Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et A est une partie non vide de E. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f désignent des fonctions définies sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$.
I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Suites de fonctions

1.1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

1.1.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 1.1.1 (Convergence simple) *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si*

$$\forall x\in A,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x).$$

On dit alors que la fonction f est la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.1.1

1. *Soit $n\in\mathbb{N}$ et on pose $f_n : \begin{cases} [0;1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n \end{cases}$. Quelle est la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Faire un dessin.*

2. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et on pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \end{cases}$. Quelle est la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?*

3. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et on pose $f_n : \begin{cases} [1,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}} \end{cases}$. Quelle est la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?*

4. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et on pose $f_n(x)=\begin{cases} n^3x & si\quad |x|\le 1/n \\ 1/x & si\quad |x|>1/n \end{cases}$. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.*

5. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur un intervalle I telle que chaque fonction f_n soit croissante. Alors f est croissante.*

De même si toutes les fonctions f_n sont positives (respectivement T-périodiques, convexes,...), alors f est positive (respectivement T-périodique, convexes,...). Comme dans l'exemple précédent, on revient à la définition de ces notions et on passe à la limite.

Remarque 1.1.1 1. *Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur un intervalle I qui converge vers f. Que peut-on dire de la continuité de f sur I ?*

2. *Si (f_n) est une suite de fonctions intégrables sur un intervalle I qui converge vers f. Que peut-on dire de l'intégrabilité de f sur I ?*

Pour que la continuité et l'intégrabilité soient conservées, nous avons besoin de modes de convergence plus forts, ce que nous allons exposer dans les paragraphes suivants.

1.1.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Rappelons d'abord un résulat que nous avons vu au chapitre précédent.

Proposition 1.1.1 (Norme uniforme) *Soit $\mathcal{B}(A,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées sur A. Pour tout f de $\mathcal{B}(A,\mathbb{K})$, on pose*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A}|f(x)|.$$

Alors $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{B}(A,\mathbb{K})$.

Définition 1.1.2 (Convergence uniforme) 1. ***(Énoncé CCP 9)*** *On dit que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si :*

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N \Rightarrow (\forall x\in A,\ |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon).$$

2. *On peut reformuler cette définition de façon plus pratique. La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si : à partir d'un certain rang, les fonctions $f_n - f$ sont bornées et : $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0$.*

Remarque 1.1.2 1. *Dans la pratique, on utilise plutôt la deuxième définition.*

2. *Si (f_n) converge uniformément vers f, alors lorsque n est grand, la fonction f_n est donc une approximation de f à ε près en tout point : $\forall n\geq N, \forall x\in A,\ |f(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon$.*

Proposition 1.1.2 (La convergence uniforme implique la convergence simple) *Si (f_n) converge uniformément vers f, alors (f_n) converge simplement vers f.*

Démonstration :

Remarque 1.1.3 *1. IMPORTANTE : en pratique pour montrer que (f_n) converge uniformément, d'abord on cherche l'éventuelle limite f à l'aide de la convergence simple, puis on essaye de trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 telle que : $\forall x \in A,\ |f(x) - f_n(x)| \leq \alpha_n$. Il est très important de vérifier que α_n ne dépend que de n et plus de x.*
En effet dans ce cas pour n fixé, $\{|f(x) - f_n(x)|,\ x \in A\}$ est un ensemble majoré par α_n. Or la borne supérieure est le plus petit des majorants, donc : $\sup\{|f(x) - f_n(x)|,\ x \in A\} \leq \alpha_n$ et donc $\|f - f_n\|_\infty \leq \alpha_n$. Ainsi, quand on fait tendre n vers $+\infty$, on retrouve bien le fait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

2. Pour n fixé, pour trouver la majoration par α_n du point précédent, on peut soit majorer pour chaque x à la main la quantité $|f(x) - f_n(x)|$, soit effectuer une étude de la fonction $x \mapsto f(x) - f_n(x)$ pour trouver ses variations et ensuite majorer $|f - f_n|$ sur A.

Exemple 1.1.2 *Étude de la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) définies par*

1. ***(CCP 10)*** $f_n : \left\{\begin{array}{lll} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \end{array}\right.$.

2. $f_n : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-nx} \end{array}\right.$.

3. $f_n : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}\right.$.

Remarque 1.1.4 ***(CCP 11)*** *Pour montrer qu'une suite (f_n) ne converge pas uniformément vers une fonction f, il suffit de montrer que $\|f - f_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*
Il suffit de trouver une suite (x_n) telle que $(f(x_n) - f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Exemple 1.1.3 ***(CCP 9)*** *On pose* $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$*, pour* $n \in \mathbb{N}$*.*

1. *Étudier la convergence simple de la suite de fonctions* (f_n)*.*
2. *A-t-on convergence uniforme sur* $\mathbb{R}_+^*$ *?*

Remarque 1.1.5

1. *La convergence uniforme est donc plus forte que la convergence simple. Il faudra donc toujours préciser le mode de convergence pour une suite de fonctions.*
2. *ATTENTION la convergence simple n'implique pas la convergence uniforme, comme le montre l'exemple précédent.*

1.1.3 Approximation uniforme

Dans ce paragraphe nous notons $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On rappelle la définition suivante :

Définition 1.1.3 (Fonction en escalier) *On dit que* f *est en escalier s'il existe une suite finie strictement croissante* $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ *:* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$*, telle que* f *soit constante sur chaque intervalle ouvert* $]x_i, x_{i+1}[$ *(les valeurs prises par* f *aux points* x_i *n'ont pas d'importance).*
Une telle suite est appelée subdivision de $[a,b]$ *adaptée à la fonction en escalier* f*.*
On note $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ *l'ensemble des fonctions en escalier définies sur* $[a,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{K}$*.*

Théorème 1.1.1 ($\mathcal{E}(\lceil a,b\rfloor,\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{CM}(\lceil a,b\rfloor,\mathbb{K})$) *Toute fonction continue par morceaux sur* $[a,b]$ *est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur* $[a,b]$*.*

Démonstration : Commençons par montrer que $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Le segment $[a,b]$ étant compact, f est uniformément continue sur $[a,b]$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, l'inégalité $|x-y| \leq \alpha$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Prenons une subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $|x_{i+1} - x_i| = \alpha$ et définissons la fonction en escalier φ par : $\begin{cases} \forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}[, \quad \varphi(x) = f(x_i), \\ \varphi(b) = f(b). \end{cases}$.
Ainsi quel que soit $x \in [a,b]$, on a : $|\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire : $\|\varphi - f\|_\infty \leq \varepsilon$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $\varepsilon = 1/n$, il existe une fonction en escalier φ_n telle que $\|\varphi_n - f\|_\infty \leq \dfrac{1}{n}$. Ainsi la suite (φ_n) converge uniformément vers f, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi_n - f\|_\infty = 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Soit $\sigma = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fonction f. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$. On appelle f_i cette fonction prolongée. Il existe donc une fonction en escalier φ_i telle que :
$\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$, $|f_i(x) - \varphi_i(x)| \leq \varepsilon$ et donc : $\forall x \in]x_i, x_{i+1}[$, $|f(x) - \varphi_i(x)| \leq \varepsilon$. Définissons la fonction en escalier φ sur $[a,b]$ par : $\begin{cases} \forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad \forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \quad \varphi(x) = \varphi_i(x), \\ \forall i \in [\![0, n]\!], \quad \varphi(x_i) = f(x_i) \end{cases}$.
Ainsi quel que soit $x \in [a,b]$, $|\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire : $\|\varphi - f\|_\infty \leq \varepsilon$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction en escalier φ_n telle que $\|\varphi_n - f\|_\infty \leq \dfrac{1}{n}$: la suite (φ_n) converge uniformément vers f.

Théorème 1.1.2 (Weierstrass) ***(Énoncé CCP 48)*** *Toute fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles ou complexes, est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a,b]$.*

Démonstration : Admis, mais sera vue en probabilité au chapitre 11.

Exemple 1.1.4 1. ***(CCP 48)*** *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^k f(x)dx = 0$ et (P_n) une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$.*

(a) *Montrer que $(P_n f)$ converge uniformément vers f^2 sur $[0,1]$.*

(b) *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 P_n f = \int_0^1 f^2$.*

(c) *Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n f$.*

(d) *Montrer que f est la fonction nulle.*

2. Soit (P_n) *une suite de polynômes. On suppose que* (P_n) *converge uniformément vers* sin *sur* $\mathbb{R}$.

  (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ *tel que :* $\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x)| \leq 2$.

  (b) Que dire du polynôme P_n*, avec* $n \geq N$ *?*

  (c) En déduire une contradiction.

Remarque 1.1.6 *Le dernier exemple montre que le théorème d'approximation de Weierstrass n'est valide que sur un segment.*

1.2 Continuité et double limite pour la convergence uniforme

Proposition 1.2.1 (Convergence uniforme et continuité) ***(Démo CCP 12)*** *On suppose que* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* A.

- *Si pour tout* n *de* $\mathbb{N}$*, la fonction* f_n *est continue en* a *(avec* $a \in A$*), alors* f *est continue en* a.
- *Si pour tout* n *de* $\mathbb{N}$*, la fonction* f_n *est continue sur* A*, alors* f *est continue sur* A.

Démonstration : Il suffit de montrer la continuité de f en a, avec a dans A. Pour la démonstration du CCP 12, A est une partie de $\mathbb{R}$, donc il faut remplacer les normes par des valeurs absolues.

Remarque 1.2.1 *(IMPORTANTE) Grâce à la contraposée de la proposition précédente, si une suite de fonctions continues (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f qui n'est pas continue, alors la convergence n'est pas uniforme.*

Exemple 1.2.1 1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour x dans $[1, +\infty[$ on pose $f_n(x) = \dfrac{(\ln(x))^{2n} - 2}{(\ln(x))^{2n} + 2}$. A-t-on la convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) sur $[1, +\infty[$?*

2. ***(CCP 9 et 12)*** *De même si on considère $f_n : x \mapsto x^n$ ou $g_n : x \mapsto \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$, qui sont continues, comme (f_n) et (g_n) convergent respectivement sur $[0, 1]$ vers $x \mapsto \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0, 1[\\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases}$ et sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto \begin{cases} 0 & si \quad x \in \mathbb{R}_+^* \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$, qui ne sont pas continues, alors nous n'avons pas convergence uniforme de (f_n) et (g_n) sur respectivement $[0, 1]$ et $\mathbb{R}$.*

Corollaire 1.2.1 (Convergence uniforme sur des voisinages) 1. *On suppose que toutes les fonctions f_n sont continues sur A. Si pour tout a de A, il existe un voisinage V (relatif de A) de a tel que $(f_n|_V)$ converge uniformément vers $f|_V$, alors f est continue sur A tout entier.*

2. *Si $A = I$, un intervalle de $\mathbb{R}$, on adapte l'énoncé précédent : si une suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I, alors f est continue sur I tout entier.*

Démonstration :

1. Soit $a \in A$. Soit V un voisinage de a. Comme (f_n) converge uniformément sur V et que chaque fonction f_n est continue, alors la proposition précédente nous dit que f est continue sur V et donc en particulier en a.
2. Soit $x_0 \in I$. Il existe des réels a, b tels que : $x_0 \in]a, b[\subset I$, si x_0 est dans l'intérieur de I et $x_0 \in [a, b] \subset I$ si x_0 est une borne fermée de I . Comme (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ et que chaque fonction f_n est continue, alors la proposition précédente nous dit que f est continue sur $[a, b]$. Ainsi f est en particulier continue en x_0. Ainsi f est continue en tout point x_0 de I.

Exemple 1.2.2 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.*

1. ***(CCP 9)*** *Soit* $a \in \mathbb{R}_+^*$. *La suite* (f_n) *converge-t-elle uniformément sur* $[a, +\infty[$ *?*
2. *Montrer que cette suite converge uniformément sur tout segment* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 1.2.2 *ATTENTION, l'exemple précédent nous montre que :*

1. *l'on peut ne pas converger uniformément sur un intervalle (grâce à l'exemple 1.1.3, on n'a pas convergence uniforme sur* $\mathbb{R}_+^*$*), mais converger uniformément sur un intervalle plus petit (comme* $[a, +\infty[$*, avec* $a > 0$*). Ainsi il faut toujours préciser sur quel intervalle on converge uniformément.*
2. *la convergence uniforme sur tout segment* $[a, b]$ *inclus dans* I*, n'implique pas la convergence uniforme sur* I *tout entier. Le corollaire précédent nous donne uniquement la continuité de* f*. En effet la convergence uniforme est une propriété globale sur* I *tout entier, alors que la continuité est une propriété locale.*

Théorème 1.2.1 (Théorème de la double limite)

1. *On suppose que* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers une fonction* f *sur* A*, et soit* $a \in \overline{A}$.

   Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ *la fonction* f_n *admet une limite* b_n *en* a*, alors la suite* $(b_n)_n$ *converge vers* $b \in \mathbb{K}$ *et* f *admet* b *pour limite en* a *:*

   $$b = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} b_n.$$

   En résumé : si (f_n) *converge uniformément vers* f *et si pour tout* n *de* $\mathbb{N}$*,* $\lim_a f_n = b_n$*, alors* $\lim_a \lim_n f_n = \lim_n \lim_a f_n$.
2. *Si* $E = \mathbb{R}$ *et que ou bien* A *n'est pas majoré et* $a = +\infty$*, ou bien* A *n'est pas minoré et* $a = -\infty$ *et si* (f_n) *converge uniformément vers* f*, avec pour tout* n *de* $\mathbb{N}$*,* $\lim_a f_n = b_n$*, alors* $\lim_a \lim_n f_n = \lim_n \lim_a f_n$.

Démonstration : Admis.

Exemple 1.2.3 ***(CCP 9)*** *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et on pose* $f_n : x \mapsto \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$*. Montrer d'une autre manière que* (f_n) *ne converge pas uniformément vers* 0 *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

1.3 Passage à la limite dans une intégrale pour une suite de fonctions

1.3.1 État des lieux sur deux exemples

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $\forall x \in [0, 1[,\ f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. Est-ce que cette limite vaut $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$?

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $f_n : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^2 x(1-x)^n \end{array} \right.$. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$, puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$. Est-ce que cette limite vaut $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$?

Nous pouvons constater que si une suite de fonction (f_n) converge vers f, on ne peut pas dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx$ vaut $\displaystyle\int_I f(x)dx$. Pour chercher une limite du type $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx$, jusqu'ici, vous avez procédé par des inégalités comme dans le premier exemple. Cette méthode restera tout à fait efficace dans certains cas.
Dans ce qui suit, nous allons donner des conditions suffisantes pour avoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$.

1.3.2 Théorème de convergence dominé

Théorème 1.3.1 (Théorème de convergence dominée) *On suppose que :*

1. *pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I.*
2. *(f_n) converge simplement vers f et f est continue par morceaux sur I.*
3. ***(Domination)** il existe une fonction φ, continue par morceaux et intégrable sur I telle que :*

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq \varphi(x).$$

Alors les fonction f_n et f sont intégrables sur I et on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$.

Démonstration : Admis.

Remarque 1.3.1 *1. Bien veiller à ce que la fonction φ soit indépendante de n.*

2. *L'hypothèse de domination se fait en deux étapes :*
   (a) *pour x fixé dans I, trouver un majorant de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire une valeur $\varphi(x)$ qui ne dépend pas de n.*
   (b) *prouver l'intégrabilité de φ sur I.*
3. *Le théorème de convergence dominé n'est pas un recours obligatoire, parfois de simples majorations permettent de conclure comme dans le premier exemple du paragraphe précédent.*
4. *ATTENTION, ne pas confondre avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I \varphi(x)dx$, qui est en général faux.*

Exemple 1.3.1 *1.* ***(CCP 25)***

(a) Montrer que pour tout n *de* $\mathbb{N}$*, la fonction* $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.

(b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} dt$.

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{nx+x\sqrt{x}} dx$*, puis* $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{nx+x\sqrt{x}} dx$.

3. ***(CCP 26)*** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et on pose* $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

   (a) *Montrer que* I_n *est bien définie.*

   (b) *Étudier la monotonie de* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (c) *Déterminer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

   (d) *La série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n I_n$ *converge-t-elle ?*

4. (a) *Étudier* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx$.

   (b) *Donner un équivalent de* $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n e^{\frac{nu}{2}} du$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.

1.3.3 Cas de la convergence uniforme sur un segment

Proposition 1.3.1 (Convergence uniforme et intégrales sur un segment) ***(Démo CCP 14)***

- *Pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a,b]$.*
- *(f_n) converge uniformément sur le segment $[a,b]$ vers f.*

Alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

Démonstration :

Exemple 1.3.2 1. ***(CCP 10)*** *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}dx.$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose :* $f_n : \left\{ \begin{array}{lll} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^2x(1-x)^n \end{array} \right.$. *Est-ce que la convergence de (f_n) est uniforme ?*

3. *Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. On pose* $A = \{f \in E,\ f(0) = 0 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f \geq 1\}$.
   (a) *Montrer que A est un fermé de E.*
   (b) *Montrer que : $\forall f \in A,\ \|f\|_\infty > 1$. En déduire que $d(0,A) \geq 1$.*

Proposition 1.3.2 (Primitivation d'une suite de fonctions qui convergent uniformément) *On suppose que toutes les fonctions f_n sont continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$: $F_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n$ et $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$. Alors (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I.*

Démonstration : Par convergence uniforme sur tout segment de I, on peut d'abord affirmer que f est continue sur I. Soit $[\alpha, \beta]$ inclus dans I et on peut supposer sans perte de généralité que a est dans $[\alpha, \beta]$ (sinon utiliser une relation de Chasles). Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\alpha, \beta]$. On a si $x \geq a$:
$|F_n(x) - F(x)| = |\displaystyle\int_a^x (f_n - f)| \leq \int_a^x |f_n - f| \leq \int_a^x \|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]} = (x-a)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \leq (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]}$.
Si $x \leq a$: $|F_n(x) - F(x)| = |\displaystyle\int_a^x (f_n - f)| = |\int_x^a (f_n - f) \leq \int_x^a |f_n - f| \leq (a-x)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \leq (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]}$.
On a donc : $\forall x \in [\alpha, \beta],\ |F_n(x) - F(x)| \leq (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]}$, puis :
$\|F_n - F\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \leq (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|F_n - F\|_{\infty,[\alpha,\beta]} = 0$.

1.4 Dérivabilité d'une suite de fonctions

1.4.1 État des lieux sur un exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers $f : x \mapsto |x|$. Est-ce que la limite simple ou uniforme f d'une suite de fonctions dérivables (f_n) est dérivable ?

1.4.2 Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions

Proposition 1.4.1 (Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions) *I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.*

1. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions telles que*
   - *pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;*
   - *la suite (f_n) converge simplement vers f sur I.*
   - *la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction h sur I,*

   alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $f' = h$, soit : $\forall x \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x)$

   et (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I.
2. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions telle que*
   - *pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;*
   - *la suite (f_n) converge simplement vers f sur I.*
   - *la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction h sur tout segment $[a,b]$ inclus I,*

   alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $f' = h$, donc : $\forall x \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x)$

   et (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Démonstration : *1.*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $g_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n' = f_n(x) - f_n(a)$ et (f_n') est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f' sur I. Grâce à la proposition précédente de primitivation, (g_n) converge uniformément vers $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f' = f(x) - f(a)$ sur tout segment de I. Enfin :
$\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| = |g_n(x) - g(x)|$, ce qui assure aussi la convergence uniforme de (f_n) vers f sur tout segment de I.
2. Soit $x_0 \in I$. Il existe un segment $[a,b]$ tel que : $x_0 \in [a,b] \subset I$. Le premier point de cette proposition appliqué à l'intervalle $[a,b]$ prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que $f'(x_0) = h(x_0)$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de tout point x_0 de I et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

1.4.3 Dérivées d'ordre supérieur de la limite d'une suite de fonctions

Proposition 1.4.2 (Dérivabilité d'ordre supérieur de la limite d'une suite de fonctions) *I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.*

1. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I telles que :*
   - *Pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*
   - *Pour tout p dans $[\![0, k-1]\!]$, la suite de fonctions $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction g_p. Pour $p = 0$, on notera que (f_n) converge vers $f = g_0$.*
   - *La suite de fonctions $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction g_k.*

   Alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on a : $\forall p \in [\![1, k]\!],\ f^{(p)} = g_p$.
2. *Dans les hypothèse précédentes, si on remplace le dernier point par : la suite de fonctions $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g_k sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I, alors on obtient le même résultat.*

Démonstration : Il suffit de démontrer le dernier point. Montrons cela par récurrence sur k.
Pour $k=1$, c'est la proposition 1.4.1.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et on suppose la proposition vraie pour k. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ telle que $(f_n^{(p)})$ converge simplement vers une fonction g_p sur I pour tout p de $[\![0,k]\!]$ et telle que $(f_n^{(k+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g_{k+1} sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I. On pose $f=g_0$.
$(f_n^{(k)})$ converge simplement vers une fonction g_k sur I et $\left((f_n^{(k)})'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_{k+1} sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I (car $(f_n^{(k)})'=f_n^{(k+1)}$). Ainsi grâce à la proposition 1.4.1, la fonction g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a : $g_k'=g_{k+1}$.
Montrons que $f_n^{(k)}$ converge uniformément vers g_k sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I. On notera $\|.\|_{\infty,[a,b]}$ la norme uniforme sur $[a,b]$.
$\forall x\in[a,b],\ |g_k(x)-f_n^{(k)}(x)| = \left|g_k(a)+\int_a^x g_k'(t)dt - f_n^{(k)}(a) - \int_a^x (f_n^{(k)})'(t)dt\right|$
$\leq \left|g_k(a)-f_n^{(k)}(a)\right| + \left|\int_a^x (g_k'(t)dt-(f_n^{(k)})'(t))dt\right|.$
Or on a : $\left|\int_a^x (g_k'(t)dt-(f_n^{(k)})'(t))dt\right| \leq \int_a^x |g_k'(t)dt-(f_n^{(k)})'(t)|dt = \int_a^x |g_{k+1}(t)dt - f_n^{(k+1)}(t)|dt \leq \int_a^x \|g_{k+1}-f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]}dt = (x-a)\|g_{k+1}-f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]} \leq (b-a)\|g_{k+1}-f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]}$, car on a : $\forall t\in[a,b],\ |g_{k+1}(t)dt-f_n^{(k+1)}(t) \leq \|g_{k+1}-f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]}$ et $\|g_{k+1}-f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]}$ est une constante. On a donc :
$\forall x\in[a,b],\ |g_k(x)-f_n^{(k)}(x)| \leq \left|g_k(a)-f_n^{(k)}(a)\right| + (b-a)\|g_{k+1}-f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]}$. Le membre de droite de cette inégalité étant indépendant de x, alors on a :
$\|g_k-f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]} \leq \left|g_k(a)-f_n^{(k)}(a)\right| + (b-a)\|g_{k+1}-f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]}$. Comme $(f_n^{(k+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g_{k+1} sur $[a,b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(b-a)\|g_{k+1}-f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]}=0$ et comme $f_n^{(k)}$ converge simplement vers g_k, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|g_k(a)-f_n^{(k)}(a)\right|=0$. Ainsi on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\|g_k-f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}=0$ et donc $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers g_k. Cela étant valable pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, alors grâce à l'hypothèse de récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout p de $[\![1,k]\!]$, on a : $f^{(p)}=g_p$. Par ailleurs comme g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $g_k'=g_{k+1}$, alors f est aussi de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I et en plus $f^{(k+1)}=(f^{(k)})'=g_k'=g_{k+1}$. On a donc le résultat au rang $k+1$.

Remarque 1.4.1 *IMPORTANTE : pour montrer que la limite f de (f_n) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, il faut appliquer la proposition précédente pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et donc il faut vérifier la convergence uniforme sur I (ou sur tout segment inclus dans I) de toutes les suites des dérivées $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ (ou à partir d'un certain rang pour k).*

2 Séries de fonctions

2.1 Modes de convergence d'une série de fonctions

2.1.1 Convergence simple d'une série de fonctions

Définition 2.1.1 (Convergence simple d'une série de fonctions) *On dit que la série de fonction $\sum f_n$ est simplement convergente sur A et de somme S si pour tout x de A, la série $\sum f_n(x)$ converge et a pour somme $S(x)$.*

Autrement dit si on note $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ la somme partielle d'ordre n, alors la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers S, c'est-à-dire : $\forall x\in A,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)=S(x)$.

Dans ce cas, on a : $\forall x\in A,\ S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Remarque 2.1.1 *1. Si la série converge simplement, alors le reste d'ordre n est la fonction* $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ *qui s'écrit aussi* $R_n = S - S_n$ *et converge simplement vers 0.*

2. Si pour tout n les fonctions f_n sont T-périodiques (respectivement positives, négatives, croissantes, décroissantes, paires, impaires, convexes,...), alors $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est T-périodique (respectivement positive, négative, croissante, décroissante, paire, impaire, convexe,...).*

Exemple 2.1.1 *1. Quelle est le domaine de définition de* $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ *?*

2. Étude de la convergence et de la somme de la série de fonctions $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(nx)$ *sur* $]-1;1[$.

3. ***(CCP 8)*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose :* $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^{n-1}e^{-nx}}{n} \end{array} \right.$ *. Étudier la convergence simple de* $\sum_{n\geq 1} f_n$.

2.1.2 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 2.1.2 (Convergence uniforme d'une série de fonctions) ***(Énoncé CCP 15)*** *La série de fonctions* $\sum_n f_n$ *converge uniformément sur A si la suite des somme partielle $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec* $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$*) converge uniformément sur A.*

Proposition 2.1.1 (Convergence uniforme des restes) *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonction qui converge simplement sur A.*
La série $\sum f_n$ *converge uniformément sur A si et seulement si la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec* $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$*) converge uniformément vers 0.*

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. La suite (S_n) converge simplement vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ et on a : $R_n = S - S_n$. Par définition la suite (S_n) converge uniformément vers S si et seulement si la suite $(S - S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 si et seulement si la suite (R_n) converge uniformément vers 0.

Proposition 2.1.2 (La convergence uniforme implique la convergence simple) *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A alors elle converge simplement sur A.*

Démonstration : Si la suite de fonction (S_n) converge uniformément, alors elle converge simplement grâce à la proposition 1.1.2.

Remarque 2.1.2

1. *IMPORTANTE : pour montrer que $\sum f_n$ converge uniformément, (si on n'utilise pas la convergence normale que l'on verra au paragraphe suivant) on établit la convergence simple de $\sum f_n$ puis on montre que la suite des restes (R_n) converge uniformément vers 0, on utilise que très rarement la définition avec les sommes partielles.*
2. *Pour la convergence uniforme d'une série, il suffit donc de trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendante de x qui converge vers 0 telle que : $\forall x \in A, |R_n(x)| \leq \alpha_n$.*
   En effet on aura donc $\|R_n\|_\infty \leq \alpha_n$, puis $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$.
   Dans ce contexte le critère spécial des séries alternées peut être très pratique, car il donne facilement une majoration des restes.

Exemple 2.1.2

1. ***(CCP 8)*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^{n-1}e^{-nx}}{n} \end{array} \right.$. Étudier la convergence uniforme de $\sum_{n\geq1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.*

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx^2}{n^3+x^2} \end{array} \right.$.*
   (a) *Montrer $\sum_{n\geq1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.*
   (b) *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n(n+1) \geq 1/2$. Qu'en déduire ?*

3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et on pose :* $f_n : \left\{ \begin{array}{lll} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin^2(x)\cos^n(x) \end{array} \right.$.

   (a) *Montrer* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge simplement sur* $[0,\pi]$.

   (b) *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Soit* $x \in]0;\pi[$. *Déterminer* $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

   (c) *A-t-on convergence uniforme sur* $[0,\pi]$ *?*

   (d) *Montrer que* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge uniformément sur tout intervalle de la forme* $[a, \pi - a]$, *avec :* $0 < a < \pi/2$.

2.1.3 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 2.1.3 (Convergence normale) ***(Énoncé CCP 15)*** *Une série $\sum f_n$ de fonctions est dite normalement convergente si toutes les fonctions f_n sont bornées sur A et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.*

Remarque 2.1.3

1. *IMPORTANT : pour montrer qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, on montre qu'il existe une série numérique $\sum \alpha_n$ convergente telle que :*
   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A,\ |f_n(x)| \leq \alpha_n$. En effet, dans ce cas, par définition de la borne supérieure, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)| \leq \alpha_n$, puis : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$. Ainsi par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
   Il s'agit donc de majorer chaque $|f_n(x)|$ par un nombre α_n indépendant de x.
   Cette méthode sera souvent employée, car il n'est pas toujours facile d'avoir $\|f_n\|_\infty$.
   Parfois à l'aide d'une étude de fonction, il sera possible de déterminer directement $\|f_n\|_\infty$.
2. *ATTENTION, si on a $f_n(x) = o(\alpha_n)$, le $o(\alpha_n)$ dépend de x ! Par exemple $x/n^3 = o(1/n^2)$, mais si cette majoration est indépendante de x, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :*
   $\forall x \in \mathbb{R},\ x/n^2 \leq k/n \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \leq kn$. Ceci est faut pour $x = kn+1$.
3. *ATTENTION : la convergence normale est une notion spécifique aux <u>séries</u> de fonctions.*
4. *Ne pas confondre la convergence absolue d'une série de fonctions au point x (qui signifie que $\sum |f_n(x)|$ converge) et la convergence normale qui est une notion glabale (il faut majorer la fonction $|f_n|$ sur un intervalle pour montrer que la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge).*

Proposition 2.1.3 (La convergence normale implique la convergence uniforme) ***(Démo CCP 15)*** *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors la série de fonction $\sum f_n$ converge aussi uniformément sur A et donc simplement aussi.*

Démonstration :

Remarque 2.1.4 *IMPORTANT : pour établir une convergence uniforme d'une série de fonctions, il sera souvent plus simple d'établir la convergence normale.*

Exemple 2.1.3

1. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et : $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\cos(nx)}{n^2+x^2} \end{array} \right.$. Mode convergence de $\sum f_n$.*

2. ***(CCP 18)*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^n x^n}{n} \end{array} \right.$.*

(a) *Étudier la convergence simple de* $\sum f_n$. *Soit* D *le domaine de convergence.*

(b) *Étude de la convergence normale de* $\sum f_n$, *sur* D.

3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et on pose :* $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1+n^2x^2}{n^4+x^4} \end{array} \right.$. *Montrer que* $\sum f_n$ *ne converge pas normalement.*

4. ***(CCP 53)*** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et on pose :* $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+n^4x^4} \end{array} \right.$.

   (a) *Montrer* $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$.

   (b) *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $0 < a < b$. $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ *converge-t-elle normalement sur* $[a; b]$ *? sur* $[a, +\infty[$ *?*

   (c) $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ *converge-t-elle normalement sur* $[0, +\infty[$ *? On utilisera deux méthodes.*

Remarque 2.1.5 *Le premier exemple de 2.1.2 montre que la convergence uniforme n'implque pas la convergence normale. En effet, on a :* $\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\dfrac{(-1)^{n-1}e^{-nx}}{n}\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\dfrac{e^{-nx}}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$.

Proposition 2.1.4 (La convergence normale implique la convergence absolue) *Si la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge normalement sur* A*, alors pour tout* x *de* A*, la série numérique* $\sum f_n(x)$ *converge absolument.*

Démonstration : Soit $x \in A$. On a : $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$. Comme la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, alors $\sum |f_n(x)|$ aussi.

2.2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

2.2.1 Continuité de la somme d'une série de fonctions

Proposition 2.2.1 (Continuité d'une série de fonctions) *Soient* $\sum f_n$ *une série de fonctions et* $a \in A$*.*

1. - *Si pour tout* n*, la fonction* f_n *est continue sur* A *(resp. en* a*).*
   - *Si* $\sum f_n$ *converge uniformément ou normalement sur* A*.*

   Alors $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur* A *(resp. en* a*).*
2. - *Si pour tout* n*, la fonction* f_n *est continue sur* A*.*
   - *Si pour tout* a *de* A*, il existe un voisinage* V *(relatif de* A*) de* a *tel que* $\sum f_n|_V$ *converge uniformément ou normalement .*

   Alors $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur* A*.*
3. *Si* $A = I$*, un intervalle de* $\mathbb{R}$ *:*
   - *si pour tout* n*, la fonction* f_n *est continue sur* I*.*
   - *si* $\sum f_n$ *converge uniformément ou normalement sur tout segment* $[a, b]$ *inclus dans* I*.*

   Alors $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur* I*.*

Démonstration : Comme la convergence normale implique la convergence uniforme, il suffit de montrer la proposition pour la convergence uniforme. On a les deux premiers résultats grâce à la proposition 1.2.1 et le corollaire 1.2.1 en les appliquant à la suite de fonctions (S_n), avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$.

Exemple 2.2.1 1. *Étude de la continuité de* $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}e^{-nx}}{n}$ *sur* $\mathbb{R}_+$*.*

2. *Déterminer* $\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+x^2+2n+1+x^{2n+2}}$.

3. ***(CCP 53)*** *Montrer que* $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4x^4}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$.

4. *Montrer que* $h : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(nx)e^{-n^2x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.

5. *Étude de la continuité de* $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

6. *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *et on pose* $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$, *avec* $n^z = e^{z \ln(n)}$. *Montrer que* ζ *est définie sur* $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 1\}$, *puis montrer qu'elle y est continue.*

2.2.2 Dérivabilité de la somme d'une série de fonctions

Proposition 2.2.2 (Dérivation terme à terme) *I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

- *pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*
- *la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur I*
- *la série $\sum f'_n$ converge uniformément ou normalement sur I (ou sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I).*

Alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et* $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Démonstration : On suppose le premier point et le fait que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Sur I la fonction S_n est dérivable en tant que somme finie de fonctions dérivables sur I et on a : $S_n' = \sum_{k=0}^{n} f_k'$. On pose $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ et $S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k'$. Ces deux quantités existent car $\sum f_n$ converge simplement sur I et $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I, donc si x_0 est dans I, on peut trouver des réels a et b tels que : $x_0 \in [a,b] \subset I$ puis comme $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$ elle cette série converge simplement sur $[a,b]$ et en particulier en x_0. Ainsi pour tout x_0 de I, $\sum f_n'(x_0)$ existe.
(S_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et (S_n) converge simplement vers S. D'autre part (S_n') converge uniformément vers S_1 sur tout segment inclus dans I. Ainsi grâce à la proposition 1.4.1, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = S_1$, d'où : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Remarque 2.2.1 *(IMPORTANTE) Pour les deux propositions précédentes, il sera plus simple d'essayer de montrer la convergence normale. La convergence uniforme se montre souvent pour des séries du type* $\sum (-1)^n u_n$, *car grâce au théorème spécial des séries alternées, il est possible de majorer les restes* R_n *et ainsi de montrer que :* $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$.

Exemple 2.2.2

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et on pose* $u_n : x \mapsto \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$ *définie sur* $[0,1]$.

   (a) ***(CCP 16)*** *Montrer que* $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *est dérivable sur* $[0,1]$.

   (b) ***(CCP 16)*** *Calculer* $S'(1)$.

   (c) *Montrer que* S *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+$.

2. *Soit* $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} e^{-nx}}{n}$.

   (a) *Montrer que* g *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) *Étudier la monotonie de* g *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *sans calculs.*

   (c) *Montrer qu'il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \ln(1 + e^{-x}) + c$.

2.2.3 Dérivées d'ordre supérieur de la somme d'une série de fonctions

Proposition 2.2.3 (Série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$) *Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. On suppose que*

- *pour tout n de $\mathbb{N}$ la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*
- *pour tout j dans $[\![0, k-1]\!]$, la série de fonction $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I.*
- *la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément ou normalement sur I (ou sur tout segment inclus dans I).*

On pose $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$. Alors S est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $\forall j \in [\![1, k]\!], \forall x \in I,\ S^{(j)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$.

Démonstration : Repasser par les sommes partielles comme dans la preuve de la proposition 2.2.2 et utiliser ensuite la proposition 1.4.2 relatifs aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Corollaire 2.2.1 (Série de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$) *On suppose que :*

- *pour tout n, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*
- *pour tout k de $\mathbb{N}$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément ou normalement sur I (ou sur tout segment inclus dans I).*

On pose $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$. Alors S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et : $\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ S^{(j)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$.

Remarque 2.2.2

1. *Dans le corollaire précédente, il est suffisant d'avoir la converge uniforme ou normale de $\sum f_n^{(k)}$ à partir d'un certain rang pour k.*
2. *IMPORTANTE : souvent lorsque l'on travaille sur un intervalle I ouvert ou non borné, on montrera la convergence normale sur tout segment inclus dans I.*

Exemple 2.2.3

1. *On pose $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\dfrac{x}{k}\right) e^{-x/\sqrt{k}}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.*

2. *Pour x dans $]1,+\infty[$, on pose $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et calculer ses dérivées successives.*

2.3 Séries de fonctions et intégrales

2.3.1 Situation

Sur un exemple nous allons voir s'il est possible d'écrire $\int_I\sum_{n=0}^{+\infty}f_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-t)^k dt=\int_0^1\frac{1}{1+t}dt+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$.
2. En déduire : $\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1(-t)^k dt=\int_0^1(\sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k)dt$ et $\ln(2)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Ici nous avons réussi à conclure car les restes de la série $\sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k$ s'expriment simplement. Mais plus généralement pour écrire $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ il nous faut des hypothèses supplémentaires.

2.3.2 Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Théorème 2.3.1 (Intégration terme à terme des fonctions positives) *On suppose que :*

- *pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur I et positive.*
- *$\sum f_n$ converge simplement vers S qui est continue par morceaux sur I.*

Alors

$$\int_I (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t))dt = \int_I S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

Les séries étant à termes positifs, la relations ci-dessus est dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et l'intégrabilité de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ équivaut à $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt < +\infty$.

Démonstration : Admis.

Remarque 2.3.1 *Ce théorème s'adapte aux fonctions négatives.*

Exemple 2.3.1

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f_n : t \mapsto t^n \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $\int_0^1 f_n$.*
2. *Montrer que $S : t \mapsto -e^t \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que $-\int_0^1 e^t \ln(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$.*

Théorème 2.3.2 (Intégration terme à terme) *On suppose que :*

- *pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur I.*
- $\sum f_n$ *converge simplement vers S qui est continue par morceaux sur I.*
- $\sum \int_I |f_n(t)|dt$ *converge.*

Alors S est intégrable sur I et :

$$\int_I (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t))dt = \int_I S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

Démonstration : Admis.

Exemple 2.3.2 ***(CCP 49)*** *Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+,\ f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.*

1. (a) *Montrer que la suite (a_n) est bornée.*

   (b) *Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.*

   On admettra pour la suite de $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. *On rappelle que $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.*

   (a) *Étude de la convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt$.*

   (b) *Montrer que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.*

Remarque 2.3.2 *Parfois, on ne peut pas utiliser le résultat du théorème car on n'a pas* $\sum \int_I |f_n(t)|dt$ *qui converge. Si on reprend l'exemple du paragraphe précédent, on a :* $\int_0^1 |(-t)^k|dt = \int_0^1 t^k = \frac{1}{k+1}$ *et donc* $\sum_{k\geq 0} \int_0^1 |(-t)^k|dt$ *diverge, donc le théorème précédent ne fonctionne pas. Pour s'en sortir il faut revenir aux sommes partielles et faire apparaître le reste* $(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt$ *et montrer que celui-ci tend vers* 0 *(soit à la main par des inégalités soit à l'aide du théorème de convergence dominé).*

2.3.3 Convergence uniforme d'une série de fonctions sur un segment

Proposition 2.3.1 (Primitivation terme à terme sur un segment) ***(Démo CCP 14)***

- *Pour tout* n *de* $\mathbb{N}$, *la fonction* f_n *est continue sur* $[a,b]$.
- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément ou normalement sur* <u>*le segment* $[a,b]$</u>.

Alors la série $\sum \int_a^b f_n$ *converge et :* $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$.

Démonstration :

Remarque 2.3.3 *Cette dernière proposition est bien moins utilisée que le théorème 2.3.2.*

Exemple 2.3.3 1. ***(CCP 14)*** *Montrer que* $\int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

2. (a) *Montrer que :* $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}\right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

(b) *En déduire* $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}\right) dx = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Proposition 2.3.2 (Primitivation d'une série de fonctions qui convergent uniformément) *On suppose que toutes les fonctions f_n sont continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I. On a :* $\forall x \in I$, $\displaystyle\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)dt$.

Démonstration : C'est une conséquence de la proposition 1.3.2 appliquée à la suite des sommes partielles.

2.4 Comportement asymptotique des séries de fonction.

2.4.1 Recherche d'une limite aux bornes de l'intervalle de définition d'une série de fonctions

- Par utilisation du théorème de la double limite.

Théorème 2.4.1 (Théorème de la double limite) *1. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément (ou normalement) sur A de somme S, et soit $a \in \overline{A}$.*

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n admet une limite b_n en a, alors la série $\sum b_n$ converge et :

$$\lim_{x\to a} S(x) = \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

2. Si $E = \mathbb{R}$ et que ou bien A n'est pas majoré et $a = +\infty$, ou bien A n'est pas minoré et $a = -\infty$ et si $\sum f_n$ converge uniformément (ou normalement) sur A de somme S et si pour tout n de $\mathbb{N}$, $\lim_a f_n = b_n$, alors la série $\sum b_n$ converge et :

$$\lim_{x\to a} S(x) = \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Démonstration : Comme la convergence normale implique la convergence uniforme, alors le théorème 1.2.1 appliqué à la suite de fonctions (S_n) donne le résultat.

Exemple 2.4.1 *1. **(CCP 53)** Soit $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4x^4}$. Déterminer $\lim_{+\infty} g$.*

*2. **(CCP 18)** Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$. La fonction S converge-t-elle uniformément sur $]-1, 1]$?*

- Par majoration/minoration :

Exemple 2.4.2 *1. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$. On admet que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\lim_{0^+} f$.*

2. On reprend la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}e^{-nx}}{n}$ *de l'exemple 2.2.2. On a vu qu'il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \ln(1+e^{-x}) + c$.

(a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |g(x)| \leq e^{-x}$.

(b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \ln(1+e^{-x})$.

(c) Retrouver le fait que : $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

- Par comparaison de séries et intégrales :
  On se fixe x. Si la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, on peut comparer les sommes partielles de la série $\sum f_n(x)$ avec une intégrale, en encadrant pour chaque n la quantité $f_n(x)$. Bien comprendre qu'ici x est considéré comme une constante et que c'est n qui varie. Ainsi « n devient t ».

  Exemple 2.4.3 *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)$ *avec* $f : x \mapsto (x-1)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

2.4.2 Recherche d'équivalents

- À l'aide d'un encadrement utilisant une comparaison série et intégrale.

  Exemple 2.4.4 *1. Déterminer un équivalent en* $+\infty$ *de* $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$.

2. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *On pose* $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1} dt$. *On rappelle que :* $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(t)| \leq t$.

   (a) *Montrer que* S *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) *Montrer que :* $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

   (c) *En déduire un équivalent de* S *en* 0^+.

- En cherchant un équivalent potentiel et en concluant par un argumuent de comparaison.

  Exemple 2.4.5 *1. Déterminer un équivalent en* $+\infty$ *de* $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4x^4}$

  2. Déterminer un équivalent en -1 *de* $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^{3/2}+(x+n)^{1/2}}$.

3 Extension aux fonctions vectorielles

Nous allons étendre les définitions vues avant avec des fonctions f_n à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Les propositions étendues seront données sans preuves, car ce sont les mêmes que lorsque l'on avait des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, sauf qu'il faut remplacer les modules ou les valeurs absolues par une norme $\|.\|_F$ sur F.

3.1 Suites et séries de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie et A une partie de E. Pour toute application f bornée de A dans F, on définit : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F$.

Les normes sur F étant équivalentes, les normes ainsi définies dans $\mathcal{B}(A,F)$ (ensemble des fonctions bornées de A dans F) sont équivalentes.

Définition 3.1.1 (Extension des définitions sur les modes de convergences)

1. (a) *Une suite $(f_n)_n$ d'applications de A dans F converge simplement lorsque pour tout $x \in A$ la suite $(f_n(x))_n$ converge dans F.*
   (b) *La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f lorsque la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ converge vers 0.*
2. (a) *Une série $\sum u_n$ d'applications de A dans F converge simplement lorsque pour tout $x \in A$ la série $\sum u_n(x)$ converge.*
   (b) *Si on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, la série $\sum u_n$ converge uniformément si la suite (S_n) converge uniformément.*
   Cela revient à dire que la suite des restes d'ordre n converge uniformément vers 0.
   (c) *La série $\sum u_n$ converge normalement lorsque la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.*

Proposition 3.1.1 (Implications des différents modes de convergence)

1. *La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la converge simple.*
2. *La convergence uniforme d'une série de fonctions implique la converge simple.*
3. *La convergence normale d'une série de fonctions implique la converge uniforme.*
4. *Si $\sum u_n$ converge normalement, alors pour tout x de A, la série $\sum u_n(x)$ converge absolument (la série $\sum \|u_n(x)\|_F$ converge).*

3.1.1 Continuité et double limite pour la convergence uniforme

Proposition 3.1.2 (Convergence uniforme et continuité)

1. *On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur A.*
   - *Si pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a (avec $a \in A$), alors f est continue en a.*
   - *Si pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A, alors f est continue sur A.*

   Le dernier point reste valable si on a la convergence uniforme au voisinage de tout point de A.
2. *On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément (ou normalement) de somme S sur A.*
   - *Si pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a (avec $a \in A$), alors $S = \sum f_n$ est continue en a.*
   - *Si pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A, alors $S = \sum f_n$ est continue sur A.*

   Le dernier point reste valable si on a la convergence uniforme au voisinage de tout point de A.

Corollaire 3.1.1 (Continuité de l'exponentielle)

- *L'application* exp *est continue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *L'application* exp *est continue dans $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \dfrac{A^n}{n!} \end{array} \right.$ qui est continue, car les coefficients sont polynomiaux en ceux de A. Il faut montrer que l'application $\sum f_n$ est continue.

Commençons par choisir une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prenons par exemple la norme $\|.\|_2$ vue dans le chapitre précédent qui vérifie, $(*)$ $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \times \|B\|_2$.

Soit $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nous allons montrer que $\sum f_n$ converge sur $\mathcal{B}(A_0,1)$. Soit $R = \|A_0\|_2 + 1$. On a donc : $\mathcal{B}(A_0,1) \subset \mathcal{B}(0,R)$. Soit $X \in \mathcal{B}(0,R)$. On a $\|f_n(X)\|_2 = \|\frac{1}{n!}X^n\|_2 = \frac{1}{n!}\|X^n\|_2 \leq \frac{1}{n!}\|X\|_2^n$ (grâce à une récurrence sur la relation $(*)$). Ainsi : $\forall X \in \mathcal{B}(0,R),\ \|f_n(X)\|_2 \leq \frac{R^n}{n!}$, puis $\|f_n\|_{\infty,\mathcal{B}(0,R)} \leq \frac{R^n}{n!}$.
Comme la série $\sum \frac{R^n}{n!}$ converge, alors la série $\sum \|f_n\|_{\infty,\mathcal{B}(0,R)}$ converge aussi. Ainsi la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathcal{B}(0,R)$. Donc $\sum f_n$ est continue sur $\mathcal{B}(0,R)$, donc sur le voisinage $\mathcal{B}(A_0,1)$ de A_0, donc elle est continue en A_0. Ainsi $\sum f_n$ est continue en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donc sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tout entier.
Pour la continuité sur $\mathcal{L}(E)$, il suffit de prendre une base $\mathcal{B}$ de E et poser $\|u\|_2 = \|Mat_{\mathcal{B}}(u)\|_2$ et de reprendre la démonstration précédente.

Théorème 3.1.1 (Théorème de la double limite)

1. *On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur A, et soit $a \in \overline{A}$ (si $A \subset \mathbb{R}$, on peut éventuellement avoir $a = +\infty$ ou $a = -\infty$).*
   Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n admet une limite b_n en a, alors la suite $(b_n)_n$ converge vers $b \in F$ et f admet b pour limite en a : $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$.
2. *On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément (ou normalement) sur A de somme S, et soit $a \in \overline{A}$ (si $A \subset \mathbb{R}$, on peut éventuellement avoir $a = +\infty$ ou $a = -\infty$).*
   Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n admet une limite b_n en a, alors la série $\sum b_n$ converge et :
   $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

4 Résumé des théorèmes pour $f_n : I \to \mathbb{K}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{L}^1(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I, $\mathcal{C}_{pm}(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I, on notera CV : converge, CVS : convergence simple, CVU : convergence uniforme, CVN : convergence normale

4.1 Suites de fonctions

Théorèmes	Hypothèses			Conclusion
	Régularité	CV ou intégrabilité	Contrôle	
Continuité	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0(I)$		(f_n) CVU sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$f = \lim f_n \in \mathcal{C}^0(I)$
Dérivabilité	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I)$	(f_n) CVS sur I	(f_n') CVU sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$f = \lim f_n \in \mathcal{C}^1(I)$ $f' = \lim f_n'$
Dérivabilité d'ordre supérieur	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^k(I)$	(f_n),...,$(f_n^{(k-1)})$ CVS sur I	$(f_n^{(k)})$ CVU sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$f = \lim f_n \in \mathcal{C}^k(I)$ $\forall l \in [\![0,k]\!] f^{(l)} = \lim f_n^{(l)}$
Double limite		$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_a f_n = b_n$ $a \in \overline{I}$	(f_n) CVU sur I	$\lim\limits_a \lim\limits_n f_n = \lim\limits_n \lim\limits_a f_n$
Intégration (CV dominée)	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n, f \in \mathcal{C}_{pm}(I)$	(f_n) CVS vers f sur I	$\exists \varphi \in \mathcal{L}^1(I)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \lvert f_n\rvert \leq \varphi$	$\lim \int_I f_n = \int_I f$ $f \in \mathcal{L}^1(I)$
Intégration sur $[a,b]$	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0([a,b])$		(f_n) CVU sur $[a,b]$	$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n$

4.2 Séries de fonctions

On notera $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Théorèmes	Hypothèses			Conclusion
	Régularité	CV ou intégrabilité	Contrôle	
Continuité	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0(I)$		$\sum f_n$CVU ou CVN sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$\sum f_n \in \mathcal{C}^0(I)$
Dérivation terme à terme	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I)$	$\sum f_n$ CVS sur I	$\sum f_n'$CVU ou CVN sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$\sum f_n \in \mathcal{C}^1(I)$ $\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$
Dérivation d'ordre k terme à terme	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^k(I)$	$\sum f_n, \dots, \sum f_n^{(k-1)}$ CVS sur I	$\sum f_n^{(k)}$CVU ou CVN sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$\sum f_n \in \mathcal{C}^k(I)$ $\left(\sum f_n\right)^{(l)} = \sum f_n^{(l)},\ l \in [\![0,k]\!]$
Double limite		$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_a f_n = b_n$ $a \in \overline{I}$	$\sum f_n$ CVU ou CVN sur I	$\sum b_n$ converge $\sum \lim\limits_a f_n = \sum b_n = \lim\limits_a (\sum f_n)$
Intégration terme à terme cas positif	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n, S \in \mathcal{C}_{pm}(I)$ f_n à valeurs dans $\mathbb{R}_+$	$\sum f_n$CVS vers S $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{L}^1(I)$		$\int_I \left(\sum f_n\right) = \sum \int_I f_n$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$
Intégration terme à terme	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n, S \in \mathcal{C}_{pm}(I)$	$\sum f_n$CVS vers S $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{L}^1(I)$	$\sum \int_I \lvert f_n \rvert$ CV	$\int_I \left(\sum f_n\right) = \sum \int_I f_n$
Primitivation terme à terme sur $[a,b]$	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0([a,b])$		$\sum f_n$CVU ou CVN sur $[a,b]$	$\int_a^b \left(\sum f_n\right) = \sum \int_a^b f_n$