

Dans ce chapitre  $\mathbb{K}$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

Le but de ce chapitre est de trouver une méthode pour réduire un endomorphisme  $u$ . Plus concrètement, il s'agit de trouver une base dans laquelle la matrice de  $u$  est la plus simple possible (diagonale ou triangulaire supérieure).

## 1 Rappels de sup sur les racines d'un polynôme

### 1.1 Racines d'un polynôme et factorisation

**Définition 1.1.1 (Racine)** Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$ . On dit que  $\alpha \in \mathbb{K}$  est une *racine* de  $A$  si  $A(\alpha) = 0$ .

**Proposition 1.1.1 (Factorisation avec des racines distinctes)** Soit  $A$  polynôme dans  $\mathbb{K}[X]$  et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$   $n$  racines deux à deux distinctes de  $A$ . Alors il existe un polynôme  $Q$  dans  $\mathbb{K}[X]$  vérifiant :

$$A = \left( \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \right) Q.$$

**Corollaire 1.1.1 (Majorant du nombre de racines)** 1. Soit  $A$  un polynôme de degré  $n$  (donc non nul). Alors  $A$  admet au plus  $n$  racines distinctes.

2. Par contraposée si un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  admet au moins  $n + 1$  racines distinctes, alors il est nul. En particulier si un polynôme s'annule sur un ensemble infini, alors il est nul.

**Remarque 1.1.1** Si  $A$  et  $B$  sont deux polynômes de degré au plus  $n$  et si  $A$  et  $B$  coïncident en  $n + 1$  valeurs, alors on a :  $A = B$ . En particulier si deux polynômes coïncident sur un ensemble infini, alors ils sont égaux.

**Exemple 1.1.1** Soit  $P$  un polynôme réel non nul tel que  $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$  (\*).

1. Montrer que les racines possibles de  $P$  vérifient  $a = 0$  ou  $|a| = 1$ .
2. Montrer que si  $a$  est racine, alors  $(a - 1)^2$  aussi. En déduire que les racines de  $P$  sont incluses dans  $\{0, 1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$ .
3. Montrer que  $e^{i\pi/3}$ , et  $e^{-i\pi/3}$  ne peuvent pas être racines de  $P$ .
4. Trouver tous les polynômes unitaires réels vérifiant (\*).

**Théorème 1.1.1 (D'Alembert-Gauss)** *Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  possède au moins une racine.*

## 1.2 Racines de polynômes particuliers

### 1.2.1 Polynômes de degré deux

**Définition 1.2.1 (Racine carrée)** *Soit  $\zeta \in \mathbb{C}$ . On appelle racine carrée du nombre complexe  $\zeta$  tout nombre complexe  $z$  tel que  $z^2 = \zeta$ .*

**Proposition 1.2.1 (Existence de racines carrée)** *Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.*

*Démonstration :* Notons sous forme algébrique  $\zeta = a + ib$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $z = \alpha + i\beta$ . Comme  $z^2 = \zeta$

$$\text{et } z^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta, \text{ on obtient : } z^2 = \zeta \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 &= \zeta \\ |z|^2 &= |\zeta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 &= a, \\ 2\alpha\beta &= b, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}.$$

Ainsi, la première et la dernière relation permettent d'obtenir  $\alpha^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$  et  $\beta^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ , et la deuxième équation permet de déterminer le signe du produit  $\alpha\beta$  et donc de choisir les signes à mettre devant les racines carrées pour avoir  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Remarque 1.2.1** 1. *Il faut bien retenir les techniques employées dans cette démonstration pour les réemployer dans les exercices.*

2. **ATTENTION** : La notation  $\sqrt{\cdot}$  est réservée aux nombres réels positifs.

**Proposition 1.2.2 (Équations du second degré)** *Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres complexes tels que  $a \neq 0$ . On considère l'équation*

$$az^2 + bz + c = 0.$$

*On note  $\Delta = b^2 - 4ac$  le discriminant de cette équation,  $\delta$  une racine carrée de  $\Delta$ . On a :*

- deux solutions  $\frac{-b + \delta}{2a}$  et  $\frac{-b - \delta}{2a}$  si  $\Delta$  est non nul.
- une solution double  $\frac{-b}{2a}$  si  $\Delta$  est nul.

**Exemple 1.2.1** *Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$ .*

## 1.2.2 Racines $n$ -ème de l'unité

**Définition 1.2.2 (Racine  $n$ -ièmes de l'unité)** Les *racines  $n$ -ièmes de l'unité* sont les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^n = 1$ . L'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité est noté  $\mathbb{U}_n$ .

**Proposition 1.2.3 (Expression des racines  $n$ -ièmes de l'unité) (Démonstration CCP 84)** Les racines  $n$ -ièmes de l'unité sont données par

$$\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\}\} = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in I\},$$

où  $I$  est un intervalle d'entiers relatifs constitué de  $n$  entiers consécutifs. Ainsi  $\mathbb{U}_n$  possède  $n$  éléments.

*Démonstration :*  $z = 0$  n'est pas solution de l'équation :  $z^n = 1$  (\*). Ainsi les solutions de (\*) sont non nulles et peuvent s'écrire sous la forme  $z = re^{i\theta}$ , avec  $r > 0$  et  $\theta$  dans  $\mathbb{R}$ .

On a :  $z^n = 1 \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta \equiv 0[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \text{ car } r > 0 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ . Les réels  $\frac{2k\pi}{n}$  pour  $k$  dans

$\llbracket 0, n-1 \rrbracket$  sont deux à deux distincts et dans  $[0, 2\pi[$ . Or l'application  $\theta \mapsto e^{i\theta}$  est injective sur  $[0, 2\pi[$ , donc l'ensemble  $\left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\right\}$  est constitué de  $n$  solutions distinctes de (\*) qui sont donc des racines du polynôme  $X^n - 1$ . Or ce polynôme a au plus  $n$  racines distinctes, donc on a trouvé toutes les racines de ce polynôme. Donc l'ensemble des solutions de (\*) est  $\left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\right\}$ .

**Exemple 1.2.2** L'ensemble des racines 3-ièmes de l'unité sont traditionnellement notées  $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ , avec :  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ,  $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \bar{j}$ .

**Remarque 1.2.2** Si on note  $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ , on a alors  $\mathbb{U}_n = \{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}\}$ , car on a :  $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (e^{i\frac{2\pi}{n}})^k$ .

**Proposition 1.2.4** • Soit  $u \in \mathbb{U}_n$  différent de 1. On a alors  $\sum_{k=0}^{n-1} u^k =$

• Ainsi la somme des racines  $n$ -ièmes de l'unité vaut

**Exemple 1.2.3** Pour les racines 3-ièmes de l'unité, on obtient  $1 + j + j^2 =$

**Définition 1.2.3 (Racine  $n$ -ième d'un nombre complexe)** Étant donné un nombre complexe  $\mu$ , on appelle *racine  $n$ -ième* de  $\mu$  tout nombre complexe  $z$  tel que

$$z^n = \mu.$$

**Proposition 1.2.5 (Expression des racines  $n$ -ième d'un nombre complexe)**

1. Soit  $\mu \in \mathbb{C}^*$ . Soit  $z_0$  une racine  $n$ -ième de  $\mu$  (avec  $z_0^n = \mu$ ). L'ensemble des racines  $n$ -ième de  $\mu$  est alors l'ensemble des nombres complexes complexes  $uz_0$ , où  $u$  décrit  $\mathbb{U}_n$ .
2. Étant donné un nombre complexe non nul écrit sous forme trigonométrique  $\mu = re^{i\theta}$ , il possède  $n$  racines  $n$ -ièmes données par

$$\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ ou } \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in I,$$

avec  $I$  un intervalle de  $n$  entiers consécutifs.

**Remarque 1.2.3** On retrouve la proposition précédente en écrivant :  
 $z^n = \mu = z_0^n \Leftrightarrow (z/z_0)^n = 1 \Leftrightarrow z/z_0 \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z/z_0 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

**Exemple 1.2.4** Trouver les racines  $n$ -ème de  $1 + i$  sous forme trigonométrique.

### 1.3 Racines multiples

**Définition 1.3.1 (Racines multiples)** Soient  $A \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $\alpha$  est **une racine de multiplicité ou d'ordre de multiplicité  $k$**  de  $A$  si  $(X - \alpha)^k$  divise  $A$  et  $(X - \alpha)^{k+1}$  ne divise pas  $A$ .

**Remarque 1.3.1** 1. Si  $k = 1$ , on parle de **racine simple** ; si  $k = 2$ , on parle de **racine double** ; si  $k = 3$  de **racine triple**.

De manière générale, si  $k$  est plus grand que 2, on parle de **racine multiple**.

2. Si  $\alpha$  n'est pas racine de  $A$ , on dit que  $\alpha$  est de multiplicité nulle.

**Remarque 1.3.2** Si on a seulement  $(X - \alpha)^k$  qui divise  $A$ , on peut uniquement dire que  $\alpha$  est une racine de multiplicité au moins  $k$ .

**Proposition 1.3.1 (Multiplicité et dérivée) (Démon CCP 85)** Soient  $A \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme non nul,  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ .  $\alpha$  est une racine de multiplicité  $k$  de  $A$  si et seulement si

*Démonstration :* On suppose que  $A$  est dans  $\mathbb{K}_n[X]$ , pour un certain  $n$  dans  $\mathbb{N}$  et on rappelle la formule de Taylor pour les polynômes :  $A(X) = \sum_{l=0}^n \frac{A^{(l)}(\alpha)}{l!} (X - \alpha)^l$ .

Nous rappelons que  $(1, (X - \alpha), \dots, (X - \alpha)^n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$  en tant que famille libre (car elle est de degré échelonnée) à  $n + 1$  élément dans un espace vectoriel de dimension  $n + 1$ .

$\alpha$  est une racine de multiplicité  $k$  si et seulement s'il existe  $Q$  dans  $\mathbb{K}_{n-k}[X]$  tel que  $Q(\alpha) \neq 0$  et  $A = (X - \alpha)^k Q$ . Si on décompose  $Q$  dans la base  $(1, (X - \alpha), \dots, (X - \alpha)^{n-k})$  de  $\mathbb{K}_{n-k}[X]$ , il existe

$q_0, \dots, q_{n-k}$  tels que  $Q = \sum_{i=0}^{n-k} q_i (X - \alpha)^i$ . Ainsi  $Q(\alpha) \neq 0$  se traduit par  $q_0 \neq 0$  et  $A = (X - \alpha)^k Q$

soit :  $\sum_{l=0}^n \frac{A^{(l)}(\alpha)}{l!} (X - \alpha)^l = \sum_{i=0}^{n-k} q_i (X - \alpha)^{i+k} = \sum_{l=k}^n q_{l-k} (X - \alpha)^l$ . Par unicité de la décomposition d'un

polynôme dans la base  $(1, (X - \alpha), \dots, (X - \alpha)^n)$ , cela équivaut à :  $A(\alpha) = A'(\alpha) = \dots = A^{(k-1)}(\alpha) = 0$  et  $A^{(k)}(\alpha) = q_0 \neq 0$ .

**Remarque 1.3.3** Si  $A$  est non nul et  $A(\alpha) = A'(\alpha) = \dots = A^{(k-1)}(\alpha) = 0$ , alors  $\alpha$  est une racine de multiplicité au moins  $k$  et donc  $(X - \alpha)^k$  divise  $A$ .

**Exemple 1.3.1 (CCP 85)** Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  pour que 1 soit racine double du polynôme  $P = X^5 + aX^2 + bX$  et factoriser alors ce polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$ .

## 1.4 Polynôme scindé

**Définition 1.4.1 (Polynôme scindé)** Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$  non constant de degré  $n$  et de coefficient dominant  $a_n$  qui est dans  $\mathbb{K}^*$ . On dit que  $A$  est **scindé sur**  $\mathbb{K}$  s'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que :

$$A = a_n \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k), \text{ c'est-à-dire que } A \text{ peut s'écrire comme produit de facteurs de degré un.}$$

**Remarque 1.4.1** 1. Dans le cadre de la définition précédente, on note  $\{\alpha_i, i \in \llbracket 1; r \rrbracket\}$  l'ensemble des racines deux à deux distinctes de  $A$  (on a regroupé les  $\lambda_k$  identiques). On a donc  $\{\alpha_i, i \in \llbracket 1; r \rrbracket\} = \{\lambda_k, k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ . Ainsi chaque  $\alpha_i$  apparaît un certain nombre de fois dans la liste  $\{\lambda_k, k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ . On note  $k_i$  ce nombre. Grâce à notre définition, nous avons donc

$$A = a_n \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{k_i}. \text{ Dans ce cas, } \{\alpha_i, i \in \llbracket 1; r \rrbracket\} \text{ est l'ensemble des racines de } A \text{ et pour chaque } i, \text{ l'entier } k_i \text{ est la multiplicité de } \alpha_i.$$

2. Soit  $a \in \mathbb{K}[X]$  et  $k_1, \dots, k_r$  les multiplicités de chaque racine de  $A$ .

(a) On a  $\sum_{i=1}^r k_i \leq d^\circ A$ .

(b) (IMPORTANT)  $A$  est scindé si et seulement si  $\sum_{i=1}^r k_i = d^\circ A$ .

(c) (IMPORTANT) Tout polynôme non constant est scindé sur  $\mathbb{C}$ .

3.  $P \in \mathbb{C}[X]$  est à racines simples si et seulement si  $P \wedge P' =$

## 1.5 Relations entre coefficients et racines

**Proposition 1.5.1 (Relations coefficients / racines)** Soit

$$A = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 = a_n \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k) \text{ un polynôme scindé sur } \mathbb{K} \text{ dont les racines sont}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  comptées avec leur ordre de multiplicité (chaque racine étant répétée avec son ordre de multiplicité). On pose  $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$ , pour  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Alors  $\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$ , autrement dit :  $A = a_n (X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \sigma_3 X^{n-3} + \dots + (-1)^n \sigma_n)$ . En particulier :

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n \lambda_k = \quad , \quad \text{et} \quad \sigma_n = \prod_{k=1}^n \lambda_k =$$

**Remarque 1.5.1** Pour  $n = 2$ , pour  $P = aX^2 + bX + c$ , le produit des racines vaut  $\quad$  et la somme vaut  $\quad$ . Ceci permet de résoudre des équations sans avoir à calculer  $\Delta$ .

**Exemple 1.5.1** 1. Factoriser  $X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1$ .

2. Retrouver la somme et le produit des racines  $n$ -ème de l'unité, pour  $n \geq 2$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) (CCP 84) Déterminer les solutions de l'équation (E) :  $(z + i)^n = (z - i)^n$  et montrer qu'elles sont réelles.

- (b) Factoriser le polynôme  $P = (X + i)^n - (X - i)^n$ .  
(c) Donner la somme et le produit de ses racines.

## 2 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

### 2.1 Droites stables par un endomorphisme

Dans ce paragraphe,  $u$  désignera un endomorphisme de  $E$ .

Nous rappelons qu'une droite vectorielle  $D$  est un espace vectoriel de dimension un, c'est-à-dire qu'il existe  $x$  dans  $E$  non nul tel que :  $D = \text{vect}(x)$ .

**Définition 2.1.1 (Droite stable)** Soit  $D = \text{vect}(x)$ , avec  $x$  non nul dans  $E$ , une droite vectorielle. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $D$  est stable par  $u$  si :

**Proposition 2.1.1 (Caractérisation des droites stables)** On reprend les notations de la définition précédente. On a les équivalences suivantes :

1.  $D$  est stable par  $u$ .
2. Il existe  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}$  tel que :  $u(x) = \lambda x$ .
3. Il existe  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}$  tel que :  $x \in \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u)$ .

*Démonstration :*

- 1)  $\Rightarrow$  2) : on suppose  $D$  stable par  $u$ .

- 2)  $\Rightarrow$  1) : on suppose qu'il existe  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}$  tel que :  $u(x) = \lambda x$ .

- 2)  $\Leftrightarrow$  3) : soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Pour tout  $x$  de  $E$ , on a :

## 2.2 Vecteurs propres, valeurs propres d'un endomorphisme

**Définition 2.2.1 (Vecteurs propres)** Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- On dit que  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  s'il existe un vecteur  $x$  non nul de  $E$  tel que :  $u(x) = \lambda x$ .
- Dans ce cas, on dit que  $x$  est un vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Exemple 2.2.1 (CCP 83)** Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $u \circ v$ , alors  $\lambda$  est valeur propre de  $v \circ u$ .

**Proposition 2.2.1 (Polynôme d'endomorphisme et valeurs propres) (Démonstration CCP 88)**

Soit  $x$  un vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

1. On a :  $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) =$

Plus généralement pour  $a_0, \dots, a_n$  dans  $\mathbb{K}$ , on a :  $\left( \sum_{k=0}^n a_k u^k \right) (x) =$

soit pour tout  $P$  dans  $\mathbb{K}[X]$ , on a :  $P(u)(x) =$

2. Soit  $P$  dans  $\mathbb{K}[X]$  qui annule  $u$ . Alors pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $u$ , on a  $P(\lambda) = 0$ .

*Démonstration :*

**Remarque 2.2.1 (IMPORTANT)** Les valeurs propres sont donc racines du polynôme minimal de  $u$ .

**Proposition 2.2.2 (Caractérisation d'un vecteur propre par le noyau)**

1.  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  si et seulement si  $\text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u) \neq \{0\}$  si et seulement si  $\lambda \text{Id}_E - u$  n'est pas bijective.
2. Si  $E$  est de dimension finie,  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  si et seulement si  $\lambda \text{Id}_E - u$  n'est pas bijective.

*Démonstration :* Le premier point découle de l'équivalence entre 2) et 3) de la proposition 2.1.1. Le deuxième point vient du fait qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est injectif si et seulement si il est bijectif.

**Définition 2.2.2 (Sous-espace propres)** Lorsque  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ , on pose

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\} = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E).$$

C'est le sous-espace propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

On le note  $E_\lambda$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

- Remarque 2.2.2**
1.  $E_\lambda(u)$  est l'ensemble de ses vecteurs propres associés à  $\lambda$  auquel on rajoute 0.
  2. (IMPORTANT)  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  si et seulement si :  $E_\lambda(u) \neq \{0\}$  grâce à la proposition 2.2.2.
  3. Si  $\lambda$  est non nul, alors :  $E_\lambda(u) \subset \text{Im}(u)$ , car :

**Définition 2.2.3 (Spectre)** Si  $E$  est de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de  $u$  est appelé spectre de  $u$ , noté  $\text{Sp}(u)$ .

**Remarque 2.2.3 IMPORTANTE** : Le sous-espace propre  $E_0(u)$  de  $u$  associé à la valeur propre 0 est Ainsi  $u$  est injective si et seulement si

- Exemple 2.2.2**
1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  
(a) l'homothétie  $k\text{Id}_E$  :

$$(b) \varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto f' \end{cases} :$$

$$(c) \tau : \begin{cases} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{cases} :$$

2. (CCP 83) Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Montrer que si 0 est valeur propre de  $u \circ v$ , alors 0 est valeur propre de  $v \circ u$ .

3. (CCP 93) Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ , non bijectif, tel que :  $u^3 + u^2 + u = 0$ . Déterminer  $\text{Sp}(u)$ .



**Proposition 2.2.3 (Les sous-espaces propres sont en somme directe)** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ , alors les sous-espaces propres associés sont en somme directe :

$$E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_p}(u) = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(u).$$

*Démonstration* : Montrons cela par récurrence. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et on pose  $\mathcal{P}(p)$  : si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ , alors les sous-espaces propres associés sont en somme directe.

Pour  $\mathcal{P}(1)$ , il n'y a rien à montrer.

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et supposons  $\mathcal{P}(p)$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$  des valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ .

**Corollaire 2.2.1 (Liberté d'une famille de vecteurs propres)** Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ . Soient  $x_1, \dots, x_p$  des vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . Alors la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre.

*Démonstration* : Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$  tels que :  $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = 0$ . Comme on a :  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_i x_i \in E_{\lambda_i}(u)$ ,

la proposition précédente nous permet d'affirmer que :  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_i \underbrace{x_i}_{\neq 0} = 0$ , puis :

$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_i = 0$ , car les  $x_i$  sont des vecteurs propres. La famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est donc libre.

**Exemple 2.2.3** Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  des nombres complexes deux à deux distincts. On pose  $u_i$  la suite  $(\alpha_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Montrer que  $(u_1, \dots, u_m)$  est une famille libre.

**Corollaire 2.2.2 (Majoration du nombre de valeurs propres)** Si  $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $u$  admet au plus  $n$  valeurs propres distinctes.

*Démonstration* : Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ . Soient  $x_1, \dots, x_p$  des vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . Comme la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre dans un espace vectoriel de dimension  $n$ , alors  $p \leq n$ .

**Exemple 2.2.4** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $v \in \mathcal{L}(E)$  et l'endomorphisme  $\psi$  :  $\begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ g & \mapsto gv - vg \end{cases}$  de  $\mathcal{L}(E)$ .

On suppose qu'il existe  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $uv - vu = u$ .

1. Quel le nombre maximal de valeurs propres distinctes de  $\psi$  ?
2. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k v - v u^k = k u^k$ .
3. En déduire que  $u$  est nilpotente.

## 2.3 Cas d'endomorphismes qui commutent

**Proposition 2.3.1 (Stabilité des sous-espaces propres)** *Si  $u \circ v = v \circ u$ , les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$  :  $\forall \lambda \in Sp(u)$ ,  $v(\text{Ker}(\lambda Id_E - u)) \subset \text{Ker}(\lambda Id_E - u)$ , autrement dit :  $v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$ .*

*Démonstration :*

## 2.4 Extension des définitions pour une matrice

Dans la suite les espaces considérés seront de dimension finie.

On identifie les matrices colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  avec les éléments de  $\mathbb{K}^n$  via :  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Grâce à l'identification précédente, l'endomorphisme canoniquement associée à  $A$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  qui s'identifie à  $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto AX \end{cases}$ .

Par notre identification, c'est l'endomorphisme  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  tel que  $Mat_{\mathcal{B}}(f) = A$  avec  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

Les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice  $A$  seront définis comme ceux de l'endomorphisme canoniquement associé :

**Définition 2.4.1 (Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'une matrice)** *Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .*

- *On dit que  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  s'il existe  $X$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  non nul tel que  $AX = \lambda X$ .*
- *Dans ce cas, on dit que  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .*
- *Si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ , le sous-espace propre associé à  $\lambda$  est*

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = \lambda X\} = \text{Ker}(\lambda I_n - A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

- *On appelle spectre de  $A$  l'ensemble des valeurs propres de  $A$  et on le note  $Sp(A)$ .*

Les propriétés vues sur les endomorphismes se transposent aux matrices :

**Proposition 2.4.1 (Transposition des propriétés pour les matrices)**

1.  *$\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si  $\lambda I_n - A$  n'est pas inversible si et seulement si  $\text{Ker}(\lambda I_n - A) \neq \{0\}$ .*
2. *Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des valeurs propres deux à deux distinctes de  $A$ , alors les sous-espaces propres associés sont en somme directe :*

$$E_{\lambda_1}(A) + \dots + E_{\lambda_p}(A) = E_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(A).$$

3. Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $AB = BA$ , alors les sous-espaces propres de  $A$  sont stables par  $B$  :  
 $\forall \lambda \in Sp(A), B(\text{Ker}(\lambda I_n - A)) \subset \text{Ker}(\lambda I_n - A)$ , autrement dit  $B(E_\lambda(A)) \subset E_\lambda(A)$ .

*Démonstration* : Vient du lien entre une application linéaire et sa représentation matricielle.

**Remarque 2.4.1** *IMPORTANT* :  $\text{Ker}(A)$  est le sous-espace propre associé à la valeur propre  $0$  :  $E_0(A)$ . Ainsi  $A$  est inversible si et seulement si  $0$  n'est pas valeur propre de  $A$  (dans ce cas  $\text{Ker}(A) = \{0\}$ ).

**Exemple 2.4.1** 1. Soit  $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :  $\begin{cases} \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ij} \geq 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \end{cases}$ . On appelle une telle matrice une matrice stochastique. Montrer que  $1$  est valeur propre de  $A$ .

2. Soit  $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , avec  $n \geq 2$ . Montrer que  $0$  est valeur propre de  $J$  et déterminer une base de son sous-espace propre associé.

**Proposition 2.4.2 (Polynôme de matrices et valeurs propres)** 1. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors :  $\forall k \in \mathbb{N}, A^k X = \lambda^k X$   
 Pour tout  $P$  dans  $\mathbb{K}[X]$ , on a :  $P(A)X = P(\lambda)X$ .

2. Soit  $P$  dans  $\mathbb{K}[X]$  qui annule  $A$ . Alors pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$ , on a  $P(\lambda) = 0$ .

*Démonstration* : Copier la démonstration vue pour les endomorphismes.

**Remarque 2.4.2** (*IMPORTANT*) Les valeurs propres sont donc racines du polynôme minimal de  $A$ .

**Proposition 2.4.3 (Spectre et sous-corps)** Soient  $\mathbb{K}'$  un sous-corps de  $\mathbb{K}$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$ . Alors le spectre de  $A$  dans  $\mathbb{K}'$  est inclus dans le spectre de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  ( $A$  est vue dans ce cas comme une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ).

*Démonstration* : Soit  $\lambda \in \mathbb{K}'$  une valeur propre de  $A$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}')$  un vecteur propre associé. On a donc :  $AX = \lambda X$ . Mais comme  $\lambda$  est aussi dans  $\mathbb{K}$  et  $X$  est aussi dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  (et il est toujours non nul), alors  $\lambda$  est aussi valeur propre de  $A$  dans  $\mathbb{K}$ .

### 3 Polynôme caractéristique

#### 3.1 Polynôme caractéristique d'une matrice

**Définition 3.1.1 (Polynôme caractéristique d'une matrice)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On considère la fonction

$$\chi_A : \begin{cases} \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ t & \mapsto \det(tI_n - A) \end{cases} .$$

On appelle cette fonction polynôme caractéristique que l'on note  $\chi_A$ .

**Proposition 3.1.1 (Expression du polynôme caractéristique)**  $\chi_A$  est une fonction polynôme unitaire (coefficient dominant qui vaut 1) de degré  $n$ .

Si on identifie cette fonction polynôme au polynôme  $\chi_A(X)$ , alors on a :

$$\chi_A(X) = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A).$$

*Démonstration :*

Si  $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ , on a  $\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & X - a_{nn} \end{pmatrix}$ . Si on note  $C_i$  la  $i$ -ème colonne

de  $A$  et  $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$ , nous avons par multilinéarité du déterminant :

$\chi_A(X) = \det(XE_1 - C_1, XE_2 - C_2, \dots, XE_n - C_n) = X^n \det(E_1, \dots, E_n) + X^{n-1} (\det(-C_1, E_2, \dots, E_n) + \det(E_1, -C_2, \dots, E_n) + \dots + \det(E_1, E_2, \dots, -C_n)) + \dots + \det(-C_1, -C_2, \dots, -C_n)$ , car pour le terme en  $X^n$  quand on développe, on ne choisit que les composantes avec  $XE_i$ , pour le terme en  $X^{n-1}$ , on choisit  $n-1$  composantes avec  $XE_i$  et une avec  $-C_k$  et pour le dernier terme, on ne choisit jamais les  $XE_i$ , donc seuls les  $-C_k$  apparaissent. Par cette façon de développer le déterminant, par puissances de  $X$ , on constate que  $\chi_A$  est un polynôme.

Or nous avons :

- $\det(E_1, E_2, \dots, E_n) = \det(I_n) = 1$ .

- $\det(E_1, \dots, E_{i-1}, -C_i, E_{i+1}, \dots, E_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -a_{1i} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -a_{2i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -a_{ii} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{ni} & \dots & 1 \end{pmatrix} = -a_{ii}(-1)^{i+i} \det(I_{n-1}) = -a_{ii}$ , par développement par rapport à la ligne  $i$ .

- $\det(-C_1, -C_2, \dots, -C_n) = (-1)^n \det(C_1, C_2, \dots, C_n) = (-1)^n \det(A)$ .

**Remarque 3.1.1** 1.  $\chi_A(0) =$

2.  $\forall t \in \mathbb{K}, \det(A - tI_n) =$

**Exemple 3.1.1** Soit  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . Alors  $\chi_B(X) =$

**Corollaire 3.1.1 (Racines de  $\chi_A$ )** Les racines de  $\chi_A$  sont les valeurs propres de  $A$ .

*Démonstration :*

**Remarque 3.1.2** Pour trouver le spectre d'une matrice, on a besoin de chercher les racines de  $\chi_A$ . Pour trouver les racines d'un polynôme, il est bien de le factoriser. Ainsi dans le calcul de  $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ , ça n'est pas une bonne idée d'effectuer la mauvaise méthode de Sarrus, car votre polynôme caractéristique ne sera pas factorisé. Utilisez des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour calculer le déterminant afin d'avoir une forme factorisée.

**Proposition 3.1.2 (Conservation du polynôme caractéristique et du spectre par similitude)** Si  $A$  et  $A'$  sont semblables, alors :

1.  $\chi_A = \chi_{A'}$ .
2.  $Sp(A) = Sp(A')$ .

*Démonstration* : On suppose que  $A = PA'P^{-1}$ , avec  $P$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$ .

1. On a :  $\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda PP^{-1} - PA'P^{-1}) = \det(P(\lambda I_n - A')P^{-1}) = \det(\lambda I_n - A')$ , car le déterminant de deux matrices semblables est le même et donc :  $\chi_A = \chi_{A'}$ .
2. Cela découle donc du corollaire 3.1.1, car  $\chi_A = \chi_{A'}$ .

**Remarque 3.1.3 ATTENTION** : si deux matrices ont le même polynôme caractéristique, alors ces matrices ne sont pas forcément semblables. Par exemple  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Nous avons :

$$\chi_A = \quad \quad \quad \text{et } \chi_B =$$

Mais ces deux matrices ne sont pas semblables, car

**Proposition 3.1.3 (Matrice semblable à une matrice triangulaire)** Si  $A$  est semblable à  $T$  (il existe

$$P \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ tel que } A = PTP^{-1}, \text{ avec } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ alors } \chi_A = \quad \quad \quad \text{et donc}$$

$$Sp(A) =$$

On a le même résultat avec une matrice triangulaire inférieure.

*Démonstration* :

**Exemple 3.1.2** 1. Soit  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$ , avec  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$  et  $n \geq 2$ .

Montrer que  $\chi_C(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $\chi_A$  et le spectre réel et complexe de  $A$ .

**Remarque 3.1.4 (IMPORTANT)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

1.  $A$  admet au moins une valeur propre complexe, car  $\chi_A$  est non constant et admet au moins une racine grâce au théorème de D'Alembert Gauss.
2.  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{C}$  en tant que polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exemple 3.1.3** 1. Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $B$  et  $B^T$  ont le même polynôme caractéristique, le même spectre et de plus :  $\forall \lambda \in Sp(B), \dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_\lambda(B^T))$ .

Mais attention,  $A$  et  $A^T$  n'ont pas forcément les mêmes sous-espaces propres : par exemple si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Définition 3.1.2 (Multiplicité d'une valeur propre)** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in Sp(A)$ . On appelle multiplicité de la valeur propre  $\lambda$  sa multiplicité en tant que racine de  $\chi_A$ . On note celle-ci  $m_\lambda$ .

**Remarque 3.1.5** Si  $\chi_A$  est scindé (lorsque  $\sum_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda = n = d^\circ(\chi_A)$ ), alors  $\chi_A = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ .

**Exemple 3.1.4** Déterminer les valeurs propres ainsi que leur multiplicité des matrices suivantes :

1.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Préciser les sous-espaces propres.

**Remarque 3.1.6** On rappelle que  $A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$  donne la  $i$ -ème colonne de  $A$ , ce qui rend

les calculs précédents cohérents.

2.  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

3.  $C = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$ .

**Proposition 3.1.4 (Majoration des multiplicités)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1.  $A$  admet au plus  $n$  valeurs propres, comptées avec leur multiplicité, c'est-à-dire que si

$$Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}, \text{ alors : } \sum_{i=1}^p m_{\lambda_i} \leq n.$$

2. Pour tout  $\lambda$  dans  $Sp(A)$ , on a :

$$1 \leq \dim(E_\lambda(A)) \leq m_\lambda \leq n.$$

*Démonstration :*

1. Un polynôme de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines distinctes, ce qui est donc le cas pour  $\chi_A$ .

Provient du fait que la somme des racines d'un polynôme comptées avec leur ordre de multiplicité est inférieur au degré du polynôme ( $\chi_A$  est de la forme  $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}} Q$ ). Le fait que  $d^\circ \chi_A = n$  permet de conclure.

2. L'inégalité de gauche provient du fait que  $E_\lambda(A) \neq \{0\}$  (grâce à la proposition 2.2.2).

Pour l'inégalité de droite :

**Remarque 3.1.7** 1. Si  $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ , alors  $\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(A)) \leq$

*En effet :*

2. **IMPORTANT** : si  $\lambda$  est une valeur propre de multiplicité un, alors  $\dim(E_\lambda(A)) =$

*En effet,*

**Proposition 3.1.5** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose  $\chi_A$  scindé sur  $\mathbb{K}$ .

• Si on note  $\mu_1, \dots, \mu_n$  les valeurs propres de  $A$  répétées autant de fois que leur multiplicité, c'est-

à-dire :  $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \mu_i)$ , alors

$$tr(A) = \quad \quad \quad \text{et } \det(A) =$$

• Si  $\chi_A = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$ . Alors on a  $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  et :

$$tr(A) = \quad \quad \quad \text{et } \det(A) =$$



*Démonstration :* Les racines de  $\chi_A$ , qui est scindé, sont  $\mu_1, \dots, \mu_n$  or le coefficient de degré  $n - 1$  de  $\chi_A$  est  $-tr(A)$  et le coefficient de degré  $n$  est 1, donc grâce au lien entre coefficients et racines, on a :  $\mu_1 + \dots + \mu_n = -\frac{-tr(A)}{1} = tr(A)$ . Pour le produit, comme le coefficient constant est  $(-1)^n \det(A)$ , alors :  $\mu_1 \times \dots \times \mu_n = (-1)^n \frac{(-1)^n \det(A)}{1} = \det(A)$ .

**Remarque 3.1.8** *La proposition précédente est toujours vraie pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .*

**Exemple 3.1.5** 1. Soit  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de rang un.

- (a) (**CCP 72 à adapter pour les endomorphismes de rang un**) Montrer que :  $\chi_C(X) = X^{n-1}(X - tr(C))$ .
- (b) En déduire  $Sp(C)$ .
- (c) Si  $tr(C) \neq 0$ , quelle est la dimension des sous-espaces propres ?

- 2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = I_n$ . Montrer que  $tr(A)$  est un entier relatif. Si  $n$  est impair, montrer que  $A - I_n$  n'est pas inversible.

## 3.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

**Définition 3.2.1 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme)** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- 1. On appelle polynôme caractéristique de  $u$  et on note  $\chi_u$  le polynôme caractéristique de sa matrice écrite dans une base arbitraire. Ainsi on pose  $\chi_u(X) = \det(XId_E - u)$ .
- 2. Soit  $\lambda \in Sp(u)$ . On appelle multiplicité de la valeur propre  $\lambda$  la multiplicité de la racine  $\lambda$  dans  $\chi_u$ . On la note  $m_\lambda$ .

**Remarque 3.2.1** *Le déterminant de l'endomorphisme  $\lambda Id_E - u$  étant indépendant de la base choisie, la définition précédente a un sens.*

On peut étendre les propriétés vues pour les matrices.

**Proposition 3.2.1** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1.  $\chi_u$  est de la forme  $X^n - \text{tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$ .
2. Les racines de  $\chi_u$  sont les valeurs propres de  $u$  et de plus

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) = \dim \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u) \leq m_\lambda \leq n.$$

3.  $u$  admet au plus  $n$  valeurs propres, comptées avec leur multiplicité, c'est-à-dire que si

$$Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}, \text{ alors : } \sum_{i=1}^p m_{\lambda_i} \leq n.$$

4. On suppose  $\chi_u$  scindé de la forme  $\chi_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$ . Alors on a  $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  et :

$$\text{tr}(u) = \sum_{i=1}^p m_{\lambda_i} \lambda_i \text{ et } \det(u) = \prod_{i=1}^p \lambda_i^{m_{\lambda_i}}.$$

Si on note  $\mu_1, \dots, \mu_n$  les valeurs propres de  $u$  répétées autant de fois que leur multiplicité, alors

$$\text{tr}(u) = \sum_{i=1}^n \mu_i \text{ et } \det(u) = \prod_{i=1}^n \mu_i.$$

**Remarque 3.2.2** 1. Si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, alors  $u$  admet au moins une valeur propre complexe et  $\chi_u$  est scindé. Le dernier point de la proposition précédente est donc toujours vrai si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

2. (IMPORTANT) Pour trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres d'un endomorphisme, il sera plus commode de se ramener à la recherche des valeurs propres et des sous-espaces propres de la matrice associée à cet endomorphisme dans une certaine base.

**Exemple 3.2.1** 1. Soit  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \end{cases}$ . Déterminer le spectre de  $\varphi$  ainsi que la multiplicité de ses valeurs propres.

2. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $2n + 1$ . Montrer que tout endomorphisme  $u$  de  $E$  admet au moins une valeur propre réelle.

**Proposition 3.2.2 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit)** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , en notant  $\tilde{u}$  l'endomorphisme induit sur  $F$  par  $u$ , on a :  $\chi_{\tilde{u}} | \chi_u$ .

*Démonstration* : Soit  $p = \dim(F)$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$ . Cette famille étant libre, on peut la compléter en une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ . Comme  $F$  est stable par  $u$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est de la forme  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ . Ainsi, comme le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base choisie, on a :  $\chi_u = \begin{vmatrix} XI_p - A & -B \\ 0 & XI_{n-p} - D \end{vmatrix} = \det(XI_p - A) \det(XI_{n-p} - D) = \chi_{\tilde{u}}(X) \det(XI_{n-p} - D)$ , car la matrice de  $\tilde{u}$  dans la base  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $F$  est  $A$ . On peut conclure, car  $\det(XI_{n-p} - D)$  est le polynôme caractéristique de  $D$ , donc c'est un polynôme.

**Remarque 3.2.3** 1. On a donc  $Sp(\tilde{u}) \subset Sp(u)$ , car une racine de  $\chi_{\tilde{u}}$  est aussi une racine de  $\chi_u$ , grâce à la proposition précédente.

2. Plus généralement, si on a  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$  et que  $u$  laisse stable tous les  $E_i$ , alors en notant  $u_i$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur chaque  $u_i$ , on a :  $\chi_u = \prod_{i=1}^p \chi_{u_i}$ .

**Exemple 3.2.2** Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Soit  $P$  un plan vectoriel stable par  $u$ . On note  $\tilde{u}$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $P$ . Quelles sont les polynômes caractéristiques  $\chi_{\tilde{u}}$  possibles ?

## 4 Diagonalisation

On suppose dans ce paragraphe que  $E$  est de dimension finie  $n$ .

### 4.1 Endomorphismes diagonalisables

**Proposition 4.1.1 (Diagonalisabilité des endomorphismes)** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est diagonale.

2. Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$ .

3.  $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_{\lambda}(u)$ .

4.  $n = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_{\lambda}(u))$ .

*Démonstration* : 1)  $\Rightarrow$  2) : Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  dans laquelle on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Ainsi en retraduisant, cela signifie que :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u(e_i) = \lambda_i e_i$ . Ainsi les  $e_i$  sont aussi des vecteurs propres de  $u$  (ces vecteurs sont non nuls car ils font partie d'une base).

2)  $\Rightarrow$  3) : Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ . Tout vecteur est combinaison linéaire de vecteurs propres de  $u$ , ce qui montre l'inclusion :  $E \subset \sum_{\lambda \in Sp(u)} E_{\lambda}(u)$ . Bien sûr comme  $\sum_{\lambda \in Sp(u)} E_{\lambda}(u)$

est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on a l'inclusion dans l'autre sens d'où  $E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} E_{\lambda}(u)$ . Par ailleurs,

nous avons vu que cette somme est directe, donc :  $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_{\lambda}(u)$ .

3)  $\Rightarrow$  1) : Cela provient du recollement des bases des  $E_{\lambda}(u)$ . En effet tout vecteur non nul de  $E_{\lambda}(u)$  est un vecteur propre (associé à la valeur propre  $\lambda$ ).

3)  $\Leftrightarrow$  4) : Nous avons :  $\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) \subset E$  et donc  $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$  si et seulement si

$$\dim \left( \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) \right) = \dim(E) \text{ si et seulement si } \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u)) = n = \dim(E).$$

**Définition 4.1.1 (Endomorphisme diagonalisable)** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est diagonalisable si l'une des propriétés de la proposition précédente est vérifiée.

**Remarque 4.1.1 (IMPORTANT)** On suppose  $u$  diagonalisable et on a  $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ . Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $d_i = \dim(E_{\lambda_i}(u))$  et on appelle  $\mathcal{B}_i$  une base de  $E_{\lambda_i}(u)$ . Comme  $u$  est diagonalisable, alors  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$  et donc  $\mathcal{B}$  obtenue en recollant les  $\mathcal{B}_i$  est une base adaptée à cette décomposition de

$$E. \text{ Dans ce cas, on a } Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p),$$

où chaque  $\lambda_i$  est répété  $d_i$  fois.

**Exemple 4.1.1** 1. Une homothétie  $x \mapsto kx$ , avec  $k$  dans  $\mathbb{K}$  est

2. Soit  $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto M + 2M^T \end{cases}$  Montrer que  $f$  est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.

3. Soient  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$  telle que  $a_{i,j} = 1$  si  $i \neq j$  et  $a_{i,j} = 0$  si  $i = j$ . On pose

$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto M + \text{tr}(M)A \end{cases}.$$

(a) **(CCP 88)** Montrer que  $P = X^2 - 2X + 1$  est un polynôme annulateur de  $u$ .

(b) **(CCP 88)**  $u$  est-elle diagonalisable ?

(c) Préciser  $E_1(u)$  ainsi que sa dimension.

4. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  telle que  $f^2$  soit diagonalisable et  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable.

**Proposition 4.1.2 (Diagonalisabilité des projecteurs et des symétries)** On suppose que  $E = F \oplus G$ , avec  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Soit  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ . Alors  $p$  et  $s$  sont diagonalisables.

*Démonstration :*

**Remarque 4.1.2**  $\chi_p =$   $et \chi_s =$

**Proposition 4.1.3 (CNS de diagonalisation)** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  si et seulement si  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et :  $\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \dim(E_\lambda(u)) =$

*Démonstration :*

**Exemple 4.1.2** 1. Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (2x, y + z, z) \end{cases}$ . Alors  $f$

2. Soit  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \end{cases}$  de l'exemple 3.2.1. Montrer que  $\varphi$  est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.

3. (**CCP 72**) Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On suppose que  $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$  où  $v$  est un vecteur donné de  $E$ .

(a) Donner le rang de  $f$ .

(b)  $f$  est-il diagonalisable ?

**Proposition 4.1.4 (Condition suffisante de diagonalisation)** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $u$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $u$  est diagonalisable.

Dans ce cas :  $\forall \lambda \in Sp(u), \dim(E_\lambda(u)) =$

Autrement dit ceci est valable si  $\chi_u$  est scindé à racines simples.

*Démonstration :*

**Remarque 4.1.3** La réciproque de la proposition précédente est fausse. Par exemple :

**Exemple 4.1.3** 1. Soit  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] & \rightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ P & \mapsto (1 - X^2)P' + nXP \end{cases}$  . Montrer que  $\varphi$  est diagonalisable.

2. Soit  $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$  tel que  $\varphi\psi = \psi\varphi$ . Montrer que  $\varphi$  et  $\psi$  possèdent une base commune de diagonalisation.

**Remarque 4.1.4** Pour cette application la matrice dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Ici il est compliqué de calculer les valeurs propres à partir du polynôme}$$

caractéristique, il faut donc revenir à la définition d'une valeur propre.

## 4.2 Matrices diagonalisables

**Définition 4.2.1 (Matrice diagonalisable)** Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si l'endomorphisme canoniquement associé  $u : X \mapsto AX$  (s'identifiant à un endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$ ) est diagonalisable.

**Proposition 4.2.1 (Caractérisation de la diagonalisabilité)** Une matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale (c'est-à-dire qu'il existe  $P$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$  tel que  $A = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale).

Dans ce cas, si  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , alors  $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ .

*Démonstration* : Soit  $u$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . Ainsi  $u$  est diagonalisable si et seulement si il existe une base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{K}^n$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$  soit diagonale, ce qui équivaut à l'existence d'une matrice de passage  $P$  (qui est inversible) telle que  $A = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale.

Dans ce cas  $A$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , sont semblables et donc :  $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ .

**Remarque 4.2.1** 1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Soit  $u$  dans  $\mathcal{L}(E)$ .

$u$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  l'est, grâce à la proposition 4.2.1.

En effet si  $u$  est diagonalisable, alors il existe une base  $\mathcal{B}'$  de diagonalisation de  $u$ . Si on pose  $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P.\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u).P^{-1}$  et donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est semblable à une matrice diagonale.

Si on suppose qu'il existe  $P$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale, alors les colonnes de  $P$  correspondent aux coordonnées des vecteurs d'une famille de vecteurs  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Comme  $P$  est inversible, alors  $\mathcal{B}'$  est une base et donc  $P$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . De plus  $D = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}.\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u).P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ . Ainsi  $\mathcal{B}'$  est une base de diagonalisation de  $u$ .

2. **IMPORTANT** Si  $A$  est diagonalisable avec  $Sp(A) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  où les valeurs propres sont répétées selon leurs multiplicités, alors pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ ,  $A^k$  est diagonalisable et  $Sp(A^k) =$  et  $\text{tr}(A^k) =$  . En effet :



**Exemple 4.2.1** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonalisable telle que  $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  avec :

$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, |\lambda_i| < |\lambda_n|$ . Montrer que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\text{tr}(A^{p+1})}{\text{tr}(A^p)} = \lambda_n$ .

Ainsi en calculant  $\frac{\text{tr}(A^{p+1})}{\text{tr}(A^p)}$  pour une grande valeur de  $p$ , on a donc une valeur approchée de  $\lambda_n$ . Ceci est une méthode que l'on utilise en informatique pour approcher la valeur propre de plus grand module.

Il découle du paragraphe précédent en utilisant le lien entre matrice et application linéaire :

**Proposition 4.2.2 (Diagonalisabilité des matrices)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les propositions suivantes sont équivalentes.

1.  $A$  est diagonalisable.
2.  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A)$ .
3.  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et :  $\forall \lambda \in Sp(A), \dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$ .
4.  $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$ .

Dans ce cas si  $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  et si pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $\mathcal{B}_i$  une base de  $E_{\lambda_i}(A)$  et  $\mathcal{B}$  la base obtenue en juxtaposant les  $\mathcal{B}_i$  et  $P$  la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  à  $\mathcal{B}$ ,

alors  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p)$ , où

chaque  $\lambda_i$  est répété  $d_i$  fois avec  $d_i = \dim(E_{\lambda_i}(A))$ .

On a aussi :  $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$ .

**Exemple 4.2.2** 1. Soit  $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Sans calcul du polynôme caractéristique, étudier la diagonalisabilité de  $J$ , donner le sous-espace propre associé à la valeur propre non nulle.

2. Soit  $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $B$  soit diagonalisable.

3. (**CCP 59**) Soit  $E = \mathbb{K}_n[X]$ , avec  $n \geq 2$  et soit  $f$  définie par  $\forall P \in E, f(P) = P - P'$ .  
 (a) En utilisant la matrice de  $f$ , montrer que  $f$  est bijective.  
 (b)  $f$  est-il diagonalisable ?

**Remarque 4.2.2** Si  $A$  est à coefficients réels et diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , alors elle l'est aussi sur  $\mathbb{C}$ , car on peut écrire  $A = PDP^{-1}$  avec  $P$  et  $D$  réelles que l'on peut donc considérer à coefficients complexes.

**Proposition 4.2.3 (Condition suffisante de diagonalisation)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Si  $A$  admet  $n$  valeurs propres distinctes (c'est-à-dire  $\chi_A$  est scindé à racines simples), alors  $A$  est diagonalisable.

Dans ce cas :  $\forall \lambda \in Sp(A), \dim(E_\lambda(A)) = 1$ .

*Démonstration :* Découle du lien entre application linéaire et matrice.

**Exemple 4.2.3** 1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable ?

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et on pose  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto XP'' + (1-X)P' \end{cases}$ .

(a) Montrer que  $f$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Montrer que pour tout  $k$  de  $[[0, n]]$ , il existe un unique polynôme  $P_k$  de coefficient dominant un tel que  $f(P_k) = -kP_k$ .

(c) Montrer que le degré de  $P_k$  est  $k$ .

3. (**CCP 67**) Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ , avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .  $M$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?

Et dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  ?

**Théorème 4.2.1 (Théorème spectral)** Soit  $A$  une matrice symétrique réelle. Alors  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration* : Attendre un peu...

**Exemple 4.2.4** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & (0) & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$  de taille  $n \times n$ , avec  $n \geq 3$ .

1. Montrer que la matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer  $Sp(A)$  et son sous-espace propre associé à la valeur propre strictement positive.
3. Déterminer un polynôme annulateur de  $A$  et retrouver ses valeurs propres avec leur multiplicité.

**Remarque 4.2.3** Le résultat précédent est faux sur  $\mathbb{C}$ . Contrexemple :  $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  :

### 4.3 Méthode pratique pour diagonaliser une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Calculer  $\chi_A$  et le mettre sous forme factorisé (essayer d'utiliser dans un premier temps des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour faire apparaître des zéros (selon l'algorithme du pivot de Gauss par exemple)).

Ensuite on peut effectuer un développement selon une ligne ou une colonne.

2. Si le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors  $A$  n'est pas diagonalisable.  
Si  $\chi_A$  est scindé, identifier les racines de  $\chi_A$  et leurs multiplicités. Ceci nous permet d'obtenir  $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ .

3. Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , chercher  $E_{\lambda_i}(A)$ , en déterminer la dimension et une base. Pour cela il faudra résoudre le système  $AX = \lambda_i X$  ou  $(\lambda_i I_n - A)X = 0$  avec  $X$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Si on pose

$$A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ on doit résoudre le système } \begin{cases} (\lambda_i - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n = 0 \\ -a_{21}x_1 + (\lambda_i - a_{22})x_2 - \dots - a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots + (\lambda_i - a_{nn})x_n = 0 \end{cases}$$

Si on a :  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_{\lambda_i}$ , alors  $A$  est diagonalisable.

Dans ce cas on peut poursuivre.

4. Si pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $\mathcal{B}_i$  une base de  $E_{\lambda_i}(A)$  et  $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p)$ , alors  $\mathcal{B}'$  est une base de diagonalisation de  $A$ .
5. Soit  $P$  la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  à  $\mathcal{B}'$ . Alors on a :  $A = PDP^{-1}$  ou

$$P^{-1}AP = D, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p),$$

où chaque  $\lambda_i$  est répété  $d_i$  fois avec  $d_i = \dim(E_{\lambda_i}(A))$  et les  $\lambda_i$  apparaissent dans le même ordre que les vecteurs propres correspondants à  $\mathcal{B}'$ .

6. Si besoin, déterminer  $P^{-1}$  à l'aide de la méthode du pivot pour une matrice de petite taille ( $2 \times 2$  ou  $3 \times 3$ ) ou sinon pour une matrice  $n \times n$  passer par la résolution d'un système linéaire  $PX = Y$ . Cette dernière étape n'est pas nécessairement à faire, cela dépend de ce que l'on vous demande.

**Exemple 4.3.1** *Diagonaliser :*

1.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

2.  $C = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$  et  $Q(C)$ , avec  $Q$  dans  $\mathbb{K}[X]$ .

3. Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

(a) (**CCP 73**) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ .

(b) (**CCP 73**) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ . En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec  $A$  est  $\text{vect}(I_2, A)$ .

(c) Déterminer la matrice  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $-4X^2 - 7X = A$ .

(d) Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonalisable et on pose  $C = \begin{pmatrix} 2B & B \\ 4B & -B \end{pmatrix}$ . Montrer que  $C$  est diagonalisable.

## 4.4 Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

- Proposition 4.4.1 (Diagonalisabilité et polynôme minimal)**
- Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et toutes ses racines sont simples.
  - Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  si et seulement si son polynôme minimal est scindé et toutes ses racines sont simples.

*Démonstration :*



**Remarque 4.4.1** Plus précisément  $u$  est diagonalisable si et seulement si

$\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$  est le polynôme minimal de  $u$ , grâce au premier point de la preuve précédente.

**Corollaire 4.4.1 (Diagonalisabilité et polynôme scindé à racines simples)** • Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est diagonalisable si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

*Démonstration :* Traitons le premier point. Soit  $P$  un polynôme annulateur de  $u$  scindé à racines simples sur  $\mathbb{K}$ . Alors le polynôme minimal de  $u$ ,  $\mu_u$ , divise  $P$ , car  $P$  est dans l'idéal annulateur de  $u$ . Par unicité de la décomposition en produit de polynômes irréductibles,  $\mu_u$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{K}$  et on conclut grâce à la proposition précédente.

**Exemple 4.4.1** 1. (**CCP 88**) Soient  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$  telle que  $a_{i,j} = 1$  si  $i \neq j$  et  $a_{i,j} = 0$  si  $i = j$ . On pose  $u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto M + \text{tr}(M)A \end{cases}$ . On rappelle que  $X^2 - 2X + 1$  est un polynôme annulateur de  $u$ . Montrer que  $u$  n'est pas diagonalisable. Quel est son polynôme minimal ?

2. Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et l'endomorphisme  $f : M \mapsto AM$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  l'est.

3. Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $GL_n(\mathbb{C})$ . Montrer que toutes matrices de  $G$  sont diagonalisables.

4. Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on pose  $C = \begin{pmatrix} 2B & B \\ 4B & -B \end{pmatrix}$ . On suppose que  $C$  est diagonalisable. Montrer que  $B$  l'est aussi.

5. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , puis déterminer ses sous-espaces propres.

**Corollaire 4.4.2 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit)** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . On note  $\tilde{u}$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ . Si  $u$  est diagonalisable, alors  $\tilde{u}$  aussi.

*Démonstration :*

**Exemple 4.4.2** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u$  et  $v$  deux endomorphismes diagonalisables tels que  $uv = vu$ . Montrer que  $u$  et  $v$  diagonalisent dans une même base.

## 4.5 Récapitulatif des méthodes pour montrer la diagonalisabilité

**Exemple 4.5.1 (CCP 68)** Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  est diagonalisable de quatre manières :

1. sans calcul,
2. en déterminant  $\chi_A$  et les sous-espaces propres,
3. en calculant  $A^2$ ,
4. en utilisant le rang (méthode un peu spécifique).

1.  $A$  est symétrique réelle.
2. On trouve  $\chi_A = X^2(X - 3)$ . On trouve :

- $E_3(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ , donc  $\dim(E_3(A)) = 1$ .

- $E_0(A)$  est défini par l'équation :  $x - y + z = 0$ , qui est un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$ , donc :  $\dim(E_0(A)) = 2$ .

On a donc  $\dim(E_3(A)) + \dim(E_0(A)) = 3$ .

3. On trouve que  $A^2 = 3A$  soit  $A(A - 3I_3) = 0$ . Ainsi  $X(X - 3)$  est un polynôme annulateur de  $A$  scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$ .

4. Toutes les colonnes de  $A$  sont colinéaires à  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , donc  $\text{rg}(A) = 1$ . Or :

$\dim(E_0(A)) = \dim(\text{Ker}(A)) = 3 - \text{rg}(A) = 2$ , grâce au théorème du rang. Ainsi on a :  $m_0 \geq 2$ , donc les valeurs propres complexes de  $A$  répétées selon leur multiplicité sont :  $0, 0, \lambda$ . Ainsi :  $\text{tr}(A) = 0 + 0 + \lambda = \lambda$  et comme  $\text{tr}(A) = 3$ , alors  $\lambda = 3$ . Ainsi 3 est une valeur propre de  $A$  de multiplicité un. Or on a :  $1 \leq \dim(E_3(A)) \leq m_3 = 1$ , donc  $\dim(E_3(A)) = 1$ . Ainsi  $\dim(E_3(A)) + \dim(E_0(A)) = 1 + 2 = 3$ .

## 4.6 Calcul de la puissance d'une matrice et applications

**Remarque 4.6.1 IMPORTANTE** : Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $A = PDP^{-1}$ , avec  $P$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$ , alors :  $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P D^k P^{-1}$ . Ainsi si  $D$  est diagonale, le calcul de  $A^k$  est assez simple.

**Exemple 4.6.1** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^k$  pour  $k$  dans  $\mathbb{N}$ .

Dans le deuxième exemple de 4.3.1, pour  $a = 0$  et  $b = 1/2$ , nous avons diagonalisé une telle matrice,

avec  $A = PDP^{-1}$ , avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^k & 0 \\ 0 & 0 & 1/2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{2^k} & 1 - \frac{1}{2^k} & 1 - \frac{1}{2^k} \\ 1 - \frac{1}{2^k} & 1 + \frac{2}{2^k} & 1 - \frac{1}{2^k} \\ 1 - \frac{1}{2^k} & 1 - \frac{1}{2^k} & 1 + \frac{2}{2^k} \end{pmatrix}.$$

(méthode du CCP 101) Application de ceci : déterminer toutes les suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} &= \frac{b_n + c_n}{2} \\ b_{n+1} &= \frac{a_n + c_n}{2} \\ c_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}, \text{ avec } a_0 = 1, b_0 = 0 \text{ et } c_0 = 0.$$

(méthode du CCP 101) Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau  $A, B$  et  $C$ . À l'instant  $t = 0$ , il se trouve au point  $A$ . Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On note  $A_n$  l'événement « l'animal est en  $A$  après son  $n$ -ième trajet ».

On note  $B_n$  l'événement « l'animal est en  $B$  après son  $n$ -ième trajet ».

On note  $C_n$  l'événement « l'animal est en  $C$  après son  $n$ -ième trajet ».

On pose  $P(A_n) = a_n, P(B_n) = b_n$  et  $P(C_n) = c_n$ . Déterminer  $\lim a_n, \lim b_n$  et  $\lim c_n$  puis interpréter.

## 5 Théorème de Cayley-Hamilton

Dans cette section  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Théorème 5.0.1 (Cayley-Hamilton)** • *Le polynôme caractéristique de  $u$  annule  $u$ . Autrement dit :*

$$\chi_u(u) = 0.$$

• *Le polynôme caractéristique de  $A$  annule  $A$ . Autrement dit :  $\chi_A(A) = 0$ .*

*Démonstration :* (Hors programme)

Notons  $n = \dim(E)$  et prouvons que  $\chi_u(u)(x) = 0_E$  pour tout  $x \in E$ . Si  $x$  est nul alors l'égalité est claire.

Supposons désormais  $x \neq 0_E$ , de sorte que  $(x)$  soit une famille libre. Considérons

$$\nu = \min \{k \geq 2 / (x, u(x), \dots, u^k(x)) \text{ liée}\}.$$

Par construction  $u^\nu(x)$  est dans  $\text{vect}(x, u(x), \dots, u^{\nu-1}(x))$ , donc  $u^\nu(x)$  se décompose en

$$u^\nu(x) = a_0x + a_1u(x) + \dots + a_{\nu-1}u^{\nu-1}(x).$$

Complétons la famille  $(x, u(x), \dots, u^{\nu-1}(x))$  en une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , dans laquelle la matrice de  $u$  est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 & * \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & a_{\nu-2} & \vdots \\ & & & 1 & a_{\nu-1} & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P) & *_{\nu, n-\nu} \\ 0_{n-\nu, \nu} & M \end{pmatrix}$$

où  $P(X) = X^\nu - a_{\nu-1}X^{\nu-1} - \dots - a_1X - a_0$ . Constatons que  $P(u)(x) = 0_E$ . Grâce à l'exemple 3.1.2, on a :  $\chi_{\mathcal{C}(P)} = P$ . On remarque alors que :  $\chi_u = \chi_{\mathcal{C}(P)} \times \chi_M$  puis en évaluant en  $u$

$$\chi_u(u) = \chi_M(u) \circ \chi_{\mathcal{C}(P)}(u)$$

et enfin en appliquant à  $x$  :

$$\chi_u(u)(x) = \chi_M(u)(\chi_{\mathcal{C}(P)}(u)(x)) = \chi_M(u)(0_E) = 0_E.$$

- Remarque 5.0.1**
1. (**IMPORTANT**) Le polynôme minimal  $\mu_u$  divise le polynôme caractéristique  $\chi_u : \mu_u | \chi_u$ , car ce dernier est un polynôme annulateur.
  2. (**IMPORTANT**) Le point précédent nous permet de dire que  $d^\circ(\mu_u) \leq d^\circ(\chi_u) = n$ .
  3. Le polynôme minimal est à chercher parmi les diviseurs du polynôme caractéristique.

- Exemple 5.0.1**
1. (**CCP 65**) Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $\chi_A$ , puis en déduire que  $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

2. (**CCP 91**) Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Nous montrerons plus tard que  $\chi_A = (X-1)^3$ . Déterminer son polynôme minimal.

3. À l'aide des exemples 3.2.2 et 4.1.2, déterminer les plans stables de  $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (2x, y+z, z) \end{cases}$ .  
On peut montrer que  $\chi_u = (X-1)^2(X-2)$  et que  $E_1(u) = \text{vect}(0, 1, 0)$  et  $E_2(u) = \text{vect}(1, 0, 0)$ .

4. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , avec  $n \geq 2$  telle que  $A^n = I_n$  et  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$  soit une famille libre.
- (a) Montrer que  $\chi_A = X^n - 1$ .
- (b) Déterminer  $\text{tr}(A)$  et  $\det(A)$ .

**Corollaire 5.0.1 (Racine de  $\mu_u$  ou  $\mu_A$ )** Les racines de  $\mu_u$  (respectivement  $\mu_A$ ) dans  $\mathbb{K}$  sont exactement les valeurs propres de  $u$  (respectivement  $A$ ).

*Démonstration :* Comme  $\mu_u | \chi_u$ , grâce à la remarque 5.0.1, alors les racines de  $\mu_u$  sont incluse dans celles de  $\chi_u$  qui sont exactement les éléments de  $Sp(u)$ .

D'autre part  $Sp(u)$  est inclus dans l'ensemble des racines de  $\mu_u$ , car  $\mu_u$  est un polynôme annulateur de  $u$ . On a la même démonstration pour  $A$ .

**Exemple 5.0.2** Soit  $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (2x, y + z, z) \end{cases}$  de l'exemple précédent. Déterminer  $\mu_u$ .

## 6 Trigonalisation

### 6.1 Endomorphismes et matrices trigonalisables

Dans ce paragraphe, on suppose que  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

**Définition 6.1.1 (Endomorphismes et matrices trigonalisables)** 1. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est trigonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  soit triangulaire supérieure.

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire

supérieure. Autrement dit s'il existe  $P$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\text{ou } A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

**Remarque 6.1.1** 1. Tout endomorphisme (respectivement matrice) diagonalisable est trigonalisable.  
 2. Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ . Alors  $A$  est trigonalisable si et seulement si  $u$  est trigonalisable.  
 Ceci reprend la même preuve que la remarque 4.2.1.

**Proposition 6.1.1 (Trigonalisabilité d'une matrice et endomorphisme canoniquement associé)** Une matrice  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé l'est.

*Démonstration :* Cela découle de la remarque précédente, en prenant pour  $\mathcal{B}$ , la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  et pour  $u$ , l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

**Théorème 6.1.1** 1. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $u$  est trigonalisable sur  $\mathbb{K}$  ;
- $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  ;
- Il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  scindé sur  $\mathbb{K}$  tel que  $P(u) = 0$  ;
- $\mu_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $A$  est trigonalisable sur  $\mathbb{K}$  ;
- $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  ;
- Il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  scindé sur  $\mathbb{K}$  tel que  $P(A) = 0$  ;
- $\mu_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

*Démonstration :* On suppose  $u$  trigonalisable. Ainsi il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et donc } \chi_u = \begin{vmatrix} X - \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & X - \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X - \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \text{ qui est}$$

scindé sur  $\mathbb{K}$ .

Le cas matriciel découle directement du deuxième point de la remarque précédente.

Le deuxième point implique le troisième point, grâce au théorème de Cayley-Hamilton.

Nous allons prouver par récurrence sur la dimension de  $E$  ou sur la taille de la matrice que le troisième point implique la trigonalisabilité.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on pose  $\mathcal{P}(n)$  : pour tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  et pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , s'il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  qui annule  $u$ , alors  $u$  est trigonalisable et pour tout  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , s'il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  qui annule  $A$ , alors  $A$  est trigonalisable.

$\mathcal{P}(1)$  est claire car toute matrice de taille  $1 \times 1$  est triangulaire supérieure.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on suppose  $\mathcal{P}(n)$ .

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n + 1$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel qu'il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  qui annule  $u$ .

On a donc  $\mu_u | P$ , puis  $\mu_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et possède donc au moins une racine dans  $\mathbb{K}$ . Par ailleurs, on a :  $\mu_u | \chi_u$ , donc  $\chi_u$  admet au moins une racine sur  $\mathbb{K}$  que l'on note  $\lambda_1$ .

Ainsi  $\lambda_1$  est une valeur propre de  $u$  et donc il existe un vecteur  $e_1$  de  $E$  non nul tel que :  $u(e_1) = \lambda_1 e_1$ . Le vecteur  $e_1$  étant non nul, alors la famille  $(e_1)$  est libre et donc on peut la compléter en une base

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$  de  $E$ . Ainsi on a :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$ , avec  $L$  dans  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$  et  $M_1$  dans

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On pose  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  et donc  $0 = P(A) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & L' \\ 0 & P(M_1) \end{pmatrix}$  et donc  $P(M_1) = 0$ . Grâce à  $\mathcal{P}(n)$  il existe donc  $R$  dans  $GL_n(\mathbb{R})$  tel que  $R^{-1}M_1R = T$  avec  $T$  dans  $T_n^+(\mathbb{K})$ .

On pose  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ . La matrice  $Q$  est inversible et  $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$  (vu dans le chapitre 2). On a donc :  $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & LR \\ 0 & R^{-1}M_1R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & LR \\ 0 & T \end{pmatrix}$ .

Ainsi  $A$  est trigonalisable et par suite  $u$  aussi grâce au deuxième point de la remarque précédente.

Si  $A$  dans  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$  a son polynôme caractéristique scindé, alors l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^{n+1}$  canoniquement associé aussi, donc grâce à ce que l'on vient de démontrer pour la dimension  $n + 1$ ,  $u$  est aussi trigonalisable, puis  $A$  aussi toujours grâce au deuxième point de la remarque précédente. Ceci donne  $\mathcal{P}(n + 1)$ , ce qui achève la récurrence.

Les trois premiers points sont ainsi équivalents.

Si  $\chi_u$  ou  $\chi_A$  sont scindés sur  $\mathbb{K}$ , alors  $\mu_u$  ou  $\mu_A$  respectivement le sont aussi, car  $\mu_u | \chi_u$  et  $\mu_A | \chi_A$ . Ainsi le deuxième point implique le quatrième point.

Enfin le quatrième point implique le troisième, car le polynôme minimal est aussi un polynôme annulateur.

**Remarque 6.1.2** 1. (IMPORTANT) Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

2. (IMPORTANT) Tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est trigonalisable.

3. Si on considère une matrice réelle comme une matrice complexe, alors on peut la trigonaliser dans  $\mathbb{C}$ . Mais attention la matrice de passage et la matrice triangulaire semblable à la matrice de départ sont à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

**Exemple 6.1.1** 1. Soit  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  non diagonalisable. Montrer qu'il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$  et  $P \in GL_2(\mathbb{C})$  tels que  $B = P \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres répétées selon leur multiplicité. Soit

$$Q = \sum_{k=0}^d a_k X^k. \text{ Déterminer } Sp(Q(A)) \text{ et } \det(Q(A)).$$



3. Soient  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$  telle que  $a_{i,j} = 1$  si  $i \neq j$  et  $a_{i,j} = 0$  si  $i = j$ . On pose
- $$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto M + \text{tr}(M)A \end{cases} . \text{ Trigonaliser } u.$$

## 6.2 Étude pratique d'une trigonalisation

Pour trigonaliser une matrice, vous serez toujours guidés. Travaillons sur un exemple.

**Exemple 6.2.1** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . On pose  $B = A - I_3$ .

1. (**CCP 91**) Montrer que  $A$  n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. (**CCP 91**)  $A$  est-elle inversible ? diagonalisable ?
3. Est-elle trigonalisable sur  $\mathbb{R}$  ?
4. Déterminer un vecteur qui ne soit pas dans  $\text{Ker}(B)$ .
5. En déduire qu'il existe  $P$  dans  $GL_3(\mathbb{R})$  tel que  $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ .
6. Calculer  $A^k$  pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ .

### 6.3 Réduction des endomorphismes et des matrices nilpotents

**Proposition 6.3.1 (Caractérisation des endomorphismes/matrices nilpotentes)**      • *A est nilpotent si et seulement si elle est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.*

- *u est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.*

*Démonstration :*

-

- Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et on pose  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ . Comme  $u$  est nilpotente si et seulement si  $A$  l'est et on peut conclure grâce au point précédent.

**Remarque 6.3.1** (*IMPORTANTE*) Une matrice  $A$  non nulle nilpotente n'est pas diagonalisable. On a le même résultat pour les endomorphismes nilpotents non nuls.

**Proposition 6.3.2 (Nilpotence et polynôme caractéristique)** Un endomorphisme ou une matrice sont nilpotents si et seulement si leur polynôme caractéristique est  $X^n$ .

*Démonstration* : En effet être trigonalisable et avoir seulement 0 comme valeur propre signifie, grâce à la preuve de la proposition précédente, que le polynôme caractéristique est scindé avec uniquement 0 comme racine.

**Exemple 6.3.1** 1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  nilpotente. Déterminer  $\det(I_n + A)$ .

2. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que si  $M$  et  $2M$  sont semblables, alors  $M$  est nilpotente.

3. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}(A^k) = 0$ . Montrer que  $A$  est nilpotente.

## 6.4 Sous-espaces caractéristiques

Dans ce paragraphe, on suppose que  $\chi_u$  et  $\chi_A$  sont scindés sur  $\mathbb{K}$ , avec  $\chi_u = \chi_A = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{m_i}$ .

**Définition 6.4.1 (Sous-espaces caractéristiques)** On appelle sous-espaces caractéristiques de  $u$  (respectivement  $A$ ) les sous-espaces

$$F_{\lambda_i}(u) = \text{Ker}((u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i}) \text{ (respectivement } F_{\lambda_i}(A) = \text{Ker}((A - \lambda_i I_n)^{m_i}), \text{ pour } i \text{ dans } \llbracket 1, k \rrbracket.$$

**Remarque 6.4.1** 1. On a :  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, E_{\lambda_i}(u) = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E) \subset \text{Ker}((u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i}) = F_{\lambda_i}(u)$ .  
2. Pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , le sous-espace  $F_{\lambda_i}(u)$  est stable par  $u$  :

**Exemple 6.4.1** Avec les notations précédentes, on pose  $Q_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (X - \lambda_i)^{m_i}$ , pour  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Montrer que  $F_{\lambda_j}(u) = \text{Im}(Q_j(u))$ .

**Proposition 6.4.1 (Somme des sous-espaces caractéristiques)** On a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^k F_{\lambda_i}(u) \text{ et } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^k F_{\lambda_i}(A).$$

*Démonstration* : Grâce au théorème de Cayley-Hamilton, on a  $0 = \chi_u(u) = \prod_{i=1}^k (u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i}$ . Grâce au lemme des noyaux, on a :  $E = \text{Ker}(0) = \text{Ker}\left(\prod_{i=1}^k (u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i}\right) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}((u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i})$ .  
Idem pour la matrice  $A$ .

**Proposition 6.4.2 (Dimension des sous-espaces caractéristiques)** On a :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \dim(F_{\lambda_i}(u)) = m_i \text{ et } \dim(F_{\lambda_i}(A)) = m_i.$$

*Démonstration* : Pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , notons  $u_i = u|_{F_{\lambda_i}(u)}$  l'endomorphisme de  $F_{\lambda_i}(u) = \text{Ker}((\lambda_i \text{Id}_E - u)^{m_i})$  induit par  $u$  (cela est possible, car dans la remarque précédente, nous avons vu que  $u$  laisse stable  $F_{\lambda_i}(u)$ ).

Par construction  $v_i = (\lambda_i \text{Id}_E - u)|_{\text{Ker}((\lambda_i \text{Id}_E - u)^{m_i})}$  est un endomorphisme nilpotent de  $F_{\lambda_i}(u)$ , car  $v_i^{m_i} = 0$ . On note  $\dim(\text{Ker}((u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i})) = \dim(F_{\lambda_i}(u)) = n_i$ . Alors le polynôme caractéristique de

$v_i$  est  $X^{n_i}$  et donc celui de  $u_i$  est

$$\det(XId_{F_{\lambda_i}(u)} - u_i) = \det((X - \lambda_i)Id_{F_{\lambda_i}(u)} - v_i) = \chi_{v_i}(X - \lambda_i) = (X - \lambda)^{n_i}.$$

Or  $\chi_{u_i}$  divise  $\chi_u$ , donc  $n_i \leq m_i$ . En outre, d'après la proposition précédente, on a  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ . Si l'une

des inégalités  $n_i \leq m_i$  était stricte, alors on aurait  $n < \sum_{i=1}^k m_i = d^\circ(\chi_u) = n$ , ce qui serait absurde.

Par conséquent  $n_i = m_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ .

**Exemple 6.4.2 (Décomposition de Dunford)** *On veut montrer qu'il existe un unique couple  $(d, n)$  dans  $(\mathcal{L}(E))^2$  tel que  $dn = nd$ ,  $u = d + n$ , avec  $d$  diagonalisable et  $n$  nilpotente.*

1. (a) *Soit  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  et  $u_i$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F_{\lambda_i}(u) = F_i$ . Montrer qu'il existe un endomorphisme  $n_i$  de  $F_i$  nilpotent, tel que  $u_i = d_i + n_i$ , avec  $d_i = \lambda_i Id_{F_i}$ .*  
(b) *En déduire l'existence d'un couple  $(d, n)$ .*
2. *Soit  $(d', n')$  dans  $(\mathcal{L}(E))^2$  tel que  $d'n' = n'd'$ ,  $u = d' + n'$ , avec  $d'$  diagonalisable et  $n'$  nilpotente.*
  - (a) *Montrer que  $d'$  laisse stable les  $F_i$ , pour  $i$  dans  $\llbracket 1, k \rrbracket$ .*
  - (b) *Montrer que  $d - d'$  est diagonalisable.*
  - (c) *Montrer l'unicité du couple  $(d, n)$ .*

**Proposition 6.4.3 (Décomposition d'une matrice ou d'un endomorphisme lorsque  $\chi_u$  ou  $\chi_A$  est scindé)**

- Il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que  $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_k \end{pmatrix}$ , avec pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, k \rrbracket$ , la matrice

$$T_i \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

- Alors  $A$  est semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_k \end{pmatrix}$ , avec pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, k \rrbracket$ , la

$$\text{matrice } T_i \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

*Démonstration :*

- On reprend la démonstration et les notations de la décomposition de Dunford. Soit  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . On a :  $u_i = \lambda_i Id_{F_{\lambda_i}(u)} + n_i$ , avec  $n_i$  nilpotente. Comme  $n_i$  est nilpotente, donc il est trigonalisable.

Soit  $\mathcal{C}_i$  une base de  $F_{\lambda_i}(u)$  telle que  $Mat_{\mathcal{C}_i}(n_i) = \begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$  (le spectre étant réduit à

$\{0\}$ ). On a donc  $Mat_{\mathcal{C}_i}(u_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}$ . Ainsi  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k)$  est une base adaptée à

$E = \bigoplus_{i=1}^k F_{\lambda_i}(u)$  dans laquelle la matrice de  $u$  est  $\begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_k \end{pmatrix}$ , avec pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, k \rrbracket$ , la

matrice  $T_i$  est de la forme  $\begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}$ .

- Soit  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . Sa matrice dans la base canonique est  $A$ . Grâce au premier point, il existe une base dans laquelle la matrice de  $u$  soit de la forme voulue et donc  $A$  est semblable à cette matrice.