_p')$.*

Alors $(E_1\times E_2\times ...\times E_p,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé espace vectoriel produit.

1.2 Applications linéaires

Définition 1.2.1 (Application linéaire) *E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une application linéaire si*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Lorsque

1. *$E = F$, f est appelée endomorphisme de E.*
2. *f est bijective, f est appelée isomorphisme.*
3. *$E = F$ et f est bijective, f est appelée automorphisme de E.*
4. *$F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme linéaire sur E.*

Notations : on note

- $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.
- $GL(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes de E.

Exemple 1.2.1

1. $\left\{\begin{array}{lll} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}\right.$, *avec λ dans $\mathbb{K}$ qui est appelé homothétie, qui est aussi λId_E, avec : $\forall x \in E,\ Id_E(x) = x$. C'est un automorphisme de E si $\lambda \neq 0$.*
2. $\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^T \end{array}\right.$ *. C'est un isomorphisme de réciproque :* $\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^T \end{array}\right.$.
3. $\left\{\begin{array}{lll} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0,u_1) \end{array}\right.$
4. *Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et on pose $p(A)$ le reste de la division euclidienne de A par B. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.*

Remarque 1.2.1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

1. *$f(0_E) = 0_F$.*
2. *$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n, \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.*
   f transforme une combinaison linéaire en une combinaison linéaire.

Définition 1.2.2 (Noyau,image) *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

1. *On appelle noyau de f et on note $\operatorname{Ker}(f)$ l'ensemble*
   $\operatorname{Ker}(f) = \{x \in E / f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$.
2. *On appelle image de f et on note $\operatorname{Im}(f)$ l'ensemble $\operatorname{Im}(f) = \{f(x),\ x \in E\} = f(E)$.*

Remarque 1.2.2 *(IMPORTANTE) Soient F et G deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors on a :*

1. $\operatorname{Ker}(v \circ u) \qquad \operatorname{Ker}(u)$.

2. $\mathrm{Im}\,(v \circ u)$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mathrm{Im}\,(v)$.
3. $v \circ u = 0$ *si et seulement si*

En effet, on a :

1. *Soit* $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$. *On a :* $u(x) = 0$, *donc* $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0) = 0$, *donc :* $x \in \mathrm{Ker}\,(v \circ u)$.
2. *Soit* $y \in \mathrm{Im}\,(v \circ u)$. *Il existe* $z \in E$ *tel que :* $y = v \circ u(z) = v(\underbrace{u(z)}_{\in F})$, *donc :* $y \in \mathrm{Im}\,(v)$.
3. $\underline{\Rightarrow:}$ *on suppose que :* $v \circ u = 0$. *Soit* $y \in \mathrm{Im}\,(u)$. *Il existe* $x \in E$ *tel que* $y = u(x)$, *puis :* $v(y) = \underbrace{v \circ u}_{=0}(x) = 0$, *donc :* $y \in \mathrm{Ker}\,(v)$.
   $\underline{\Leftarrow:}$ *on suppose que :* $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$. *Soit* $x \in E$. *Comme* $u(x)$ *est dans* $\mathrm{Im}\,(u)$, *donc il est dans* $\mathrm{Ker}\,(v)$, *alors :* $\forall x \in E,\ v(u(x)) = 0$, *soit* $v \circ u = 0$.

Proposition 1.2.1 (Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité) 1. *f est surjective si et seulement si on a* $\mathrm{Im}\,(f) = F$.
2. *f est injective si et seulement si on a :* $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$

Exemple 1.2.2 1. *Soit* $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}\right.$. *Déterminer le noyau de* φ. *Est-elle injective ?*

2. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $b \in F$.*
   On considère l'équation $(Eq) : f(x) = b$, que l'on appelle équation linéaire d'inconnue x dans E. On appelle b le second membre de l'équation.
   Premier cas : $b \notin \mathrm{Im}\, f$. *(Eq) n'a pas de solutions.*
   Deuxième cas : $b \in \mathrm{Im}\, f$. *Il existe $z_0 \in E$ tel que l'on ait $f(z_0) = b$.*
   L'ensemble des solutions de (Eq) est
   C'est un sous-espace affine de E dirigé par
   Si $b = 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution :0. L'ensemble des solutions est : $\mathrm{Ker}\,(f)$. C'est l'équation homogène associée à l'équation (Eq).
   On remarque que l'ensemble des solutions est de la forme « un vecteur + les solutions du problème homogène associé », tout comme pour les équations différentielles ou les systèmes linéaires avec second membre.

Proposition 1.2.2 (Opérations sur les applications linéaires) 1. *$(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.*
2. *Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F,G)$, on a :*
   (a) *$g_1 \circ f_1$ est dans $\mathcal{L}(E,G)$. On note aussi la composition $g_1 f_1$, mais attention ça n'est pas une multiplication.*
   (b) $(g_1 + g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_1$ $\qquad$ (c) $g_1 \circ (f_1 + f_2) = g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2$.
3. *$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.*

Proposition 1.2.3 (L'application linéaire réciproque) 1. *Soient f et h des isomorphismes de E dans F.*
   (a) *Alors f^{-1} est une application linéaire de F dans E.*

(b) *Si $E=F$, alors $f\circ h$ est dans $GL(E)$ et : $(f\circ h)^{-1}=h^{-1}\circ f^{-1}$.*

2. *f est dans $GL(E)$ signifie qu'il existe $g\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f\circ g=g\circ f=Id_E$. Dans ce cas, on a : $g=f^{-1}$.*

Exemple 1.2.3 1. *On reprend l'application $\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X]\\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X)\end{array}\right.$ de l'exemple 1.2.2. Déterminer φ^k pour k dans $\mathbb{N}$.*

2. ***(CCP 62)*** *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$ telle que : $f^2-f-2Id=0$. Montrer que f est bijective et trouver f^{-1}.*

Définition 1.2.3 (Sous-espace stable) *Soient X un sous-ensemble de E et $f\in\mathcal{L}(E)$. On dit que X est stable par f si on a : $f(X)\subset X$.*

Proposition 1.2.4 (Stabilité de l'image et du noyau) *Soient $u,v\in\mathcal{L}(E)$ tels que $uv=vu$. Alors $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(u)$ sont stables par v.*

Démonstration :

Définition 1.2.4 (Endomorphisme induit) *Soit G un sous-espace vectoriel de E stable par f avec f dans $\mathcal{L}(E)$. On définit $\tilde{f}:\left\{\begin{array}{ccc}G & \to & G\\ x & \mapsto & f(x)\end{array}\right.$. On dit que $\tilde{f}$ est l'endomorphisme induit par f sur G.*

Exemple 1.2.4 *Soit $\psi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X]\\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X)\end{array}\right.$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par ψ et induit un endomorphisme $\psi_n:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X]\\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X)\end{array}\right.$.*

1.3 Sous-espaces vectoriels

Voici dans ce paragraphe la définition d'un sous-espace vectoriel et différentes façons de montrer que l'on a un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. Le deux principales méthodes sont la caractérisation des sous-espaces vectoriels et l'utilisation du noyau d'une application linéaire.
Prendre garde à toujours préciser de quel espace vectoriel on est le sous-espace vectoriel.

Définition 1.3.1 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels) *Soit* $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $F \subset E$. F *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si*

$$0_E \in F \quad et \quad (\mathcal{C}_1) : \ \forall x,\, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F.$$

De plus F *hérite de la structure d'espace vectoriel de* E.

Remarque 1.3.1

1. *IMPORTANT : pour montrer qu'un certain espace a une structure d'espace vectoriel, on montre qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.*
2. *On peut aussi rencontrer la caractérisation* $(\mathcal{C}_2)$: $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda x + \mu y \in F$. *Cette caractérisation signifie que* F *est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs.*

Exemple 1.3.1 ***(CCP 55)*** *Soit* $a \in \mathbb{C}$. *On note* E *l'ensemble des suites complexes telles que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$. *Montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Proposition 1.3.1 (Image directe et réciproque de sous-espaces vectoriels)
Soit $f\ :\ E \to F$ *une application linéaire.*

1. *Si* E' *est un sous-espace vectoriel de* E, $f(E')$ *est un sous-espace vectoriel de* F.
2. *Si* F' *est un sous-espace vectoriel de* F, $f^{-1}(F')$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

En particulier, $\mathrm{Ker}\,(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* E *et* $\mathrm{Im}\,(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

Remarque 1.3.2 *Quand passer par le noyau pour montrer que l'on a un sous-espace vectoriel ? En général, lorsque sur un ensemble nous avons une condition qui peut s'écrire sous la forme d'une ou plusieurs équations se ramenant à des équations du type « ... = 0 ».*

Exemple 1.3.2

1. $F = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(0) = P(1) = P'(2) = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de*
2. $E = \{x \mapsto P(x)e^{\alpha x},\ P \in \mathbb{R}[X]\}$, *avec* α *dans* $\mathbb{R}$, *est un sous-espace vectoriel de*

Proposition 1.3.2 (Intersection de sous-espaces vectoriels) *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* I *un ensemble non vide et* $(F_i)_{i \in I}$ *une famille de sous-espaces vectoriels de* E. *Alors* $\displaystyle\bigcap_{i \in I} F_i$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Remarque 1.3.3 *ATTENTION : l'union de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel. Contrexemple : dans* $\mathbb{R}^2$, *on pose* $F_1 = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} = vect(1, 0)$ *et* $F_2 = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\} = vect(0, 1)$. *On a* $(1, 0)$ *dans* F_1 *et* $(0, 1)$ *dans* F_2, *mais* $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$ *n'est pas dans* $F_1 \cup F_2$.

Définition 1.3.2 (Sous-espace vectoriel engendré par une partie) *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* A *une partie de* E. *Il existe un plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* A. *Cet espace est le sous-espace vectoriel engendré par* A, *noté* $vect(A)$.
Autrement dit si F *est une sous-espace vectoriel de* E *tel que* $A \subset F$, *alors* $vect(A) \subset F$.

En particulier, si $(e_i)_{i \in I}$ *une famille de* E, *alors :* $vect((e_i)_{i \in I}) = \{\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i e_i / \forall i \in I,\ \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, *avec dans la somme un nombre fini de termes non nuls.*

Exemple 1.3.3 *Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose $f_k : x \mapsto \cos(kx)$. Montrer que f_k est dans vect$((\cos^p)_{0 \leq p \leq k})$.*

1.4 Familles libres

Définition 1.4.1 (Famille libre) 1. *Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de E est dite libre si la combinaison linéaire nulle s'obtient pour cette famille qu'avec des coefficients nuls, soit :*

Autrement dit 0 se décompose de façon unique dans vect$((e_i)_{i \in I})$.
Les vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ sont linéairement indépendants.

2. *Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est liée si elle n'est pas libre. Les vecteurs sont linéairement dépendants, soit :*

Méthode :

- Pour montrer qu'une famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre, on suppose qu'il existe une combinaison linéaire nulle : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ (avec λ_k dans $\mathbb{K}$) et on montre que ceci implique que tous les λ_k sont nuls.
  ATTENTION : Pour montrer qu'une famille est libre, il ne faut pas chercher à prouver qu'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que l'on ait : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ (ça existe toujours en prenant tous les λ_k nuls !).
  ATTENTION : $(x_1, ..., x_n)$ est libre ne signifie pas que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$.
  ATTENTION : Pour montrer que $(x_1, ..., x_n)$ est libre, il n'est pas suffisant de montrer que les vecteurs x_i sont deux à deux non colinéaires :

- Pour montrer qu'une famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée, il suffit de trouver $\lambda_1, ..., \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$.

Remarque 1.4.1 *Si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre dans E, alors pour $\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, ..., \mu_n$ dans $\mathbb{K}$, on a :* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \Longrightarrow$

Exemple 1.4.1 *Montrer que la famille $\left((X+1)^k (X-1)^{n-k}\right)_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathbb{C}_n[X]$.*

Proposition 1.4.1 (Famille de polynômes de degré échelonné) *Soient $P_1, ..., P_p$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :* $\left\{\begin{array}{l} P_1 \neq 0 \\ \forall k \in [\![1;p-1]\!],\ d^\circ P_k < d^\circ P_{k+1} \end{array}\right.$ *. On dit que la famille $(P_1, ..., P_p)$ est de degré echelonné et cette famille est libre.*

1.5 Familles génératrices

Définition 1.5.1 (Famille génératrice) *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que la famille de vecteurs $(e_i)_{i\in I}$ forme une famille génératrice de F, si : $vect((e_i)_{i\in I}) = F$. Autrement dit, tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire finie de $x_{i_1}, ..., x_{i_n}$, avec $i_1, ..., i_n$ dans I et on dit que F est engendré par la famille $(e_i)_{i\in I}$.*

Exemple 1.5.1 *1. Soit $a \in \mathbb{C}$. On note E l'ensemble des suites complexes telles que :*
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$.

(a) ***(CCP 55)*** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer u_n, pour tout n de $\mathbb{N}$.*

(b) Donner une partie génératrice de E pour $a = -2i$.

1.6 Bases

Définition 1.6.1 (Bases) *Soit $\mathcal{B}$ une famille de E. On dit que $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E.*
Ceci est équivalent à dire que tout vecteur x de E s'écrit d'une unique façon : $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$, avec : $\forall i \in I,\ \lambda_i \in \mathbb{K}$.
$(\lambda_i)_{i\in I}$ est appelée la famille des coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

Exemple 1.6.1 *1. On pose $E = \mathbb{K}^n$ et $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, ..., 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \varepsilon_n = (0, 0, ..., 0, 1)$. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. On appelle cette base la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

On a : $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ (x_1, ..., x_n) = (x_1, 0, ..., 0) + (0, x_2, 0, ...) + ... + (0, ..., 0, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$.

2. *Dans* $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X],\ d^\circ(P) \leq n\}$ *la famille* $(1, X, X^2, ..., X^n)$ *est une base appelée elle aussi base canonique de* $\mathbb{K}_n[X]$.
3. ***(CCP 60)*** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* f *l'endomorphisme de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *défini par* $f(M) = AM$. *Donner une base de* $\mathrm{Ker}\,(f)$. *Exprimer* f^k *en fonction de* k, *pour* $k \in \mathbb{N}$.

1.7 Applications linéaires et bases

Proposition 1.7.1 (Caractérisation de la bijectivité, injectivité et surjectivité) *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $(e_i)_{i \in I}$ *une base de* E.
Alors f *est bijective (resp. injective, surjective) si et seulement si la famille* $(f(e_i))_{i \in I}$ *est une base (resp. une famille libre, génératrice).*

Proposition 1.7.2 (Caractérisation d'une application par l'image d'une base) *Soit* $(e_i)_{i \in I}$ *une base de* E *et* $(f_i)_{i \in I}$ *une famille de vecteurs de* F. *Alors il existe une unique application* $u \in \mathcal{L}(E, F)$ *telle que :* $\forall i \in I,\ u(e_i) = f_i$.
En particulier pour f *et* g *dans* $\mathcal{L}(E, F)$ *telles que :* $\forall i \in I,\ f(e_i) = g(e_i)$. *Alors on a :* $f = g$.
Donc deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Exemple 1.7.1 *Soit* $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ *tel que :* $\forall k \in [\![0, n]\!],\ g(X^k) = X^{n-k}$, *alors* g *est*

Proposition 1.7.3 (Image et famille génératrice) *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $(e_i)_{i \in I}$ *une famille génératrice de* E. *Alors on a :* $\mathrm{Im}\,(f) = vect(\qquad\qquad)$.

Exemple 1.7.2 *On considère l'endomorphisme* f *qui à tout polynôme* P *de* $\mathbb{C}_n[X]$ *associe le polynôme*

$$f(P) = \frac{X^2 - 1}{2} P'' - XP' + P.$$

Montrer que $(f(1), f(X^3), f(X^4), ..., f(X^n))$ *est une base de* $\mathrm{Im}\, f$.

1.8 Dimension finie

1.8.1 Définition et existence de bases

Définition 1.8.1 (Espace vectoriel de dimension finie) *On dit que E est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice finie (il existe $x_1, ..., x_p$ dans E tels que : $E = vect(x_1, ..., x_p)$). Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.*

Proposition 1.8.1 (Existence d'une base) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et de dimension finie. Alors E admet au moins une base.*

Proposition 1.8.2 (Extraction d'une base) *Si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre, avec I un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$, alors il existe une partie J telle que : $I \subset J \subset [\![1,n]\!]$ telle que $(x_j)_{j\in J}$ soit une base de E.*
En particulier, de toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base.

Proposition 1.8.3 (Théorème de la base incomplète) *Soit $(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille libre de E de dimension finie. Alors on peut compléter cette famille en une famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ qui est une base de E, avec $n \geq p$.*

Définition 1.8.2 (Dimension d'un espace vectoriel) *Le nombre d'éléments d'une base de E est appelé dimension de E que l'on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\dim(E)$. Par convention $\dim\{0\} = 0$.*

Remarque 1.8.1 *Cette définition a un sens puisque l'on peut montrer d'une part l'existence d'une base pour un espace vectoriel de dimension finie et d'autre part que toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Exemple 1.8.1 $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) =$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) =$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}(E,F)) =$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) =$

Proposition 1.8.4 (Classification des espaces vectoriels de dimension finie) *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respective n et m finies.*

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si f est bijective (E et F sont isomorphes), alors $m = n$.*
2. *En particulier E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, via l'isomorphisme :* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, ..., \lambda_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \end{array}\right.$, *avec $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.*

Exemple 1.8.2 ***(CCP 55)*** *Soit $a \in \mathbb{C}$. On note E l'ensemble des suites complexes telles que :*
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$. *Quelle est la dimension de E ?*

1.8.2 Dimension et familles libres et génératrices

Proposition 1.8.5 (Cardinal d'une famille libre et génératrice) *On suppose E de dimension finie égale à n.*

1. *Toute famille libre possède*
2. *Toute famille génératrice de E possède*

Proposition 1.8.6 (Cardinal d'une famille et dimension)
1. *Si une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E possède p vecteurs avec $p > n = \dim(E)$, alors $\mathcal{F}$ est*

2. *Si* $F = vect(f_1, ..., f_p)$, *alors* $\dim(F)$ *car*
   On a l'égalité si et seulement si

Exemple 1.8.3 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Montrer qu'il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $a_0, ..., a_p \in \mathbb{K}$ *non tous nuls tels que* $\sum_{k=0}^{p} a_k A^k = 0$.

Proposition 1.8.7 (Caractérisation des bases) *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *avec* n *non nul. Soit* $\mathcal{B}$ *une famille finie de* E. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{B}$ *est une base de* E.
2. $\mathcal{B}$ *est libre et* $card(\mathcal{B}) = n$.
3. $\mathcal{B}$ *est une famille génératrice de* E *et* $card(\mathcal{B}) = n$.

Remarque 1.8.2 *Ce théorème est utile lorsque l'on connaît la dimension de* E *et que l'on veut montrer qu'une famille* $\mathcal{F}$ *est une base de* E. *En effet, il suffit de montrer que* $\mathcal{F}$ *possède* $\dim(E)$ *éléments et que c'est une famille libre (ou génératrice). En général, nous montrons que la famille est libre car ceci est plus simple dans la mesure où l'on a une série d'implications à établir avec une équation. Montrer qu'une famille est génératrice est plus compliqué car il faut montrer l'existence d'une décomposition suivant les vecteurs de cette famille et il est toujours plus difficile d'établir des propriétés d'existence.*

Exemple 1.8.4

1. *Montrer que la famille* $\left((X+1)^k(X-1)^{n-k}\right)_{0 \leq k \leq n}$ *est une base de* $\mathbb{C}_n[X]$.

   On remarque ainsi qu'une base de $\mathbb{K}_n[X]$ *n'est pas forcément constituée de polynômes de degré échelonné. En effet chaque* $(X+1)^k(X-1)^{n-k}$ *est de degré* n.
2. *Déterminer les polynômes* P *de* $\mathbb{C}_n[X]$ *tels que* $P = (X+i)P'$.

3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* D *l'endomorphisme de* $\mathbb{K}_n[X]$ *défini par :* $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ D(P) = P'$. *Soit* F *un sous-espace stable de* D *non réduit à* $\{0\}$.
   (a) *Soit* $P \in F$ *de degré* d. *Montrer que :* $\mathbb{K}_d[X] \subset F$.
   (b) *Montrer qu'il existe* $m \in [\![0, n]\!]$ *tel que* $F = \mathbb{K}_m[X]$.

1.8.3 Produit d'espaces vectoriels de dimension finie

Proposition 1.8.8 (Dimension d'un produit) *Soient* $(E_1,+,\cdot),(E_2,+,\cdot),...,(E_p,+,\cdot)$ *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension respectives* $n_1,...,n_p$*. Alors* $E_1\times E_2\times...\times E_p$ *est de dimension finie et*

$$\dim(E_1\times E_2\times...\times E_p)=$$

Remarque 1.8.3 *Pour* $p=2$*, on pose* $(e_1,...,e_{n_1})$ *une base de* E_1 *et* $(f_1,...,f_{n_2})$ *une base de* E_2*, alors* $((e_1,0),...,(e_{n_1},0),(0,f_1),...,(0,f_{n_2}))$ *est une base de* $E_1\times E_2$*. Si on étend cela pour* p *espaces, si* $(e^i_1,...,e^i_{n_i})$ *est une base de* E_i*, alors les* $(0,...,0,...,e^i_j,...,0,...,0)$ *avec* e^i_j *en position* i *constituent une base de* $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}E_i$.

1.8.4 Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition 1.8.9 (Sous-espace vectoriel et dimension)

1. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E*. Alors* F *est de dimension finie et on a :* $\dim(F)\leq\dim(E)$.
2. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E*. Si on a :* $\dim(F)=\dim(E)$*, alors* $E=F$

Exemple 1.8.5 *Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f\in\mathcal{L}(E)$.

1. *Montrer que la suite de terme général* $\dim\operatorname{Ker} f^k$ *est croissante.*
2. *Montrer qu'il existe* $k_0\in\mathbb{N}$ *tel que* $\operatorname{Ker} f^{k_0}=\operatorname{Ker} f^{k_0+1}$*, puis que :* $\forall k\geq k_0, \operatorname{Ker} f^k=\operatorname{Ker} f^{k_0}$.

Voici une nouvelle définition.

Définition 1.8.3 (Base adaptée à un sous espace vectoriel) *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E*. Soit* $(e_1,...,e_p)$ *une base de* F*. On dit qu'une base de* E *est adaptée à* F *si elle est de la forme* $(e_1,...,e_p,e_{p+1},...,e_n)$.

Exemple 1.8.6 *On reprend l'exemple 1.7.2, on considère l'application* f *qui à tout polynôme* P *de* $\mathbb{C}_n[X]$ *associe le polynôme* $f(P)=\dfrac{X^2-1}{2}P''-XP'+P$*. Donner une base adaptée à* $\operatorname{Im}(f)$.

1.8.5 Rang d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire

Définition 1.8.4 (Rang d'une famille de vecteurs) *On appelle rang d'une famille* $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ *la dimension de l'espace engendré* $\text{vect}\left((x_i)_{1\leq i\leq p}\right)$.

Remarque 1.8.4

1. *On a les deux majorations :* $\text{rg}\,(x_1,\ldots,x_p)\leq \dim E$ *et* $\text{rg}\,(x_1,\ldots,x_p)\leq p$.
2. *IMPORTANT* $(x_1,\ldots,x_p)$ *est libre si et seulement si*

Définition 1.8.5 (Rang d'une application linéaire) *E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (de dimension finie ou non) et f un élément de $\mathcal{L}(E,F)$.*
On suppose que $\text{Im}\, f$ *est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle rang de f, la dimension de* $\text{Im}\, f$.
On note $rg(f)=\dim(\text{Im}\, f)=\dim(f(E))$.

Remarque 1.8.5 *Si* $(e_1,...,e_n)$ *est une base de E, alors* $\text{rg}\,(f)=$

Théorème 1.8.1 (Théorème du rang) *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-ev et f une application linéaire de E dans F. Alors* $\text{Im}\, f$ *est de dimension finie et :*

$$\dim \text{Ker}\, f+\dim \text{Im}\, f=\text{rg}\, f+\dim \text{Ker}\, f=$$

Exemple 1.8.7

1. *Déterminer l'image de* $\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X]\\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X)\end{array}\right.$ *de l'exemple 1.2.2.*

2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient $f,g\in\mathcal{L}(E)$.*
   (a) *Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de E, alors :*
   $\dim(H\cap\text{Ker}\, g)+\dim((g(H))=\dim(H)$.
   (b) *En déduire que :* $\dim(\text{Im}\, f\cap\text{Ker}\, g)=\text{rg}\,(f)-\text{rg}\,(g\circ f)$.

Proposition 1.8.10 (Caractérisation de la bijectivité et dimension) *On suppose que* $\underline{n=\dim(E)=\dim(F)}$. *Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective.*
2. *f est surjective.*
3. *f est bijective.*
4. *L'image d'une base de E par f est une base de F.*
5. $rg(f)=n$.

Remarque 1.8.6 *1. Avec les hypothèses du théorème précédent, pour montrer que f est bijective, il est plus simple de montrer que f est injective. En effet la surjectivité est plus compliquée dans la mesure où l'on doit montrer l'existence d'un antécédent.*

2. Encore sous les mêmes hypothèse, si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors f est bijective si et seulement si $rg(f(e_1), ..., f(e_n)) = n$.

3. Ainsi un endomorphisme d'un espace vectoriel de <u>dimension finie</u> est bijectif si et seulement si il est injectif si et seulement si il est surjectif.

Exemple 1.8.8 *1. **(CCP 60)** On reprend l'exemple 1.6.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$. Cette application est-elle surjective ?*

*2. **(CCP 59)** Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & P - P' \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective.*

3. ATTENTION, ne pas inventer de résultats en dimension infinie. Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on considère les endomorphismes u et v définis par $u : P \mapsto \displaystyle\int_1^X P(u)du$ et $v : P \mapsto P'$.

*(a) **(CCP 83)** Déterminer $\mathrm{Ker}\,(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}\,(v \circ u)$. Est-ce que $u \circ v$ non injective est équivalent à $v \circ u$ non injective (dans le chapitre sur la réduction, on reformulera cela de la façon suivante : est-ce que 0 est valeur propre de $u \circ v$ est équivalent à 0 est valeur propre $v \circ u$?).*

(b) Montrer que v est surjective et u injective. A-t-on v et u bijectives ?

Proposition 1.8.11 (Rang et composition) *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ de rang fini. Alors on a $\mathrm{rg}\,(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}\,(u), \mathrm{rg}\,(v))$.*

Proposition 1.8.12 (Rang et composition par un isomorphisme) *Ici on n'a pas forcément* $\dim(E) = \dim(F)$.

1. Soit $g \in GL(E)$, alors $rg(f \circ g) = rg(f)$.

2. Soit $h \in GL(F)$, alors $rg(h \circ f) = rg(f)$.

Le rang d'une application linéaire est conservé par composition par un automorphisme.

1.8.6 Polynômes interpolateurs de Lagrange

(CCP 87/90)

Soit $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_1), P(a_2), ..., P(a_{n+1})) \end{array} \right.$, avec $a_1, ..., a_{n+1}$ dans $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

1. Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. Soient $b_1, ..., b_{n+1} \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme vérifiant $d^\circ P \leq n$ et : $\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ P(a_i) = b_i$.
3. On note $(e_1, ..., e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. On pose $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$. Montrer que $(L_1, ..., L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
4. Expliciter L_k.
5. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_1, ..., L_{n+1})$.
6. En déduire :
   (a) $\forall p \in [\![0, n]\!],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k^p L_k = X^p$.
   (b) si on se place dans $\mathbb{R}^2$, trouver une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points $A(0, 1),\ B(1, 3)$ et $C(2, 1)$.

1.9 Somme d'espaces vectoriels et applications

1.9.1 Somme de plusieurs sous-espaces vectoriels (programme de spé)

Définition 1.9.1 (Somme de sous-espaces vectoriels) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme des E_i que l'on note $\sum_{i=1}^{p} E_i$ l'ensemble*

$$E_1 + ... + E_p = \sum_{i=1}^{p} E_i = \{x_1 + x_2 + ... + x_p,\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i \in E_i\}.$$

On pose $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{p} E_i & \to & E \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & \sum_{i=1}^{p} x_i \end{array} \right.$, qui est linéaire. On remarque que $\operatorname{Im} \Phi = \sum_{i=1}^{p} E_i$.
On utilisera Φ pour les preuves qui suivent.

Remarque 1.9.1

1. *On a : $\forall j \in [\![1, p]\!],\ E_j \subset \sum_{i=1}^{p} E_i$, car :*

2. *Comme l'addition est commutative, l'ordre des E_i n'a pas d'importance.*

Proposition 1.9.1 (L'espace vectoriel $\sum_{i=1}^{p} E_i$) *Dans les conditions de la définition précédente, $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration : Φ est linéaire, donc son image $\operatorname{Im} \Phi = \sum_{i=1}^{p} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 1.9.2 *$\sum_{i=1}^{p} E_i$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les E_i.*

Exemple 1.9.1 *Soit $x_1, ..., x_p$ des vecteurs de E. On a alors :*
$vect(x_1) + vect(x_2) + ... + vect(x_p) =$

Définition 1.9.2 (Somme directe) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E. La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si pour tout $x \in \sum_{i=1}^{p} E_i$, l'écriture sous la forme $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$, avec les x_i dans E_i est unique, ce qui est équivalent à :*

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} E_i, \exists!(x_1, ..., x_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i.$$

La somme est alors notée $\sum_{i=1}^{p} E_i = \bigoplus_{1 \le i \le p} E_i$.

Remarque 1.9.3 *La somme est directe si et seulement si* Φ *est*

Exemple 1.9.2 *Soit* $(e_1, ..., e_p)$ *une base de* E*. On note* $E_i = vect(e_i)$*, pour* i *dans* $[\![1, p]\!]$*, alors :*

Proposition 1.9.2 (Caractérisation des sommes directes) *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soient* $E_1, \ldots, E_p$ *des sous-espaces vectoriels de* E*. Nous avons les équivalences suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_i = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$;
2. *Pour tout* $(x_1, ..., x_p)$ *de* $\displaystyle\prod_{i=1}^{p} E_i$*, on a :* $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], \quad x_i = 0_E$;
3. $\forall j \in [\![2, p]\!],\ (E_1 + ... + E_{j-1}) \cap E_j = \{0\}$.

Démonstration : La somme est directe si et seulement si Φ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$ si et seulement si : $\forall (x_1, ..., x_p) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{p} E_i,\ \Phi(x_1, ..., x_p) = \sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E \Rightarrow [(x_1, ..., x_p) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], \quad x_i = 0_E]$.
Supposons le dernier point.

Supposons le deuxième point.

Exemple 1.9.3 *Soient* $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$ *des réels et pour tout* k *de* $[\![1, n]\!]$*, on pose* $E_k = \{x \mapsto P(x)e^{\alpha_k x},\ P \in \mathbb{R}[X]\}$*. Montrer que la somme des* E_k *est directe (on pourra raisonner par récurrence).*

Remarque 1.9.4 1. *ATTENTION : pour* $p \geq 3$*, si on a* $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} E_i = \{0\}$*, cela n'implique pas que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est directe ! Contrexemple : dans* $\mathbb{K}^2$*, on pose* $e_1 = (1, 0)$ *et* $e_2 = (0, 1)$*. On note* $E_1 = vect(e_1)$ *;* $E_2 = vect(e_2)$ *et* $E_3 = vect(e_1 + e_2)$*.*

2. *ATTENTION : pour $p \geq 3$, si pour tout i, j distincts de $[\![1, p]\!]$, on a : $E_i \cap E_j = \{0\}$, cela n'implique pas que $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe ! Voir le contre-exemple précédent.*

3. *Si vous voulez montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, vous pouvez procéder par analyse-synthèse. Pour mettre cela en place, vous fixez un x quelconque de E. Ensuite vous montrez par analyse-synthèse qu'il existe un unique $(x_1, ..., x_p)$ dans $\prod_{i=1}^{p} E_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.*

4. *Pour montrer qu'une somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe, il suffit de prouver que $E_1 + E_2$ est directe, puis que $(E_1 \oplus E_2) + E_3$ est aussi directe, et ainsi de suite...*

Exemple 1.9.4 *Soient E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F' et G' de E tels que :*
$F = (F \cap G) \oplus F'$ et $G = (F \cap G) \oplus G'$. Montrer que : $F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'$.

Proposition 1.9.3 (Définition d'une application linéaire sur une somme directe) *Soient $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ et, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $u_k \in \mathcal{L}(E_k, F)$. Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $u_{|E_k} = u_k$.*

Démonstration : Analyse : si un tel u existe, alors pour $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$ dans E, avec $(x_1, ..., x_p) \in E_1 \times ... \times E_p$, on a par linéarité : $u(x) = \sum_{k=1}^{p} u(x_k) = \sum_{k=1}^{p} u_k(x_k)$. Ceci prouve l'unicité.

Examen : Soit $x \in E$ et $(x_1, ..., x_p) \in E_1 \times ... \times E_p$ tels que : $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$. On pose $u(x) = \sum_{k=1}^{p} u_k(x_k)$.

L'unicité de la décomposition de x dans $\bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ assure que l'application u est définie sans ambiguïté.

Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Soit $z \in E_i$. La décomposition de z dans $\bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ est $z = 0 + ... + 0 + \underset{\in E_i}{z} + 0 + ... + 0$ et donc $u(z) = u_1(0) + ... + u_{i-1}(0) + u_i(z) + u_{i+1}(0) + ... + u_p(0) = u_i(z)$ et donc $u|_{E_i} = u_i$.
Reste à montrer que u est bien linéaire.

Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$ et $y = \sum_{k=1}^{p} y_k$ avec $(x_1, ..., x_p), (y_1, ..., y_p) \in E_1 \times ... \times E_p$.

Ainsi $x + \lambda y = \sum_{i=1}^{p} (x_i + \lambda y_i)$, avec : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i + \lambda y_i \in E_i$. Par définition, on a donc :

$$u(x+\lambda y)=\sum_{i=1}^{p} u_i(x_i+\lambda y_i)=\sum_{i=1}^{p} u_i(x_i)+\lambda\sum_{i=1}^{p} u_i(x_i)=u(x)+\lambda u(y).$$

Remarque 1.9.5 $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{L}(E_1,F)\times ... \times \mathcal{L}(E_p,F) \\ u & \mapsto & (u|_{E_1},...,u|_{E_p}) \end{array}\right.$ *est un isomorphisme.*

Proposition 1.9.4 (Base adaptée à $E=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $E_1,\dots,E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que : $E=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Soit $i\in [\![1,p]\!]$ et $\mathcal{B}_i$ une base de E_i. Alors la famille $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_1,...,\mathcal{B}_p)$ obtenue en juxtaposant les $\mathcal{B}_i$ est une base de E. Cette base est dite* ***adaptée à*** *$E=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.*
Autrement dit pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, si $(e_1^i,e_2^i,...,e_{n_i}^i)$ est une base de E_i, alors $(e_1^1,e_2^1,...,e_{n_1}^1,e_1^2,e_2^2,...,e_{n_2}^2,...,e_1^p,e_2^p,...,e_{n_p}^p)$ (on regroupe toutes les bases) est une base de E adaptée à $E=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Démonstration : On pose $E_i=vect(\mathcal{B}_i)$, avec $\mathcal{B}_i=(e_1^i,...,e_{n_i}^i)$, pour i dans $[\![1,p]\!]$. Les $(0,...,0,...,e_j^i,...,0,...,0)$ avec e_j^i en position i constituent une base de $\prod_{i=1}^{p} E_i$. Nous avons $\Phi(0,...,0,...,e_j^i,...,0,...,0)=e_j^i$, pour i dans $[\![1,p]\!]$ et j dans $[\![1,n_i]\!]$. Ainsi Φ envoie une base de $\prod_{i=1}^{p} E_i$ en une base de E. Ainsi Φ est un isomorphisme. Comme Φ est injective, la somme $\sum_{i=1}^{p} vect(\mathcal{B}_i)$ est directe. La surjectivité nous donne $E=\operatorname{Im}\Phi=\sum_{i=1}^{p} vect(\mathcal{B}_i)$, d'où le résultat.

Proposition 1.9.5 (Dimension d'une somme) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $E_1,\dots,E_p$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.*

1. *On a :* $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right)\leq \sum_{i=1}^{p}\dim(E_i)$.
2. *La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si :*
3. *Si E est de dimension finie et la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe, alors :*
$$\sum_{i=1}^{p}\dim(E_i)=\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_i\right)\leq \dim(E).$$

Démonstration :

1. L'application $\Phi:\left\{\begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{p} E_i & \to & \sum_{i=1}^{p} E_i \\ (x_1,...,x_p) & \mapsto & \sum_{i=1}^{p} x_i \end{array}\right.$ est surjective. Grâce au théorème du rang :
$$\dim\operatorname{Im}\Phi\leq\dim\operatorname{Im}\Phi+\dim\operatorname{Ker}\Phi=\dim(\prod_{i=1}^{p} E_i),\text{ soit }\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right)\leq\dim(\prod_{i=1}^{p} E_i)=\sum_{i=1}^{p}\dim(E_i).$$

2. En reprenant l'application Φ, la somme est directe ssi Φ est injective ssi $\dim \operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$ ssi $\dim \operatorname{Im} \Phi = \dim(\prod_{i=1}^{p} E_i)$ ssi $\dim \left(\sum_{i=1}^{p} E_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

3. L'inégalité vient du fait que $\sum_{i=1}^{p} E_i$ soit un sous-espace vectoriel de E et donc $\dim \left(\sum_{i=1}^{p} E_i \right) \leq \dim(E)$. Comme $\sum_{i=1}^{p} E_i \subset E$, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ si et seulement si $\dim \left(\sum_{i=1}^{p} E_i \right) = \dim(E)$.

1.9.2 Cas particulier : somme de deux sous-espaces vectoriels

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E' et E'' désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

Proposition 1.9.6 (Somme directe de deux sous-espaces vectoriels) *La somme $E' + E''$ est direct si et seulement si $E' \cap E'' = \{0\}$.*

Remarque 1.9.6 *À ne pas confondre avec $E' \cap E'' = \emptyset$.*

Exemple 1.9.5 *La somme $S_n(\mathbb{K}) + T_n^+(\mathbb{K})$ est-elle directe ?*

Définition 1.9.3 (Sous-espaces vectoriels supplémentaires) *On dit que E' et E'' sont supplémentaires dans E si : $E' \oplus E'' = E$.*

Remarque 1.9.7 *Il y a deux informations contenues dans $E' \oplus E'' = E$. D'une part $E' + E'' = E$ et d'autre part la somme est directe.*

Exemple 1.9.6
1. ***(CCP 62)*** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - f - 2Id = 0$. Montrer que :* $\operatorname{Ker}(f + Id) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2Id) = E$.

2. ***(CCP 92)*** *Si on note $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$) l'ensembles des matrices symétriques (resp. antisymétrique), c'est-à dire vérifiant $M^T = M$ (resp. $M^T = -M$). On a : $S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M =$*

Proposition 1.9.7 (Existence d'un supplémentaire) *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède au moins un supplémentaire dans E (c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel S de E tel que : $E = F \oplus S$).*

Théorème 1.9.1 (Formule de Grassmann) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ou infinie. Soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors $E' + E''$ est de dimension finie et : $\dim(E' + E'') =$*

Exemple 1.9.7 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) + \dim(G) > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$*

Proposition 1.9.8 (Caractérisation d'espaces supplémentaires par la dimension) *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

1. $F \oplus G = E \iff F \cap G = \{0\}$ *et* $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
2. $F \oplus G = E \iff F + G = E$ *et* $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Exemple 1.9.8

1. ***(CCP 71)*** *Soient $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ et $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y/2 = z/3\}$. Montrer que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.*

2. ***(CCP 64)*** *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.*
   (a) *Montrer que :* $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f^2)$.
   (b) *Montrer que :* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f^2) \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f^2)$.
   (c) *Montrer que :* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f^2) \Rightarrow \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

Remarque 1.9.8 *ATTENTION, erreurs à ne pas faire :*

- *Ne pas confondre réunion de sous espaces vectoriels et somme de deux sous-espaces vectoriels. Dans* $\mathbb{R}^2$*, si* $E_1 = vect(1,0)$ *et* $E_2 = vect(0,1)$*, alors* $E_1 + E_2 = vect\,((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$*, mais* $E_1 \cup E_2 \neq \mathbb{R}^2$*, par exemple il ne contient pas* $(1,1)$*.*
- *Le complémentaire* $E\backslash F$ *d'un sous-espace vectoriel* F *de* E *n'est pas un sous-espace vectoriel, car :* 0 *est dans* F *(en tant que sous-espace vectoriel de* E*), donc* $0 \notin E \setminus F$*.*
  Ainsi il ne faudra pas confondre la notion de complémentaire et de supplémentaire, car le premier n'est pas un sous-espace vectoriel de E *tandis que l'autre oui.*
- *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* E*, alors* $E' + F = E'' + F$ *<u>n'implique pas</u> :* $E' = E''$*. On ne fait pas d'opérations sur les sous-espaces vectoriels.*

Proposition 1.9.9 (Supplémentaire du noyau) *Soient* E *et* F *deux espaces* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f \in \mathcal{L}(E,F)$*. Soit* S *un sous-espace vectoriel de* E *tel que* $S \oplus \mathrm{Ker}\,(f) = E$*. Ainsi* $f|_S$ *induit un isomorphisme de* S *dans* $\mathrm{Im}\,(f)$*.*

1.9.3 Projecteurs

Définition 1.9.4 (Projection) E' *et* E'' *désignent deux sous-espaces vectoriels de* E *supplémentaires* ($E' \oplus E'' = E$)*.Tout élément* x *de* E *s'écrit de façon unique sous la forme* $x = x' + x''$ *avec* (x', x'') *dans* $E' \times E''$*. On appelle la projection sur* E' *parallélement à* E'' *l'application*

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x = x' + x'' & \mapsto & x' \end{array} \right. .$$

Ainsi $x = \underbrace{p(x)}_{\in E'} + \underbrace{x - p(x)}_{\in E''}$.

Exemple 1.9.9 ***(CCP 71)*** *On reprend l'exemple 1.9.8. Soient* $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ *et* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y/2 = z/3\}$*. On a vu que :* $P \oplus D = \mathbb{R}^3$*. Soit* p *la projection sur* P *parallèlement à* D*. Soit* $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}$*. Exprimer* $p(u)$*.*

Proposition 1.9.10 (Propriétés des projections) *Soit* p *la projection sur* E' *parallélement à* E''*.*

1. $\operatorname{Im} p =$ *et* $\operatorname{Ker} p =$
   Ainsi on a : $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = E$.
2. $x \in \operatorname{Im}(p) \iff p(x) = \qquad \iff x \in \operatorname{Ker}(\qquad)$
3. $p^2 (= p \circ p) =$

Définition 1.9.5 (Projecteurs) *On appelle projecteur de E tout endomorphisme qui coïncide avec une projection sur un sous-espace vectoriel de E parallèlement à un supplémentaire de celui-ci.*

Remarque 1.9.9
1. *Si f est un projecteur, alors $\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E$, mais attention la réciproque est fausse, voir l'exemple ci-dessous.*
2. *Si p est un projecteur, on montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p^n = p$.*

Exemple 1.9.10 *On reprend l'exemple 1.6.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$ et (M_1, M_2) est une base de $\operatorname{Ker}(f)$, avec $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

1. ***(CCP 60)*** *Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.*
2. ***(CCP 60)*** *A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$?*
3. *Est-ce que f est un projecteur ?*

Proposition 1.9.11 (Caractérisation des projecteurs) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$. Dans ce cas f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.*

Exemple 1.9.11
1. *Soient E un espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs qui commutent.*
   (a) *Montrer que pq est un projecteur.*
   (b) *Montrer que $\operatorname{Im}(pq) = \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$ et $\operatorname{Ker}(pq) = \operatorname{Ker}(p) + \operatorname{Ker}(q)$.*

2. *Soit $G = \{g_1, ..., g_q\}$ un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{K})$. On pose $p = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{i=1}^{q} g_i$. Montrer que p est un projecteur.*

Définition 1.9.6 (Projecteurs asociés à $E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, ..., E_q$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$. Soit $k \in [\![1, q]\!]$. On note p_k l'application telle que $p_k|_{E_k} = Id_{E_k}$ et $p_k|_{E_i} = 0$, si $i \neq k$.*
Autrement dit pour $x = x_1 + ... + x_q$, avec $(x_1, ..., x_q) \in E_1 \times ... \times E_q$, on a $p_i(x) = x_i$.
Les applications $p_1, ..., p_q$ sont appelés projecteurs associés à $E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$.

Proposition 1.9.12 (Propriétés des projecteurs asociés à $E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$) *En reprenant les notations précédentes, pour tout k de $[\![1, q]\!]$ l'application p_k est un projecteur. En particulier, c'est une projection sur E_k parallèlement à $\bigoplus_{i \in [\![1,q]\!] \setminus \{k\}}^{q} E_i$.*

Démonstration : On pose $F_k = \bigoplus_{i \in [\![1,q]\!] \setminus \{k\}}^{q} E_i$. Montrons que $E_k \oplus F_k = E$. Soit $x \in E$. Il existe $(x_1, ..., x_q) \in E_1 \times ... \times E_q$ tel que $x = x_1 + ... + x_q$ et donc $x = x_k + \sum_{i \in [\![1,q]\!] \setminus \{k\}} x_i$ qui est dans $E_k + F_k$.
Ainsi $E = E_k + F_k$.
Soit $x \in E_k \cap F_k$. Il existe $(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_q) \in E_1 \times ... \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times ... \times E_q$ tel que $\sum_{i \in [\![1,q]\!] \setminus \{k\}} x_i = x$, soit $x_1 + ...x_{k-1} - x + x_{k+1} + ... + x_q = 0$, ainsi grâce à la proposition 1.9.2, on a $x = 0$.
Ainsi $E_k \cap F_k = \{0\}$.
Pour $x = x_k + \sum_{i \in [\![1,q]\!] \setminus \{k\}} x_i$ qui est dans $E_k + F_k$, on a $p_k(x) = x_k$, ce qui fait de p_k la projection sur E_k parallèlement à $\bigoplus_{i \in [\![1,q]\!] \setminus \{k\}}^{q} E_i$.

Remarque 1.9.10 1. *Pour $i, j \in [\![1, q]\!]$, on a $p_i \circ p_j =$*

2. On a $\sum_{i=1}^{q} p_i =$

Exemple 1.9.12 *Soient* $f_1, ..., f_p$ *dans* $\mathcal{L}(E)$ *tels que* $f_i \circ f_j = 0$ *si* $i \neq j$ *et* $\sum_{i=1}^{p} f_i = Id_E$*. Montrer que* $E = \bigoplus_{j=1}^{p} \operatorname{Im} f_j$*.*

1.9.4 Symétries vectorielles

Définition 1.9.7 (Symétrie) *E' et E'' désignent deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires ($E' \oplus E'' = E$). Tout élément x de E s'écrit de façon unique sous la forme $x = x' + x''$ avec (x', x'') dans $E' \times E''$. On appelle la symétrie sur E' parallélement à E'' l'application*

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x = x' + x'' & \mapsto & x' - x'' \end{array} \right. .$$

Remarque 1.9.11 *Soit p la projection sur E' parallélement à E''. Alors $s =$*

Proposition 1.9.13 (Propriétés des symétries) *Soit s la symétrie sur E' parallélement à E''. Alors :*

1. $E' = \{x \in E / s(x) = x\} = \operatorname{Ker}(s - Id_E)$ *et* $E'' = \{x \in E / s(x) = -x\} = \operatorname{Ker}(s + Id_E)$.
2. $s^2 (= s \circ s) = Id_E$.

Définition 1.9.8 (L'ensemble des symétries) *On appelle symétrie de E tout endomorphisme qui coïncide avec une symétrie sur un sous-espace vectoriel de E parallèlement à un supplémenteire de celui-ci.*

Proposition 1.9.14 (Caractérisation des symétries) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est une symétrie si et seulement si $f^2 = Id_E$. Dans ce cas f est la symétrie sur $\operatorname{Ker}(f - Id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f + Id_E)$ et on a : $E = \operatorname{Ker}(f - Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f + Id_E)$.*

Exemple 1.9.13 *Soit* $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^T \end{array} \right.$ *. L'application s est une symétrie car elle est linéaire et :*
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ s^2(A) = s(s(A)) = s(A^T) = (A^T)^T = A$*. De plus :*
$\operatorname{Ker}(s + Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) =$

$\operatorname{Ker}(s - Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) =$

Ainsi s est la symétrie sur parallèlement à
Grâce à la proposition précédente, on retrouve : $S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.10 Hyperplans

Soient E un espace $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose $E \neq \{0_E\}$.

Définition 1.10.1 (Hyperplan) *Soit H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un hyperplan de E s'il existe un forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle, telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$.*
Dans ce cas, $H = \{x \in E,\ \varphi(x) = 0\}$, ce qui définit une équation de l'hyperplan H.

Proposition 1.10.1 (Hyperplans et équations en dimension finie) *Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe un n-uplet non nul $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $H = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \middle/ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$.*

Exemple 1.10.1 *Le plan P d'équation $x + y + z = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.*

Proposition 1.10.2 (Caractérisation géométrique des hyperplans) *Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propositions suivantes sont équivalences :*

- *H est un hyperplan de E.*
- *H est supplémentaire d'une droite de E, c'est-à-dire il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.*

Dans ce cas, toute droite D' non contenue dans H vérifie : $E = H \oplus D'$.

Exemple 1.10.2 *Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E,\ f(3) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $E = F \oplus G$.*

Corollaire 1.10.1 (Caractérisation géométrique des hyperplans en dimension finie) *Si E est de dimension n (avec n dans $\mathbb{N}^*$), alors les hyperplans sont exactement les sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$.*

Exemple 1.10.3 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, puis $H_1 = \{S \in \mathbb{C}_n[X],\ S'(1) = 0\}$ et $H_2 = \{S \in \mathbb{C}_n[X],\ S'(-1) = 0\}$. Montrer que : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$.*

Proposition 1.10.3 (Comparaison de deux équations d'hyperplan) *Soit H un hyperplan de E*

1. *Soient φ et ψ deux formes linéaires telles que $H = \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda \varphi$.*
2. *Si E est de dimension finie n et H est un hyperplan ayant pour équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ b_i = \lambda a_i$.*

Proposition 1.10.4 (Caractérisation des espaces de dimension $n-p$**)** *Soit E un espace vectoriel de dimension n.*

- *Si $(H_1, \dots, H_p)$ est une famille d'hyperplans de E, alors*

$$\dim\left(\bigcap_{k=1}^{p} H_k\right) \geq n-p.$$

- *Si F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-p$, il existe $(H_1, \dots, H_p)$ des hyperplans tels que*

$$F = \bigcap_{k=1}^{p} H_k.$$

1.11 Algèbres

Définition 1.11.1 (Structure d'algèbre) *Un ensemble $\mathcal{A}$ muni de deux lois de composition interne $+ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et $\times : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, et d'une loi $\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ externe, est une algèbre lorsque :*

1. *$(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau.*
2. *$(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
3. *Les lois $\times$ et $\cdot$ sont compatibles : $\forall (a,b) \in \mathbb{K}^2$, $\forall (x,y) \in \mathcal{A}^2$, $(a \cdot x) \times (b \cdot y) = (ab) \cdot (x \times y)$.*

On note usuellement $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$.

Exemple 1.11.1 *Les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$-algèbres usuelles : $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$, $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$, $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X un ensemble non vide.*

Définition 1.11.2 (Sous-algèbre) *Un ensemble $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre d'une algèbre $\mathcal{A}$ lorsque $\mathcal{B}$ est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$.*

Exemple 1.11.2

1. *L'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
2. *L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Définition 1.11.3 (Morphisme d'algèbres) *Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux $\mathbb{K}$-algèbres. Une application $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est un morphisme d'algèbre lorsque f est un morphisme d'anneaux et d'espaces vectoriels.*

Exemple 1.11.3

1. *Fixons $a \in \mathbb{K}$. L'application $\mathrm{ev}_a : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ P & \mapsto & P(a) \end{array} \right.$, est un morphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ dans la $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathbb{K}, +, \cdot, \cdot)$.*
2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $g \in GL(E)$ fixé. L'application $\varphi_g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ h & \mapsto & g \circ h \circ g^{-1} \end{array} \right.$, est un morphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ dans elle-même, car :*

2 Matrices

2.1 Rappels de sup sur calcul matriciel

2.1.1 Opérations sur les matrices

Notation : Pour (i,j) dans $\mathbb{N}^2$, on note δ_{ij} le symbole de Kronecker défini par $\left\{ \begin{array}{lll} \delta_{ij} = 1 & \text{si} & i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si} & i \neq j \end{array} \right.$.

Définition 2.1.1 (Matrice) *On appelle matrice de type (n,p) sur $\mathbb{K}$ toute application*

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \to & \mathbb{K} \\ (i,j) & \mapsto & a_{i,j} \end{array} \right.$$

On la note $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. Elle est représentée par un tableau avec n lignes et p colonnes :

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & j & & \phantom{a_{1p}} \end{matrix} \\ i & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}.$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si $n = p$, on parle de matrice carrée d'ordre n. Dans ce cas on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

Définition 2.1.2 (Opérations)

1. *Soient $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et λ dans $\mathbb{K}$. On définit les opérations*
   (a) ***Addition :*** $A + B = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} + [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.
   (b) ***Multiplication par un scalaire :*** $\lambda A = \lambda \cdot [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = [\lambda a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.
2. ***Multiplication de deux matrices*** *Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq \boldsymbol{q}}} \in \mathcal{M}_{r,\boldsymbol{q}}(\mathbb{K})$ et $B = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq \boldsymbol{q} \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{q},p}(\mathbb{K})$. On appelle produit matriciel de A par B la matrice de $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ notée AB définie par $AB = [c_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq p}}$ avec $c_{ij} =$*

Remarque 2.1.1

1. *ATTENTION : le produit matriciel n'est pas commutatif, on n'a pas $AB = BA$.*
2. *ATTENTION : $AB = 0$ n'implique pas que $A = 0$ ou $B = 0$.*

<u>Disposition pratique :</u>

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \boxed{b_{1,j}} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & \boxed{b_{k,j}} & \cdots & b_{k,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{q,1} & \cdots & \boxed{b_{q,j}} & \cdots & b_{q,p} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i,1}} & \cdots & \boxed{a_{i,k}} & \cdots & \boxed{a_{i,q}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,k} & \cdots & a_{r,q} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & \boxed{c_{i,j}} & \cdots & c_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{r,1} & \cdots & c_{r,j} & \cdots & c_{r,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 2.1.1

1. *Soit $L = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.*

   Alors $LC =$.

   On identifie donc cette matrice à un scalaire. Par ailleurs $CL =$

2. *Soit* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & MD - DM \end{array} \right.$,

avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ *et* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *dans* $\mathbb{C}$ *deux à deux distincts. Déterminer* $\operatorname{Ker}\varphi$.

Définition 2.1.3 (Matrice identité) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On pose* $I_n = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}}^{n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On a aussi* $I_n = [\qquad]_{1 \le i,j \le n}$. *On appelle cette matrice la matrice identité.*

Exemple 2.1.2 *Soit* $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ *et* $B = [b_{ij}]_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le j \le n}}$. *Alors on a* $I_n A = A$ *et* $BI_n = B$.

2.1.2 Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2.1.4 (Base canonique) *Pour* (i, j) *dans* $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, *on pose*

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

c'est-à-dire tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) *qui vaut* 1.
$E_{ij} = [\qquad\qquad\qquad]_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le l \le p}}$. *On appelle* $(E_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ *la base canonique de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 2.1.1 (Décomposition de matrices suivant E_{ij})

1. *Soit* $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

   Alors on a une unique combinaison linéaire de A *avec les matrices* (E_{ij}) : $A =$

2. $(E_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ *est une base de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 2.1.3 *Soit* $E = \{[a_{i,j}]_{1 \le i,j \le 2n},\ \forall i, j \in [\![1, 2n]\!],\ i + j \equiv 1[2] \Rightarrow a_{i,j} = 0\}$. *Montrer que* E *est un espace vectoriel, dont on précisera la dimension. Montre que* E *est stable par produit.*

Proposition 2.1.2 (Multiplication des éléments de la base canonique) *Soient* $(i,j,k,l) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]^2 \times [\![1,p]\!]$. *On a* $E_{ij}E_{kl} =$

2.1.3 Transposition

Définition 2.1.5 (Transposée) *Soit* $A = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On appelle transposée de* A *la matrice de* $\mathcal{M}_{\boldsymbol{p,n}}(\mathbb{K})$ *notée* A^T *et définie par* $A^T = [a'_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$ *avec* $a'_{ij} = a_{ji}$.

Proposition 2.1.3 (Opération et transposition) *Soient* $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors on a :*

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. $(A^T)^T = A$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Exemple 2.1.4

1. *Soit* $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. *On a :*

$$A = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccc} & i & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & a_{ij} & \\ & -a_{ij} & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccc} & i & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & 1 & \\ & -1 & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$= \displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}(E_{ij} - E_{ji})$. *Ainsi toute matrice de* $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, *se décompose de façon unique suivant la famille* $(E_{ij} - E_{ji})_{1\leq i<j\leq n}$, *qui est donc une base de* $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. *Cette famille possède* $n(n-1)/2$ *éléments. Ainsi :* $\dim_K(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = n(n-1)/2$.

De même $((E_{ij} + E_{ji})_{1\leq i<j\leq n}, (E_{ii})_{1\leq i\leq n})$ *est une base de* $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ *et donc* $\dim_K(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = n(n-1)/2 + n = n(n+1)/2$.

2. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *et* $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. *Montrer que* $X^T A Y = Y^T A^T X$.

2.1.4 Trace

Définition 2.1.6 (Trace d'une matrice) *Soit* $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *On appelle trace de* A *le scalaire* $tr(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, *qui est la somme des éléments diagonaux de* A.

Exemple 2.1.5 ***(CCP 92)*** *Soit $M = [m_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $tr(\overline{M}^T M)$ ($\overline{M}$ étant la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M).*

Proposition 2.1.4 (Trace de la transposée) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $tr(A) = tr(A^T)$.*

Proposition 2.1.5 (Opérations sur la trace)

1. *Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a : $tr(\lambda A + \mu B) = \lambda tr(A) + \mu tr(B)$ (la trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).*
2. *Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a : $tr(AB) = tr(BA)$.*

Remarque 2.1.2

1. *ATTENTION, on ne peut pas généraliser la proposition précédente avec trois matrices. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $ABC = 0$ et $BAC = C$ et donc $tr(ABC) = 0$ et $tr(BAC) = 1$ donc $tr(ABC) \neq tr(BAC)$.*
2. *ATTENTION : $tr(AB) \neq tr(A).tr(B)$ (prendre par exemple $A = B = I_n$).*

Exemple 2.1.6

1. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Peut-on avoir : $AB - BA = I_n$?*
2. *Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. On pose $M = CL$. Montrer que $M^2 = tr(M)M$.*
3. *Soit $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $k, l \in [\![1, n]\!]$. Calculer $tr(AE_{kl})$.*
   Puis en déduire que s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $tr(AM) = tr(BM)$, alors $A = B$.

2.1.5 Matrices inversibles

Définition 2.1.7 (Matrice inversible) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que l'on ait : $AB = I_n$ ou $BA = I_n$. La matrice B est appelée l'inverse de la matrice A et est notée A^{-1}. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et on l'appelle groupe linéaire d'ordre n.*

Remarque 2.1.3

1. *Ne jamais écrire $1/A$.*
2. *Soient $A, B_1, B_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A inversible. Alors*

- $AB_1 = AB_2 \Rightarrow B_1 = B_2$.
- $B_1 A = B_2 A \Rightarrow B_1 = B_2$.
- *(IMPORTANT) Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tel qu'il existe* B *dans* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *ou* C *dans* $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *non nulles telles que* $AB = 0$ *ou* $CA = 0$ *(on dit que* A *est un diviseur de 0)*
  Alors A *n'est pas inversible. En effet si* A *est inversible et si on a* $AB = 0$ *par exemple, alors on a* $A^{-1}AB = A^{-1}0$ *et donc* $B = 0$*, ce qui est impossible.*

Exemple 2.1.7

1. $I_n^{-1} = I_n$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \forall A \in GL_n(\mathbb{K}),\ (\lambda A)^{-1} =$
3. *Soit* $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, avec* n *dans* $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$*. Calculer* J^2 *puis en déduire que* J *n'est pas inversible.*
4. ***IMPORTANT :*** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $k \in \mathbb{N}$*. On a :* $(PAP^{-1})^k =$
5. *Soit* $E = \{[a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 2n},\ \forall i,j \in [\![1, 2n]\!],\ i + j \equiv 1[2] \Rightarrow a_{i,j} = 0\}$*. Montrer que si une matrice de* E *est inversible, alors son inverse est dans* E*.*

Remarque 2.1.4

1. ***ATTENTION :*** *La matrice* J *montre que si une matrice carrée* A *est non nulle ou que tous ses coefficients sont non nuls, alors elle n'est pas forcément inversible.*
2. ***ATTENTION****, pour* $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ *inversible, l'exemple précédent montre que* A^{-1} *n'est pas égale à* $[1/a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ *.*

Proposition 2.1.6 (Opérations sur l'inverse) *Soient* $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$*.*

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. AB *est inversible et* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. A^T *est inversible et* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
4. *Pour tout* k *de* $\mathbb{N}$*, la martice* A^k *est inversible et* $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Définition 2.1.8 (Déterminant d'une matrice 2×2) *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$*. On appelle déterminant de* A *noté* $\det(A)$ *ou* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ *le scalaire* $ad - bc$*.*

Proposition 2.1.7 (Inverse d'une matrice 2×2) *A est inversible si et seulement si* $\det(A)$ *est non nul. Dans ce cas, nous avons* $A^{-1} =$

2.1.6 Matrices diagonales et triangulaires

Définition 2.1.9 (Matrice diagonale) *$A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale, quand :* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$, *c'est-à-dire* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. *On note celle-ci $diag(a_{11}, ..., a_{nn})$. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.*

Proposition 2.1.8 (Opération et matrice diagonale) *Soit $D = diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $D' = diag(\alpha'_1, ..., \alpha'_n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :*

1. $\lambda D = diag(\lambda\alpha_1, ..., \lambda\alpha_n)$
2. $D + D' = diag(\alpha_1 + \alpha'_1, ..., \alpha_n + \alpha'_n)$
3. $DD' = D'D = diag(\alpha_1\alpha'_1, ..., \alpha_n\alpha'_n)$
4. $\forall k \in \mathbb{N},\ D^k = diag(\alpha_1^k, ..., \alpha_n^k)$
5. $D \in GL_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \alpha_i \neq 0$ *et dans ce cas,* $D^{-1} = diag(\alpha_1^{-1}, ..., \alpha_n^{-1})$.

Définition 2.1.10 (Matrices antisymétriques et symétriques) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *On dit que A est symétrique si $A^T = A$ et on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques. Si $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique, alors : $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{ij} = a_{ji}$.*
- *On dit que A est antisymétrique si $A^T = -A$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Si $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ est antisymétrique, alors : $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{ij} = -a_{ji}$.*

Remarque 2.1.5

1. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
2. *Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétriques sont nuls, car :* $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$.
3. *Le produit de matrices symétriques n'est pas toujours symétrique en effet* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 2.1.11 (Matrices triangulaires)

1. *$A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure, quand :*
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j < i \Longrightarrow a_{ij} = 0,\ \text{c'est-à-dire } A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficient dans $\mathbb{K}$.
2. *$A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire inférieure, quand :*
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0,\ \text{c'est-à-dire } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ * & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
On note $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures à coefficient dans $\mathbb{K}$.

Proposition 2.1.9 (Opérations et matrices triangulaires)

1. *Soient A et B dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
   (a) $A + B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
   (b) $\lambda A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
   (c) $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
2. *On a les mêmes propriétés pour les matrices triangulaires inférieures.*

Remarque 2.1.6 $\begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & * & \dots & * \\ 0 & b_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22}b_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$.
On a le même type de produit pour les matrices triangulaires inférieures.

Proposition 2.1.10 (Matrices triangulaires inversibles)

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
   (a) $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ a_{kk} \neq 0$.
   (b) *Si A est inversible, alors* A^{-1} *est dans* $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ *et* A^{-1} *est de la forme* $\begin{pmatrix} 1/a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$,
   attention on ne peut rien dire pour les coefficients en dehors de la diagonale !
2. *On a les mêmes types de résultats pour* $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

2.1.7 Matrices par blocs

Définition 2.1.12 (Matrices par blocs) *Soit* $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $0 = i_0 < i_1 < ... < i_m = n$ *et* $0 = j_0 < j_1 < ... < j_q = p$ *tels que pour tout* $r \le \min(m, q)$, *on ait* $i_r = j_r$.
Pour $1 \le r \le m$ *et* $1 \le s \le q$, *on pose* $A_{rs} = (a_{i,j})_{\substack{i_{r-1}<i\le i_r \\ j_{s-1}<j\le j_s}}$.
Les matrices A_{rs} *sont des sous-matrices de A, appelées blocs et l'écriture* $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mq} \end{pmatrix}$.

Proposition 2.1.11 (Combinaison linéaire de matrices par blocs) *Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *et* $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mq} \end{pmatrix}$,
$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mq} \end{pmatrix}$, *avec des blocs de même taille. On a alors on a :*
$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} + \mu B_{11} & \cdots & \lambda A_{1q} + \mu B_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{m1} + \mu B_{m1} & \cdots & \lambda A_{mq} + \mu B_{mq} \end{pmatrix}$.

Proposition 2.1.12 (Produit par blocs) *Soient* $A \in \mathcal{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$, $A' \in \mathcal{M}_{p_1,q_1}(\mathbb{K})$, $B' \in \mathcal{M}_{p_1,q_2}(\mathbb{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{p_2,q_1}(\mathbb{K})$, $D' \in \mathcal{M}_{p_2,q_2}(\mathbb{K})$. *Alors on a :*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

Démonstration : Écrivons le produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ sous forme de blocs $\begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix}$. On pose $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$. Regardons le bloc B'' par exemple qui doit être dans $\mathcal{M}_{n_1,q_2}(\mathbb{K})$. Soit $(i, j) \in [\![1, n_1]\!] \times [\![1, q_2]\!]$. On note $[B'']_{i,j}$ le coefficient (i, j) de B'' et on adoptera la

même notation pour les autres matrices. On a : $[B'']_{i,j} = [UV]_{i,q_1+j} = \sum_{k=1}^{p_1+p_2} [U]_{i,k}[V]_{k,p_1+j} =$
$\sum_{k=1}^{p_1}[U]_{i,k}[V]_{k,p_1+j} + \sum_{k=p_1+1}^{p_1+p_2} [U]_{i,k}[V]_{k,p_1+j} = \sum_{k=1}^{p_1}[A]_{i,k}[B']_{k,j} + \sum_{k=1}^{p_2}[B]_{i,k}[D']_{k,j} = [AB'+BD']_{i,j}$. On procède de même pour les autres blocs.

Remarque 2.1.7 *On peut généraliser ce produit avec plus de blocs.*

Exemple 2.1.8 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} =$

Proposition 2.1.13 (Transposition) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T =$

Démonstration : On pose $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$ et $V = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$.
Soit $j \in [\![1, n_1]\!]$ et $i \in [\![1, p_1]\!]$. On a $[U]_{j,i} = [A]_{j,i} = [A^T]_{i,j} = [V]_{i,j}$.
Soit $j \in [\![1, n_1]\!]$ et $i \in [\![p_1+1, p_1+p_2]\!]$. On a $[U]_{j,i} = [B]_{j,i} = [B^T]_{i,j} = [V]_{i,j}$.
Soit $j \in [\![n_1+1, n_1+n_2]\!]$ et $i \in [\![1, p_1]\!]$. On a $[U]_{j,i} = [C]_{j,i} = [C^T]_{i,j} = [V]_{i,j}$.
Soit $j \in [\![n_1+1, n_1+n_2]\!]$ et $i \in [\![p_1+1, p_1+p_2]\!]$. On a $[U]_{j,i} = [D]_{j,i} = [D^T]_{i,j} = [V]_{i,j}$.

Exemple 2.1.9

1. *Montrer que si A et D sont inversible, alors $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.*

   En en déduit que si on a une matrice digonale par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ et si A et D sont inversibles alors $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} =$

2. *Calculer les puissances successives de $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.*

2.2 Rappels de sup sur les représentations matricielles

2.2.1 Lien entre matrices et applications linéaires

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $\mathcal{U} = (u_j)_{1\leq j\leq p}$ une base de E et $\mathcal{V} = (v_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour j dans $[\![1, p]\!]$, on a $f(u_j)$ dans $F = vect(v_1, ..., v_n)$ et on peut écrire $f(u_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i$, où a_{ij} est la i-ème coordonnée du vecteur $f(u_j)$ dans la base $\mathcal{V}$.

Définition 2.2.1 (Matrice d'une application linéaire) *La matrice $A = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ est la matrice de f dans les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ et est notée $Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$. On a :*

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} f(u_1) & f(u_2) & & f(u_j) & & f(u_p) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np}
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

On note $Mat_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(f) = Mat_{\mathcal{U}}(f)$.

Remarque 2.2.1 *Le nombre de colonnes est donné par la dimension de l'espace de départ et le nombre de lignes par la dimension de l'espace d'arrivée.*

Définition 2.2.2 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice) *On peut identifier canoniquement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire que l'on identifie la colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec le n-uplet $(x_1, ..., x_n)$.*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$ s'indentifie canoniquement à une application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. On dit que f est l'application linéaire canoniquement associée à A. Ainsi A est la matrice de f dans les base canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

Exemple 2.2.1 ***(CCP 71)*** *Dans l'exemple 1.9.9, nous avons défini un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$, *dont l'expression est :* $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ p((x,y,z)) = \dfrac{1}{6}(5x - y - z; -2x + 4y - 2z; -3x - 3y + 3z)$. *Quelle est la matrice de* p *dans la base canonique ?*

Proposition 2.2.1 (Correspondance entre matrice et application linéaire) *L'application*
$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \to & Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme.*

Remarque 2.2.2

1. *À une matrice* A, *on ne peut donc associer qu'une seule application* f *telle que* $A = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$.
2. *On retrouve que* $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = np$.

Exemple 2.2.2

1. *Pour toute base* $\mathcal{U}$ *de* E, *on a :* $Mat_{\mathcal{U}}(Id_E) = I_n$.
2. *Écrire la matrice de la transposition sur* $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ *dans la base canonique* $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

3. *On suppose que* E' *et* E'' *sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de* E. *Soit* $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leq j \leq p}$ *une base adaptée à* $E = E' \oplus E''$, *avec* $(u_1, ..., u_r)$ *une base de* E' *et* $(u_{r+1}, ..., u_p)$ *une base de* E'', p *la projection sur* E' *parallèlement à* E'' *et* s *la symétrie sur* E' *parallèlement à* E''. *Déterminer* $Mat_{\mathcal{U}}(p)$ *et* $Mat_{\mathcal{U}}(s)$.

(CCP 71) *On reprend les exemples 1.9.8 et 1.9.9. Soient* $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ *et* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y/2 = z/3\}$. *On a vu que :* $P \oplus D = \mathbb{R}^3$. *Soit* p *la projection sur* P *parallèlement à* D. *Déterminer une base dans laquelle la matrice de* p *est diagonale.*

4. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ canoniquement associée à* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer un plan vectoriel stable par f.*

Interprétation d'une matrice triangulaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n, $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \le j \le n}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que l'on ait $A = Mat_{\mathcal{U}}(f)$.

Proposition 2.2.2 (Matrices triangulaires) *A est dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ si et seulement si pour tout k de $[\![1, n]\!]$, le sous-espace vectoriel $E_k = vect(u_1, ..., u_k)$ de E est stable par f ($f(E_k) \subset E_k$).*

Exemple 2.2.3 *Si $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{U} = (1, X, ..., X^n)$, alors pour f dans $\mathcal{L}(E)$, la famille $(f(1), f(X), ..., f(X^n))$ est de degré échelonné si et seulement si la matrice de f dans la base $\mathcal{U}$ est*

Interprétation d'une matrice diagonale

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n, $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \le j \le n}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que l'on ait $A = Mat_{\mathcal{U}}(f)$.

Proposition 2.2.3 (Matrices diagonales) *A est dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si :*

Interprétation de certaines matrices par blocs

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n, E' un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \le j \le n}$ une base de E telle que $(u_1, ..., u_r)$ soit une base de E' et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que l'on ait $A = Mat_{\mathcal{U}}(f)$.

Proposition 2.2.4 (Matrices par blocs) *E' est stable par f (c'est-à-dire $f(E') \subset E'$) si et seulement si A est de la forme :*

Dans ce cas $\mathcal{U}_1 = (u_1, ..., u_r)$ est une base de E' et si on note f_1 l'endomorphisme induit par f sur E' $\left(f_1 : \begin{cases} E' & \to & E' \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases} \right)$, *alors $Mat_{\mathcal{U}_1}(f_1) =$*

Remarque 2.2.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Soit $i \in [\![1, p]\!]$ et $\mathcal{B}_i$ une base de E_i. On a vu que si $\mathcal{B}$ est la famille obtenue en* *juxtaposant les* $\mathcal{B}_i$*, alors c'est une base de* E *adaptée à* $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$*. Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$*. Chaque sous-espace vectoriel* E_i *est stable par* f *si et seulement si* $Mat_{\mathcal{B}}(f) =$

Dans ce cas f *induit des endomorphismes sur les* E_i *et la matrice de* $f|_{E_i}$ *dans la base* $\mathcal{B}_i$ *est* A_i*.*

Exemple 2.2.4 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $2n$ *et* f *et* g *deux endomorphismes de* E *tels que* $f^2 = g^2 = id_E$ *et* $f \circ g + g \circ f = 0$*.*

1. *Soit* $F = \mathrm{Ker}\,(f - id_E)$ *et* $G = \mathrm{Ker}\,(f + id_E)$*. Montrer que :* $F \oplus G = E$*.*
2. *Montrer que :* $g(F) \subset G$ *et* $g(G) \subset F$*.*
3. *Montrer que :* $g(F) = G$ *et* $g(G) = F$ *et que :* $\dim F = \dim G = n$*.*
4. *Montrer qu'il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *telle que :* $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ *et* $Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$*.*

Proposition 2.2.5 (Lien entre opérations matricielles et applications linéaires)

1. *En reprenant les notations de la définition 2.2.1, pour* f *et* g *dans* $\mathcal{L}(E,F)$ *et* λ *dans* $\mathbb{K}$*, on a :*
   $Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f+g) = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) + Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g)$ *et* $Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\lambda f) = \lambda Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$*.*
2. *Soient* E, F *et* G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives* $\mathcal{U} = (u_j)_{1\le j\le p}$*,* $\mathcal{V} = (v_i)_{1\le i\le n}$ *et* $\mathcal{W} = (w_j)_{1\le j\le q}$*.*
   Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$*,* $g \in \mathcal{L}(F,G)$ *et* $A = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ *et* $B = Mat_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(g) = [b_{ij}]_{\substack{1\le i\le q\\1\le j\le n}}$*.*
   Alors $BA = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(g \circ f) = [c_{ij}]_{\substack{1\le i\le q\\1\le j\le p}}$ *avec* $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$*.*
   Ainsi on a $Mat_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(g)Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$*.*

Exemple 2.2.5 *1. Soit* $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Soit* $\mathcal{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_4[X]$*. Déterminer* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X])$ *telle que* $Mat_{\mathcal{B}}(f) = C$*. En déduire* C^n *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$*.*

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et on pose* $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Déterminer* M_n^n*.*

Proposition 2.2.6 (Matrice inversible) *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives* $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leq j \leq p}$ *et* $\mathcal{V} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$*. Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et on pose*
$A = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.
Alors f *est un isomorphisme si et seulement si* A *est inversible. Dans ce cas :* $Mat_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(f^{-1}) = A^{-1}$

Exemple 2.2.6 *Soit* $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Déterminer* C^{-1}*.*

2.2.2 Lien entre matrices et familles de vecteurs

Définition 2.2.3 (Matrice d'une famille de vecteurs) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{U} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. Soit $(x_j)_{1\leq j\leq p}$ une famille de vecteurs de E.*

On a : $\forall j \in [\![1,p]\!],\ x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i$, où a_{ij} est la i-ème coordonnée du vecteur x_j dans la base $\mathcal{U}$.

On appelle matrice de la famille $(x_j)_{1\leq j\leq p}$ dans la base $\mathcal{U}$ la matrice

$$Mat_{\mathcal{U}}(x_1,...,x_p) = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_p \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Remarque 2.2.4 *Si on n'a qu'un seul vecteur x de E dans cette famille, alors $Mat_{\mathcal{U}}(x) = X$ est la matrice colonne dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{U}$, c'est-à-dire :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

On peut ainsi identifier les vecteurs de E avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices colonnes de taille n via l'isomorphisme $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto & Mat_{\mathcal{U}}(x) \end{array}\right.$.

Exemple 2.2.7 *Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{U} = (1, X, X^2, X^3)$ sa base canonique et $\mathcal{V} = \big((X-1)^3, (X-1)^2(X+1), (X-1)(X+1)^2, (X+1)^3\big)$. Déterminer $Mat_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$.*

Proposition 2.2.7 (Matrice inversible et base) *Soit $\mathcal{U}$ une base de E. Soit $(x_1,...,x_p)$ une famille de E et on pose $A = Mat_{\mathcal{U}}(x_1,...,x_p)$.*

Alors $(x_1,...,x_p)$ est une base de E si et seulement si A est inversible.

Exemple 2.2.8 *Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{U} = (1, X, X^2, X^3)$ sa base canonique et $\mathcal{V} = \big((X-1)^3, (X-1)^2(X+1), (X-1)(X+1)^2, (X+1)^3\big)$. Soit $M = Mat_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$. Calculer M^2. Que peut-on en déduire ?*

2.2.3 Noyau et Image d'une matrice

Proposition 2.2.8 (Image d'un vecteur par une application linéaire) *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{U} = (u_j)_{1\leq j\leq p}$ et $\mathcal{V} = (v_i)_{1\leq i\leq n}$.*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et on pose $A = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$.

Soient $x \in E$ *et* $y \in F$. *Il existe* $x_1, ..., x_p$ *et* $y_1, ..., y_n$ *dans* $\mathbb{K}$ *tels que* $x = \sum_{j=1}^{p} x_j u_j$ *et* $y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$. *On pose* $X = Mat_{\mathcal{U}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ *qui est dans* $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *et* $Y = Mat_{\mathcal{V}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *qui est dans* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On a : $y = f(x) \iff Y = AX$

Remarque 2.2.5 *Si* f *est une application linéaire entre les espaces vectoriels* E *et* F, *ne pas oublier que la matrice de* f *représente des coordonnées dans une certaine base de vecteurs de* E *ou* F. *Donc quand on travaille avec les vecteurs de* E *ou* F *à partir de la matrice, il faut bien retranscrire les vecteurs dans la base de* E *ou* F *et ne pas les écrire comme éléments de* $\mathbb{K}^p$ *ou* $\mathbb{K}^n$, *c'est-à-dire ne pas considérer* $(x_1, ..., x_p)$ *ou* $(y_1, ..., y_n)$ *comme des vecteurs de* E *ou* F, *mais les retranscrire dans les bonnes bases :* $\sum_{i=1}^{p} x_i u_i$ *et* $\sum_{i=1}^{n} y_i v_i$.

Définition 2.2.4 (Image et noyau d'une matrice) *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. *On appelle noyau de* A *qui est noté* $\operatorname{Ker} A$ *l'ensemble* $\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0\}$ *que l'on peut identifier à un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^p$.
2. *On appelle image de* A *que noté* $\operatorname{Im}(A)$ *l'ensemble* $\{AX,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$ *(qui est inclus dans* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*) et que l'on identifie à un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$.

Remarque 2.2.6

1. *L'image et le noyau de* A *s'identifient donc au noyau et à l'image de l'application canoniquement associée à* A.
2. *Si la matrice d'une application linéaire* $f : E \to F$ *est* A *dans une certaine base, nous pouvons trouver les coordonnées des éléments de* $\operatorname{Im}(f)$ *et* $\operatorname{Ker}(f)$ *grâce à* $\operatorname{Im}(A)$ *et* $\operatorname{Ker}(A)$. *Cependant ne pas oublier de retranscrire les éléments de* $\operatorname{Ker}(A)$ *en vecteurs de* E *grâce aux coordonnées et de même pour les éléments de* $\operatorname{Im}(A)$ *qu'il faudra retraduire en vecteurs de* F.

Définition 2.2.5 (Rang) *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On note* $C_1, ..., C_p$ *ses vecteurs colonnes.*
On pose $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(C_1, ..., C_p) = \dim vect(C_1, ..., C_p)$.

Exemple 2.2.9 *Déterminer le rang des matrices suivantes :*

1. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & 2 \\ 1 & & & & & 2 \\ \vdots & & 0 & & & \vdots \\ 1 & & & & & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *avec* $n \geq 2$.

2. $B = [i/j]_{1 \leq i,j \leq n}$

Proposition 2.2.9 (Image et colonnes d'une matrice) *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $\mathrm{Im}\,(A)$ *est engendré par les colonnes de* A *(*$\mathrm{Im}\,(A) = vect(C_1, ..., C_p)$ *avec* $C_1, ..., C_p$ *les colonnes de* A*).*
2. $\mathrm{rg}\,(A) = \dim(\mathrm{Im}\,(A))$.

Exemple 2.2.10 *L'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}_3[X]$ *dont la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$ *est* $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est la projection sur* *parallèlement à*

Proposition 2.2.10 (Caractérisation de l'inversibilité par le noyau et l'image) *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Alors* A *est inversible si et seulement si* $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0\}$*.*

Remarque 2.2.7 *Ceci est à rapprocher de la situation d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie qui est bijectif si et seulement si il est injectif.*

Proposition 2.2.11 (Rang d'une matrice/rang d'une application linéaire) *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension respective* p *et* n *et de base respective* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$*. Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *telle que* $A = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$*. Alors* $rg(f) = rg(A)$*.*

Remarque 2.2.8 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. Nous avons aussi un théorème du rang pour les matrices :* $\dim(\mathrm{Ker}\,(A)) + \mathrm{rg}\,(A) =$
Ceci provient de l'application du théorème du rang à l'application canoniquement associé à $X \mapsto AX$ *qui va de* $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *dans* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*.*

Proposition 2.2.12 (Rang d'une matrice/rang d'une famille de vecteurs) *Le rang d'une famille finie* $(x_1, ..., x_p)$ *de vecteurs d'un espace vectoriel* E *de dimension finie est égale au rang de la matrice* $A = Mat_{\mathcal{U}}(x_1, ..., x_p)$ *de ces vecteurs dans n'importe quelle base* $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$ *de* E*, c'est-à-dire :* $\mathrm{rg}\,(x_1, ..., x_p) = \mathrm{rg}\,(A)$*.*

2.2.4 Matrices de passage

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{U} = (u_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de E. Soit $\mathcal{U}' = (u'_j)_{1\leq j\leq n}$ une autre base de E.

Ainsi pour tout j de $[\![1,n]\!]$, on peut écrire : $u'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$. On a donc :

$$Mat_{\mathcal{U}}(u'_1, ..., u'_n) = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} u'_1 & u'_2 & \cdots & u'_j & \cdots & u'_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{array} \end{array}.$$

Définition 2.2.6 (Matrice de passage) *On note* $P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = Mat_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}')$ *la matrice de passage de la base* $\mathcal{U}$ *à la base* $\mathcal{U}'$.

En particulier, nous avons $P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = Mat_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}(Id_E)$, *car :* $\forall j \in [\![1,n]\!],\ Id_E(u'_j) = u'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_j$.

Proposition 2.2.13 (Inversibilité de la matrice de passage) *La matrice* $P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}$ *est inversible et* $(P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'})^{-1} = P_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}$.

Exemple 2.2.11 *Soient* $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{U} = (1, X, X^2, X^3)$ *sa base canonique et* $\mathcal{V} = \big((X-1)^3, (X-1)^2(X+1), (X-1)(X+1)^2, (X+1)^3\big)$. *Déterminer* $P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ *et* $P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$.

Proposition 2.2.14 (Changement de base pour des vecteurs) *Soit* x *dans* E. *Il existe* $x_1, ..., x_n$ *et* $x'_1, ..., x'_n$ *dans* $\mathbb{K}$ *tels que*

$x = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j u'_j$. *On pose* $X = Mat_{\mathcal{U}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $X' = Mat_{\mathcal{U}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. *Alors on a :*

$X =$

Exemple 2.2.12 *Décomposer* X^3+1 *dans la base* $\mathcal{V} = \big((X-1)^3, (X-1)^2(X+1), (X-1)(X+1)^2, (X+1)^3\big)$.

Proposition 2.2.15 (Changement de base pour une application linéaire) *Soient* F *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $\mathcal{V}$ *et* $\mathcal{V}'$ *deux bases de* F. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *et on pose* $A = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$ *et* $A' = Mat_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}(f)$.
$A' = Mat_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}(f) =$

En particulier si nous avons $E = F$, *en général on choisit* $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ *et* $\mathcal{U}' = \mathcal{V}'$ *et on a :* $A' = (P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'})^{-1} A P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}$ *ou* $A = P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} A' (P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'})^{-1}$.

Exemple 2.2.13 *Pour* P *dans* $\mathbb{R}_3[X]$, *on pose* $\varphi(P) = (X^2-1)P' - 3XP$. *On reprend les notations de l'exemple 2.2.11. On admet que* φ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[X]$.

1. *Déterminer* $Z = Mat_{\mathcal{U}}(\varphi)$, *puis* $A = Mat_{\mathcal{V}}(\varphi)$ *par deux méthodes différentes.*
2. φ *est-elle bijective ?*
3. *Comment calculer simplement* Z^n *pour* n *dans* $\mathbb{N}$.

2.2.5 Matrices semblables

Définition 2.2.7 (Matrices semblables) *Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et A' sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que : $A = PA'P^{-1}$.*

Remarque 2.2.9

1. *(IMPORTANTE) Grâce à la proposition précédentes, deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.*
2. *Deux matrices semblables ont le même rang : on ne change pas le rang par multiplication par des matrices inversibles.*
3. *Toute matrice A est semblable à elle-même : $A = I_n A I_n^{-1}$.*

Exemple 2.2.14

1. *Quelles sont les matrices semblables à λI_n, avec λ dans $\mathbb{K}$?*
2. *Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.*

3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *de rang un. Montrer que* A *est semblable à une matrice du type* $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \\ 0 & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix}$.

4. *Soit* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *tel que* $A^2 = 0$ *et* $A \neq 0$.
   (a) *Déterminer* $\dim(\mathrm{Im}\,(A)))$ *et* $\dim(\mathrm{Ker}\,(A))$.
   (b) *Montrer que* A *est semblable à* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2.6 Trace d'un endomorphisme

Proposition 2.2.16 (Trace de matrices semblables) *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors on a : $tr(PAP^{-1}) = tr(A)$. Ainsi deux matrices semblables ont la même trace.*

Exemple 2.2.15 *Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?*

Proposition 2.2.17 (Invariance de la trace par changement de base) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors le scalaire $\mathrm{tr}\left(Mat_{\mathcal{U}}(f)\right)$ est indépendant de la base $\mathcal{U}$.*

Définition 2.2.8 (Trace d'un endomorphisme) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $tr(f)$ que l'on appelle trace de l'endomorphisme f, le scalaire $\mathrm{tr}\left(Mat_{\mathcal{U}}(f)\right)$ qui est indépendant de la base $\mathcal{U}$.*

Proposition 2.2.18 (Trace d'un projecteur) *Soit p un projecteur de rang r. Alors $tr(p) =$*

Exemple 2.2.16

1. *On suppose que $E = F \oplus G$ et on considère s la symétrie sur F parallèlement à G. Alors $tr(s) =$*

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le polynôme Q défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)dt$. Soit f l'application qui au polynôme P associe le polynôme Q. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer $tr(f)$.*

Proposition 2.2.19 *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On a :*

1. *$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ tr(\lambda u + \mu v) = \lambda tr(u) + \mu tr(v)$.*
2. *$tr(u \circ v) = tr(v \circ u)$.*

Exemple 2.2.17 *On reprend le projecteur de l'exemple 1.9.11 : $p = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{i=1}^{q} g_i$, avec $G = \{g_1, ..., g_n\}$ un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$. On note $E^G = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ g_i X = X\}$. Montrer que $\dim(E^G) = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{i=1}^{q} tr(g_i)$.*

2.3 Rappels de sup sur l'obtention du rang d'une matrice

2.3.1 Opérations élémentaires

Définition 2.3.1 (Opérations élémentaires sur une matrice) *On appelle opération élémentaire sur les lignes d'une matrice* $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ *(les L_i étant les vecteurs lignes de A) l'une des opérations suivantes.*

1. *Type I : Addition à une ligne de la combinaison linéaire d'une autre :* $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $i \neq j$, *avec λ dans $\mathbb{K}$. Cela correspond à une multiplication à gauche par* $I_n + \lambda E_{i,j}$.
2. *Type II : Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul :* $L_i \leftarrow \alpha L_i$, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *. Cela correspond à une multiplication à gauche par* $diag(1, ..., \alpha, ..., 1)$, *avec α en position i.*
3. *Type III : Échange de deux lignes :* $L_i \leftrightarrow L_j$, $i \neq j$. *Cela correspond à une multiplication à gauche par* $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

On appelle opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ *(les C_i étant les vecteurs colonnes de A) l'une des opérations suivantes.*

1. *Type I : Addition à une colonne de la combinaison linéaire d'une autre :* $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, $i \neq j$, *avec λ dans $\mathbb{K}$. Cela correspond à une multiplication à droite par* $I_n + \lambda E_{j,i}$.
2. *Type II : Multiplication d'une colonne par un scalaire non nul :* $C_i \leftarrow \alpha C_i$, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. *Cela correspond à une multiplication à droite par* $diag(1, ..., \alpha, ..., 1)$, *avec α en position i.*
3. *Type III : Échange de deux colonnes :* $C_i \leftrightarrow C_j$, $i \neq j$. *Cela correspond à une multiplication à droite par* $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

Remarque 2.3.1 *Les opérations élémentaires sur les lignes se traduisent par des multiplications à gauche par des matrices inversibles P et celles sur les colonnes par des multiplications à droite par P. Pour savoir quelles sont les matrices inversibles P correspondantes, il suffit d'appliquer l'opération élémentaire voulue sur I_n et le résultat obtenu donne directement P, car $PI_n = P = I_nP$.*

Proposition 2.3.1 (Invariance du noyau et de l'image par opérations élémentaires)

1. *Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent l'image d'une matrice.*
2. *Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau d'une matrice.*

Proposition 2.3.2 (Invariance du rang)

1. *On ne change pas le rang d'une matrice par opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes.*
2. *On ne change pas le rang d'une matrice en la multipliant par une matrice inversible.*
3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :* $rg(A) = rg(A^T)$.
4. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $L_1, ..., L_n$ ses vecteurs lignes. On a :* $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(L_1, ..., L_n)$.

Remarque 2.3.2 *(IMPORTANTE) Pour trouver le rang d'une matrice, on se ramène par la méthode du pivot de Gauss soit par des opérations sur les lignes à une matrice du type* $\begin{pmatrix} * & \dots & & & & \\ & * & \dots & & & \\ (0) & & \ddots & & & \\ & & & * & \dots & \\ & & & & 0 & \dots \end{pmatrix}$,

soit par des opérations sur les colonnes à une matrice du type $\begin{pmatrix} * & & & & \\ \vdots & * & & (0) & \\ & \vdots & \ddots & & \\ & & & * & \\ & & & \vdots & 0 \\ & & & & \vdots \end{pmatrix}$. *Dans le premier cas, on compte le nombre de lignes non nulles et dans le deuxième cas, le nombre de colonnes non nulles.*

Exemple 2.3.1 ***(CCP 69)*** *Déterminer le rang de* $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 2.3.3 ***ATTENTION :*** *Le rang n'est pas égal en général au nombre de lignes ou de colonnes non nulles d'une matrice. Ceci est vrai seulement dans le cas d'une matrice échelonnée, il suffit de voir la matrice J de l'exemple 2.2.9.*

Proposition 2.3.3 (Rang d'un produit) *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors on a :*
$\mathrm{rg}\,(AB) \leq \min(\mathrm{rg}\,(A), \mathrm{rg}\,(B))$.

Proposition 2.3.4 (Matrices inversibles) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a : $A \in GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow rg(A) = n$.*

Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Nous adoptons la disposition suivante : on pose $(A|I_n)$ et nous appliquons l'algorithme de Gauss QUE SUR LES LIGNES à la matrice A jusqu'à obtenir I_n et nous appliquons simultanément les opérations successives dans le même ordre sur I_n. Ainsi on répercute les opérations successives sur $(A|I_n)$.

Exemple 2.3.2 *Inverser la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3.2 Matrices équivalentes

Définition 2.3.2 (Matrice J_r) *Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$. On note J_r la matrice définie par blocs par* $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Proposition 2.3.5 (Changement de base et matrice J_r) *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respectives p et n et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang r. Alors pour une certaine base $\mathcal{B}$ de E et une certaine base $\mathcal{C}$ de F, on a $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = J_r$.*

Exemple 2.3.3 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des $g \in \mathcal{L}(F,E)$ pour lesquels : $fgf = 0$. En introduisant des bases dans laquelle la matrice de f est simple, déterminer* $\dim(\mathcal{G})$.

Corollaire 2.3.1 (Matrices équivalentes à J_r) *Soient $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$. Alors* $\operatorname{rg} M = r$ *si et seulement s'il existe deux matrices $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $M = QJ_rP$.*

Remarque 2.3.4 *Ce resultat s'obtient manuellement en appliquant la méthode du pivot de Gauss, dans laquelle, chaque opération élémentaire correspond à une multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible.*

Définition 2.3.3 (Matrices équivalentes) *Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. Les matrices A et B sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que*

$$A = PBQ.$$

Corollaire 2.3.2 (Caractérisation des matrices équivalentes) *Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

Exemple 2.3.4 *Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *Soit $D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Montrer que l'on a :* $\operatorname{rg} D = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.
2. *Soit $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$. Déterminer* $\operatorname{rg} M$ *et dans la cas où M est inversible, expliciter M^{-1}.*

2.3.3 Matrices extraites

Définition 2.3.4 (Matrice extraite) *Soient $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I \subset [\![1, n]\!]$ et $J \subset [\![1, p]\!]$. La matrice $B = (a_{i,j})_{i\in I,\, j\in J}$ est une matrice extraite de A.*

Proposition 2.3.6 (Rang et matrices extraites) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est la taille maximale des matrices carrées extraites inversibles de A.*

2.3.4 Systèmes linéaires

Définition 2.3.5 (Systèmes linéaires) *On appelle système linéaire de n équations linéaires, à p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$, un système de la forme :*

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases} ; \text{ avec } a_{ij}, b_i \in \mathbb{K} \text{ donnés pour } (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!].$$

La matrice $A = [a_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est appelée matrice associée au système (S).
Lorsque tous les b_i sont nuls, on obtient le système homogène associé.

On note $L(S)$ l'ensemble des p-uplets $(x_1, ..., x_p)$ qui vérifient chaque ligne de (S). C'est l'ensemble des solutions de (S) qui est une partie de $\mathbb{K}^p$.

Définition 2.3.6 (Système compatible) *Si le système possède des solutions, il est dit compatible, sinon les équations du système sont dites incompatibles.*

Remarque 2.3.5 *(IMPORTANTE) Sur un système, on peut effectuer les mêmes opérations élémentaires que sur les lignes d'une matrice. Le but est d'arriver par la méthode du pivot de Gauss à un système dont la matrice est échelonnée. Ceci est licite car on a la proposition suivante.*

Proposition 2.3.7 (Opérations élémentaires sur un système) *Tout système linéaire S' obtenu à partir de S par un nombre fini d'opérations élémentaires ont exactement les mêmes solutions.*

Proposition 2.3.8 (Interprétation matricielle) *On considère le système*

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right. .$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}$ *la matrice associée au système (S) et on pose B la matrice colonne* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. *Résoudre (S) revient à chercher* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ *tel que l'on ait $AX = B$. La matrice B s'appelle second membre du système.*

Le système homogène associé est : $AX = 0$.

Proposition 2.3.9 (Rang et dimension de l'espace des solutions d'un système homogène) *En reprenant les notations de la proposition précédente, si on note $r = \mathrm{rg}\,(A)$, on dit que r est le rang du système.*

$\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0\} = \mathrm{Ker}\,(A)$ *est un espace vectoriel de dimension $p - r$.*

Proposition 2.3.10 (Structure de l'espace des solutions) *L'espace des solutions du système $AX = B$ est l'espace affine $X_0 + \mathrm{Ker}\,(A)$, avec X_0 une solution particulière de $AX = B$.*

Proposition 2.3.11 (Systèmes et matrices inversibles) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *A est inversible.*
2. *Pour tout B de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.*

Dans ce cas le système $AX = B$ admet une unique solution : $X = A^{-1}B$ et on dit que ce système est de Cramer.

Exemple 2.3.5 1. *Trouver α, β, γ dans $\mathbb{R}$ tels que :*
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \int_{-1}^{1} P(x)dx = \alpha P(-1) + \beta P(2) + \gamma P'(1).$$

2. *Soit* $A=[a_{ij}]_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Soit* $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

   (a) *Montrer que si* $AX=0$, *alors :* $\forall i\in[\![1,n]\!],\ |a_{ii}||x_i|\le\displaystyle\sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}|a_{ij}||x_j|$, *puis que si* X *est non nul alors il existe* i_0 *tel que :* $|a_{i_0i_0}|\le\displaystyle\sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}}|a_{i_0j}|$.

   (b) *En déduire une condition suffisante pour que* A *soit inversible.*

Inverser une matrice à l'aide d'un système linéaire

Cette méthode est utile pour inverser une matrice $n\times n$. Soit $A\in GL_n(\mathbb{K})$. On veut déterminer A^{-1}.

On considère le système $AX=Y$ avec $Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$ quelconque fixé dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ l'inconnue, qui admet une unique solution grâce à la proposition 2.3.11. Celle-ci est donnée par $X=A^{-1}Y$.

En pratique on résout le système $AX=Y$ avec Y quelconque dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que l'on exprime les x_i en fonction des y_i. On écrit ensuite cette solution à l'aide d'un produit matriciel de la forme BY (la solution trouvée dépend de Y). On lit ensuite les coefficients de A^{-1} sur la solution trouvée, car on aura $B=A^{-1}$

Exemple 2.3.6 *Montrer que* B *est inversible et déterminer* B^{-1} *avec* $B=\begin{pmatrix}1&-1&\cdots&\cdots&-1\\1&1&&&\\ \vdots&&1&&\\ &0&&&0\\ \vdots&&&\ddots&\\ 1&&&&1\end{pmatrix}$.

3 Endomorphismes et matrices particulières (spé)

3.1 Polynômes d'un endomorphisme ou de matrices

Dans ce paragraphe, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.1.1 Morphisme $P \mapsto P(u)$; noyau et image de ce morphisme

Définition 3.1.1 (Polynôme d'endomorphisme/matrices) *Pour tout polynôme* $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$,

- *on définit l'endomorphisme :* $P(u) \;=\; \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k u^k \quad$ *où* $u^0 = Id_E$.
- *on définit la matrice :* $P(A) \;=\; \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k A^k \quad$ *où* $A^0 = I_n$.

Remarque 3.1.1

1. *ATTENTION : soit* $x \in E$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$, *alors* $u^4 + 3u^2 + id_E$ *est un endomorphisme de* E, *donc* $u^4(x) + 3u^2(x) + x$ *a un sens, mais* $(u(x))^4 + 3(u(x))^2 + x$ *ne veut rien dire, car multiplier les vecteurs* $u(x)$ *entre eux n'a pas de sens.*
2. *ATTENTION : Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* $A^3 + 5A = A(A^2 + 5I_n)$, *mais ne pas écrire* $A^3 + 5A = A(A^2 + 5)$, *car additionner une matrice et un nombre n'a pas de sens pour des raisons d'incompatibilité de taille.*

Proposition 3.1.1 (Morphisme d'algèbre $P \mapsto P(u)$) *L'application* $P \mapsto P(u)$ *est un morphisme de l'algèbre* $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ *dans l'algèbre* $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ *:*

- $1_{\mathbb{K}[X]}(u) \;=\; Id_E$;
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ (\alpha P + \beta Q)(u) \;=\; \alpha P(u) + \beta Q(u)$;
- ***(Démo CCP 65)*** $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2,\ (PQ)(u) \;=\; P(u) \circ Q(u)$.

De même $\left\{\begin{array}{ccc} (\mathbb{K}[X], +, \times) & \to & (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot) \\ M & \mapsto & P(M) \end{array}\right.$ *définit un morphisme d'algèbre.*

Démonstration : Montrons le dernier point.

Exemple 3.1.1 ***(CCP 65)*** *Montrer que :* $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2,\ P(u) \circ Q(u) \ = \ Q(u) \circ P(u)$.

3.1.2 Polynômes annulateur

Définition 3.1.2 (Polynôme annulateur d'un endomorphisme) *Les polynômes P tels que $P(u) = 0$ (resp. $P(A) = 0$) sont appelés polynômes annulateurs de u (resp. de A).*

L'ensemble des polynômes annulateurs est donc le noyau du morphisme d'algèbre $P \mapsto P(u)$ (resp. $P \mapsto P(A)$) allant $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ dans dans $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ (resp. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$).

Proposition 3.1.2 (Idéal annulateur de u/A) ***(Démo CCP 65)*** *L'ensemble des polynômes annulateurs de u (resp. A) forment un idéal $I = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\}$ (resp. $I = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(A) = 0\}$) de l'anneau $\mathbb{K}[X]$, appelé idéal annulateur de u (resp. A).*
Ceci implique que : $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0 \Rightarrow (PQ)(u) = 0$
(resp. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ P(A) = 0 \Rightarrow (PQ)(A) = 0$).

Démonstration :

Proposition 3.1.3 (Existence d'un polynôme minimal d'un endomorphisme/matrice) *On suppose E de dimension finie et u et A non nuls. Parmi les polynômes annulateurs de u (resp. A), il en existe un unique noté $\mu_u(X)$ ou $\pi_u(X)$ (resp. $\mu_A(X)$ ou $\pi_A(X)$) qui est celui de degré minimal et unitaire.*

Démonstration : Grâce à l'exemple 1.8.3, il existe un polynôme annulateur de A non nul. L'ensemble des polynôme annulateurs étant un idéal de $\mathbb{K}[X]$, alors celui-ci est de la forme $P\mathbb{K}[X]$, avec P unitaire. La minimalité du degré de μ_A et le fait qu'il soit unitaire, nous permet de dire que $P = \mu_A$.

Définition 3.1.3 (Polynôme minimal d'un endomorphisme/matrice) *On suppose E de dimension finie.*
Ce polynôme $\mu_u(X)$ (resp. μ_A) est appelé le polynôme minimal de u (resp. A).

Remarque 3.1.2 *(IMPORTANTE) $\mu_u(u) = 0$ et $\mu_A(A) = 0$.*

Corollaire 3.1.1 *On a :*
- $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0 \Rightarrow \mu_u | P$.
- $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(A) = 0 \Rightarrow \mu_A | P$.

Démonstration : On a vu dans la preuve de la proposition précédente, que l'ensemble des polynôme annulateurs de u est $\mu_u\mathbb{K}[X]$.
Ainsi : $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0 \Rightarrow \mu_u | P$, car P est dans $\mu_u\mathbb{K}[X]$ en tant que polynôme annulateur de u.
On a la même chose pour les polynômes annulateurs de A.

Exemple 3.1.2
1. *Quel est le polynôme minimal d'un projecteur p différent de l'identité et non nul ?*

2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) *Montrer que* $(X-1)^2$ *est le polynôme minimal de* A.

   (b) ***(CCP 91)*** *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Déterminer le reste de la division euclidienne de* X^n *par* $(X-1)^2$ *et en déduire* A^n.

   (c) *Déterminer* A^{-1}.

Corollaire 3.1.2 (Polynôme minimal d'un endomorphisme induit) *On suppose* E *de dimension finie. Soit* F *un sous-espace stable par* u *et on note* $\tilde{u}$ *l'endomorphisme induit par* u *sur* F. *Alors :* $\mu_{\tilde{u}}$

Démonstration : Comme μ_u est un polynôme annulateur de u, on a : $\forall x \in E,\ \mu_u(u)(x) = 0$. Donc : $\forall x \in F,\ \mu_u(u)(x) = 0$, ce qui signifie que $\mu_u(\tilde{u}) = 0$. Donc μ_u est un polynôme annulateur de $\tilde{u}$ et donc grâce au corollaire précédent : $\mu_{\tilde{u}} | \mu_u$.

3.1.3 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$ et $\mathbb{K}[A]$

Définition 3.1.4 ($\mathbb{K}\lceil u \rceil$, $\mathbb{K}\lceil A \rceil$) *On note :*

- $\mathbb{K}[u] = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.
- $\mathbb{K}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$

Proposition 3.1.4 (L'algèbre $\mathbb{K}\lceil u \rceil$, $\mathbb{K}\lceil A \rceil$) $\mathbb{K}[u]$ *et* $\mathbb{K}[A]$ *sont des* $\mathbb{K}$*-algèbres.*

Démonstration : $\mathbb{K}[u]$ est l'image de l'application linéaire $P \mapsto P(u)$ allant de l'espace vectoriel $(\mathbb{K}[X], +, .)$ dans l' espace vectoriel $(\mathcal{L}(E), +, .)$, donc $\mathbb{K}[u]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
Ainsi $(\mathbb{K}[u], +)$ est aussi un sous-groupe de $(\mathcal{L}(E), +)$. Par ailleurs $Id_E = u^0$ est dans $\mathbb{K}[u]$ et enfin pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a : $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) \in \mathbb{K}[u]$. Ainsi $\mathbb{K}[u]$ est un sous-anneau de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.
On en déduit que $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre de $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$.
C'est la même chose pour $\mathbb{K}[A]$.

Proposition 3.1.5 (Base de $\mathbb{K}\lceil u \rceil$, $\mathbb{K}\lceil A \rceil$ en dimension finie) *Si* d *est le degré du polynôme minimal de* u *(resp.* A*), alors* $(u^k)_{0 \le k \le d-1}$ *(resp.* $(A^k)_{0 \le k \le d-1}$*) est une base de* $\mathbb{K}[u]$ *(resp.* $\mathbb{K}[A]$*).*
Ainsi $\dim \mathbb{K}[u] = d^\circ(\mu_u)$ *(resp.* $\dim \mathbb{K}[A] = d^\circ(\mu_A)$*).*

Démonstration :

Exemple 3.1.3 *Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que A^{-1} est dans $\mathbb{K}[A]$.*

3.1.4 Lemme des noyaux

Proposition 3.1.6 (Lemme de décomposition des noyaux pour deux polynômes) ***(Énoncé CCP 93)***
Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Alors :

$$\operatorname{Ker} A(u) \oplus \operatorname{Ker} B(u) \;=\; \operatorname{Ker}(AB)(u).$$

Démonstration :

Corollaire 3.1.3 (Généralisation du lemme de décomposition des noyaux) *Soient $A_1, \ldots, A_p$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. Alors :*

$$\operatorname{Ker}(A_1 \cdots A_p)(u) \;=\; \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} A_i(u).$$

Démonstration : Démontrons cela par récurrence sur p.
On vient de voir $p = 2$ dans la proposition suivante.

Soit $p \in \mathbb{N}$, avec $p \geq 2$ et on suppose le résultat pour p. Soient $p+1$ polynômes $A_1, ..., A_{p+1}$ premiers entre eux deux à deux. Les polynômes $C = \prod_{k=1}^{p} A_k$ et A_{p+1} sont premiers entre eux , car si P est un polynômes irréductible divisant C et A_{p+1}, alors le lemme de Gauss nous dit que P divise l'un des A_k, pour k dans $[\![1, p]\!]$, donc P est un diviseur premier de A_{p+1} et A_k, ce qui est contraire avec l'hypothèse. Grâce à la proposition précédente : $\mathrm{Ker}\,(A_1 \cdots A_p A_{p+1})(u) = \mathrm{Ker}\,(CA_{p+1})(u) = \mathrm{Ker}\, C(u) \oplus \mathrm{Ker}\, A_{p+1}(u)$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $\mathrm{Ker}\, C(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\, A_i(u)$, donc :

$\mathrm{Ker}\,(A_1 \cdots A_p A_{p+1})(u) = \bigoplus_{i=1}^{p+1} \mathrm{Ker}\, A_i(u)$, d'où le résultat pour $p+1$.

Exemple 3.1.4 1. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.*

(a) ***(CCP 93)*** *Montrer que* $\mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u) = E$.

(b) ***(CCP 93)*** *À l'aide du lemme des noyaux, montrer que* $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(u^2 + u + Id)$.

(c) *Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u^2 + u + Id)$ non nul. Montrer que $(x, u(x))$ est libre.*

(d) *On suppose u non nul et* $\dim(E) = 2$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. (a) *Factoriser le polynôme* $X^3 - X^2 + 4X - 4$ *dans* $\mathbb{R}[X]$.
   (b) *Déterminer l'ensemble des fonctions* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telles que :* $f''' - f'' + 4f' - 4f = 0$. *On pourra appliquer le lemme des noyaux à l'endomorphisme* $D : f \mapsto f'$ *de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3.2 Matrices et endomorphismes nilpotents

E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 3.2.1 (Nilpotence)
1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On dit que* A *est nilpotente s'il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $A^p = 0$.
2. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *On dit que* f *est nilpotente s'il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $f^p = 0$.

Remarque 3.2.1 *Une matrice nilpotente ou un endomorphisme nilpotent n'est pas inversible, car*

Exemple 3.2.1
1. *Donner une matrice nilpotente :*
2. *Donner un endomorphisme nilpotent :*
3. *Soit* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ *nilpotente et qui* <u>*commutent*</u> *entre elles. Montrer que* AB *et* $A + B$ *sont nilpotentes.*
   On a le même résultat pour les endomorphismes.
4. ***(CCP 59)*** *Soit* $E_n = \mathbb{K}_n[X]$.
   (a) *Montrer que l'endomorphisme* f *de* E_n : $P \mapsto P - P'$ *est un automorphisme.*
   (b) *Soit* $Q \in E_n$ *Trouver* $P \in E_n$ *tel que :* $f(P) = Q$.

On peut généraliser ce raisonnement : pour f dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f^p = 0$, alors $Id_E - f$ est bijectif et $(Id_E - f)^{-1} =$

Définition 3.2.2 (Indice de nilpotence) *1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est d'indice de nilpotence p si $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.*

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est d'indice de nilpotence p si $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

Proposition 3.2.1 (Majoration de l'indice de nilpotence) *1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'indice de nilpotence p. Alors $p \leq n$.*
En particulier $A^n = 0$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ d'indice de nilpotence p. Alors $p \leq \dim(E)$.
En particulier $f^{\dim(E)} = 0$.

Démonstration :

- Il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$, car $f^{p-1} \neq 0$.
- $\mathcal{F} = (x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre :

- Ainsi : $p \leq \dim(E)$:

Exemple 3.2.2 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ d'indice de nilpotence $n = \dim(E) \geq 2$.*

1. *Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & (0) & \vdots \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.*
2. *Déterminer μ_f.*
3. *Montrer que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \dim \operatorname{Ker}(f^k) = k$.*
4. *Déterminer les endomorphismes g tels que $g^2 = f$.*

4 Révisions de sup sur le déterminants

4.1 Déterminant d'une matrice

Définition 4.1.1 (Déterminant d'une matrice) *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée. Le déterminant de* A*, noté* $\det(A)$*, le scalaire défini par* $\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$.

On note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Remarque 4.1.1

1. *ATTENTION : pour deux matrices* A *et* B *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, et* λ *et* μ *dans* $\mathbb{K}$ *:* $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det(A) + \mu \det(B)$.
2. *Dans le cas* $n = 3$ *et* $\underline{\text{seulement pour } n = 3}$*, on a une règle qui s'applique uniquement dans ce cas là et que l'on utilise si vraiment on a pas mieux à faire que l'on appelle la (mauvaise) règle de Sarrus :* $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + y_1z_2x_3 - z_1y_2x_3 - z_2y_3x_1 - y_1x_2z_3.$

Exemple 4.1.1 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Alors* $\overline{\det(A)} = \det(\overline{A})$.

Proposition 4.1.1 (Opérations) *Soit* $A = [C_1, \cdots, C_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *(Multilinéarité) Pour tout* $i \in [\![1; n]\!]$*, l'application* ϕ_i*, définie pour tout* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *par* $\phi_i(X) = \det([C_1, \ldots, C_{i-1}, X, C_{i+1}, \cdots, C_n])$ *est une forme linéaire (il y a linéarité du déterminant sur une colonne, autrement dit* $\det([C_1, \ldots, C_{i-1}, \lambda Y + \mu Y', C_{i+1}, \cdots, C_n]) = \lambda \det([C_1, \ldots, C_{i-1}, Y, C_{i+1}, \cdots, C_n]) + \mu \det([C_1, \ldots, C_{i-1}, Y', C_{i+1}, \cdots, C_n])$*).*
   Donc si une colonne de A *est nulle, alors :* $\det(A) = 0$.

2. *S'il existe $i,\ j \in [\![1;n]\!]$ tels que $i \neq j$ et $C_i = C_j$, alors $\det(A) = 0$ (un déterminant est nul si deux colonnes sont identiques).*

3. *Soient $i,\ j \in [\![1;n]\!]$ tels que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,*
$\det([C_1, \ldots, C_n]) = \det([C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i + \lambda C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n])$ *(un déterminant reste inchangé si à une certaine colonne on lui rajoute une autre colonne multipliée par un scalaire.*
Plus généralement, on ne change pas un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

4. *(Antisymétrie) Soient $i,\ j \in [\![1;n]\!]$ tels que $i \neq j$, alors on a :*
$\det([C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n]) = -\det([C_1, \ldots, C_n])$ *(on change le signe d'un déterminant en permutant deux colonnes).*

5. *(Forme n-alternée) Pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\det([C_{\sigma(1)}, \ldots, C_{\sigma(n)}]) = \varepsilon(\sigma) \det([C_1, \ldots, C_n])$.*

6. *Pour les cinq premiers points, nous avons les mêmes opérations sur les lignes*

7. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda A) =$

8. $\det(A^T) = \det(A)$.

9. *Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.*
En particulier on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \det(A^n) = (\det(A))^n$.

Proposition 4.1.2 (Déterminants et matrices inversibles)

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A)$ est non nul. Dans ce cas : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.*

2. *On a $\mathrm{rg}\,(A) < n \Longleftrightarrow \det(A) = 0$.*

3. *Si A est dans $GL_n(\mathbb{K})$, alors : $\forall k \in \mathbb{Z},\ \det(A^k) = (\det(A))^k$.*

Exemple 4.1.2

1. *Soit n un entier naturel impair. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A n'est pas inversible.*

2. *Soit $D = [\cos((i+j)\alpha)]_{1 \leq i,j \leq n}$, avec α un réel et $n \geq 2$. Calculer $\det(D)$.*

3. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'elles sont semblables dans $\mathbb{C}$, autrement dit, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$. On pose $P = R + iS$, avec R, S dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
   (a) *Montrer que $AR = RB$ et que $AS = SB$.*
   (b) *Montrer que $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale non nulle sur $\mathbb{C}$. En déduire qu'il existe x dans $\mathbb{R}$ tel que $R + xS$ soit inversible.*
   (c) *Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Proposition 4.1.3 (Déterminant d'une matrice triangulaire) *On a*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

En particulier : $\det(diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i.$

Remarque 4.1.2 *Pour calculer un déterminant, il est intérssant de faire des opérations élémentaires pour se ramener à un déterminant d'une matrice triangulaire (à l'aide de la méthode du pivot de Gauss par exemple). En particulier cette méthode permet d'avoir un déterminant sous forme factorisée, ce qui est très pratique pour voir quand est-ce que celui-ci peut s'annuler. La méthode de Sarrus, n'est vraiment pas une bonne idée pour avoir un déterminant sous forme factorisé.*

Exemple 4.1.3

1. *Soit* $D = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$. *Mettre ce déterminant suivant sous forme factorisée.*

2. *Soient* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. *Mettre le déterminant suivant sous forme factorisée :* $\det(a_{\max(i,j)})$.

Proposition 4.1.4 (Développement selon une ligne ou une colonne)
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ *(on a retiré la i-ème ligne et la j-ème colonne).*
Alors :

1. *Pour tout* $j_0 \in [\![1;n]\!]$, *on a* $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0}(-1)^{i+j_0}\Delta_{i,j_0}$ *(développement par rapport à la* j_0*-ème colonne).*
2. *Pour tout* $i_0 \in [\![1;n]\!]$, *on a* $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}(-1)^{i_0+j}\Delta_{i_0,j}$ *(développement par rapport à la* i_0*-ème ligne).*

Définition 4.1.2 (Cofacteurs) *Le cofacteur d'indice* i, j *de* A *est* $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Remarque 4.1.3 *Cette méthode sert à calculer des petits déterminants (*4×4 *par exemple) ou des déterminants avec beaucoup de zéros.*

Exemple 4.1.4 *Soit* $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. *On pose* $D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{vmatrix}$, *ce déterminant étant de taille* $n \times n$.

1. *Montrer que pour* $n \geq 2$, *on a :* $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. *Quelle valeur donner à* D_1 *pour que cette relation soit encore vraie pour* $n = 1$ *?*
3. *En déduire* D_n *pour tout* n *de* $\mathbb{N}^*$.

Proposition 4.1.5 (Déterminant par blocs) 1. *Soient* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}), D \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$. *Alors :* $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = (\det A)(\det C)$.

2. *Plus généralement, si nous avons une matrice* $A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & \\ 0 & A_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & \\ (0) & & & A_p \end{pmatrix}$ *une matrice triangulaire par blocs, alors* $\det(A) = \prod_{i=1}^{p} \det(A_i)$.

Démonstration : Le deuxième point se déduit du premier par récurrence. Montrons le premier point.

a. Calculer $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$.

b. Montrer que $\det \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(C)$ et $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \det(A)$.

c. Conclure.

Remarque 4.1.4 1. *ATTENTION, en général,* $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$.

2. *(IMPORTANTE) En transposant, on a :* $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det D$, *en effet :*

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^T \right) = \det \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ 0 & D^T \end{pmatrix} = \det(A^T)\det(D^T) = \det(A)\det(D).$$

Exemple 4.1.5 *Calculer* $\det \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}$, *avec* B, C *et* D *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 4.2.1 (Déterminant d'une famille de vecteurs) $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$ *une base de* E *et* $(x_1, \ldots, x_n)$ *une famille de* n *vecteurs de* E, *on note* $a_{i,j}$ *la ième coordonnée de* x_j *dans* $\mathcal{U}$ $\left(x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \right)$. *On* *pose* $\det_{\mathcal{U}}(x_1,\ldots,x_n) = \det(Mat_{\mathcal{U}}(x_1,...,x_n)) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Proposition 4.2.1 (Déterminants et bases) *Soit $\mathcal{U}$ une base de E qui est de dimension n et $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors*

1. $(x_1,\ldots,x_n)$ *est une base de E si et seulement si on a* $\det_{\mathcal{U}}(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$.
2. $(x_1,\ldots,x_n)$ *est une famille liée si et seulement si on a* $\det_{\mathcal{U}}(x_1,\ldots,x_n) = 0$.

Remarque 4.2.1 *Pour* $(x_1,x_2,...x_{i-1},x_i,x_i',x_{i+1},...x_n) \in E^{n+1}$ *et* $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, *on a :*

1. $\det_{\mathcal{U}}(x_1,...,x_{i-1},\lambda x_i+\mu x_i',x_{i+1},...,x_n) = \lambda\det_{\mathcal{U}}(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)+\mu\det_{\mathcal{U}}(x_1,...,x_{i-1},x_i',x_{i+1},...,x_n)$.
2. *Soit* $\sigma \in \mathcal{S}_n$. *Alors,* $\det_{\mathcal{U}}(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\det_{\mathcal{U}}(x_1,\ldots,x_n)$.
   Ceci est équivalent à pour tout $i,k \in [\![1,n]\!]$, $\det_{\mathcal{U}}(x_1,...,x_i,...,x_k,...x_n) = -\det_{\mathcal{U}}(x_1,...,x_k,...,x_i,...x_n)$, *car toute permutation de $\mathcal{S}_n$ est une composition de transpositions.*
3. *On a* $\det_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) = \det(I_n) = 1$.

Exemple 4.2.1 *Soit* $u_1 = (1,2,3)$ *et* $u_2 = (1,1,1)$. *Déterminer une équation du plan* $P = vect(u_1,u_2)$.

Proposition 4.2.2 (Expression des formes multilinéaires alternées)

1. *Une application* $f : E^p \to \mathbb{K}$ *vérifiant les deux premiers points de la remarque précédente est appelée n-forme linéaire alternée et il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que :* $f = \lambda\det_{\mathcal{U}}$.
2. *En particulier, il existe une unique application* $f : E^p \to \mathbb{K}$ *vérifiant les trois points de la remarque précédente, c'est* $f = \det_{\mathcal{U}}$.

Exemple 4.2.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et f un endomorphisme de E. Soit* $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$ *une base de E.*

1. *Montrer qu'il existe τ_f dans $\mathbb{K}$ vérifiant : pour tous vecteurs x_1,x_2 de E :*
$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1),x_2) + \det_{\mathcal{B}}(x_1,f(x_2)) = \tau_f\det_{\mathcal{B}}(x_1,x_2).$$
2. *Soit* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E. Exprimer τ_f en fonction de $tr(f)$.*

Proposition 4.2.3 (Changement de base) *Soient $\mathcal{U},\mathcal{U}'$ deux bases de E et $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors :* $\det_{\mathcal{U}'}(x_1,\ldots,x_n) = \det_{\mathcal{U}'}(\mathcal{U})\cdot\det_{\mathcal{U}}(x_1,\ldots,x_n)$.

4.3 Déterminant d'un endomorphisme

Dans ce paragepahe E désigne un espace vectoriel de dimension n.

Définition 4.3.1 (Déterminant d'un endomorphisme) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{U}$ une base de E. Le scalaire $\det(Mat_{\mathcal{U}}(f)) = \det_{\mathcal{U}}(f(\mathcal{U}))$ est appelé déterminant de f et on le note $\det(f)$. Il est indépendant de la base $\mathcal{U}$ choisie.*

Proposition 4.3.1 (Opérations) *Soient u, $v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.
2. $\det(\lambda Id_E) = \lambda^n$.
3. $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.
4. *On a :* $\det(u) \neq 0$ *si et seulement si on a :* $u \in GL(E)$. *Si* $u \in GL(E)$, *alors* $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

Remarque 4.3.1 *Dans ce cas $\det(u)$ non nul est équivalent à u injective ou u surjective, car u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.*

Exemple 4.3.1

1. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. Montrer que si $f^2 = -id_E$, alors n est pair.*

2. *Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$. *Déterminer $tr(f)$ et $\det(f)$.*

Proposition 4.3.2 (Effet d'une application linéaire sur le déterminant d'une famille) *Soient $\mathcal{U}$ une base de E, $(x_1, ..., x_n)$ une famille de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :* $\det_{\mathcal{U}}(f(x_1), ..., f(x_n)) = \det(f)\det_{\mathcal{U}}(x_1, ..., x_n)$.

4.4 Comatrice

Définition 4.4.1 (Comatrice) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $ComA = [(-1)^{i+j}\Delta_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ qui est appelée comatrice de A.*

Proposition 4.4.1 (Relation avec la comatrice et inversibilité) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :* $A(ComA)^T = (ComA)^T A = \det(A) I_n$.

En particulier, si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(ComA)^T$.

Exemple 4.4.1 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Déterminer* $\operatorname{rg}(Com(A))$.

4.5 Déterminant de Vandermonde

Proposition 4.5.1 (Déterminant de Vandermonde) *Soient* $n \geq 2$ *et* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$.

On considère le déterminant d'ordre n suivant : $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ *que l'on appelle déterminant de Vandermonde. On a :*

$$D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

Ainsi la matrice $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si*

Exemple 4.5.1 *Soit* $\Delta = diag(1, 2, ..., n)$. *Montrer que* $(I_n, \Delta, \Delta^2, ..., \Delta^{n-1})$ *est une base de* $D_n(\mathbb{K})$.

Démonstration du déterminant de Vandermonde

On pose $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

1. Montrer que le déterminant $P_n(X) = D_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X)$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$.

2. Calculer $P_n(x_i)$ pour i dans $[\![1, n-1]\!]$.

3. En déduire une forme factorisée de $P_n(X)$, puis un lien entre les déterminants $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $D_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

4. Etablir que $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$.

5. Que vaut $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, s'il existe i et j dans $[\![1, n]\!]$, avec $i \neq j$ et $x_i = x_j$?