Avant de commencer, voici quelques notations.
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ définie $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $x \in I$ fixé. On note $u_x : t \mapsto f(x,t)$. Si u_x est dérivable sur J, on note :
$\forall t \in J,\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = u_x'(t)$. On fixe x et on dérive la fonction f par rapport à la variable t.
Si u_x est k fois dérivable, on note : $\forall t \in J,\ \dfrac{\partial^k f}{\partial t^k}(x,t) = u_x^{(k)}(t)$.

De même soit $t \in J$ fixé. On note $v_t : x \mapsto f(x,t)$. Si v_t est dérivable sur I, on note :
$\forall x \in I,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = v_t'(x)$. On fixe t et on dérive la fonction f par rapport à la variable x.
Si v_t est k fois dérivable, on note : $\forall x \in I,\ \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = v_t^{(k)}(x)$.

Par exemple si $f : (x,t) \mapsto x^2t^3$, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} : (x,t) \mapsto 3x^2t^2 \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial x} : (x,t) \mapsto 2xt^3.$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 6x^2t,\quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial t^3}(x,t) = 6x^2$ et $\dfrac{\partial^k f}{\partial t^k}(x,t) = 0$, pour $k \geq 4$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 2t^3\ \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = 0$ pour $k \geq 3$.

Rappelons la caractérisation séquentielle de la limite. Soit $h : I \to \mathbb{C}$, une fonction avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On a $\lim\limits_a h = \ell$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de I qui tend vers a, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} h(x_n) = \ell$.

1 Continuité

Proposition 1.0.1 (Continuité de $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$) *Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.) On suppose que*

(i) [Continuité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.

(ii) [Régularité par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

(iii) [Domination] Il existe une fonction φ continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

Démonstration :

Remarque 1.0.1
1. *L'hypothèse de domination assure l'intégrabilité de* $t \mapsto f(x,t)$.
2. *Bien vérifier que la fonction de domination* φ *soit indépendante de* x.
3. *L'hypothèse de domination est essentielle : la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-tx}dt$ *n'est pas continue en* 0, *étant donné que* $F(0) = 0$ *alors que pour tout* $x > 0$:
$F(x) = \left[-e^{-tx}\right]_{t=0}^{+\infty} = 1$. *En fait on ne peut pas dominer* $t \mapsto xe^{-tx}$ *par une fonction intégrable indépendante de* x.

Exemple 1.0.1
1. *Montrer que la fonction* $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+ixt)}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_0^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}dt$.

Parfois l'hypothèse de domination est impossible à obtenir sur I tout entier. Voici une adaptation de la proposition précédente :

Proposition 1.0.2 (Continuité de $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ avec domination locale) *Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.) On suppose que*

(i) [Continuité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.

(ii) [Régularité par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

(iii) [Domination locale] Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, il existe une fonction φ continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

Démonstration : Soit $x_0 \in I$. Il existe un segment $[a,b]$ non réduit à un point tel que : $x_0 \in [a,b] \subset I$, avec x_0 dans son intérieur si x_0 n'est pas borne de I. Grâce à la proposition 1.0.1, $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ est continue sur $[a,b]$ et donc en particulier en x_0. Ceci étant valable pour tout x_0 de I, on a donc la continuité sur I tout entier.

Exemple 1.0.2 *Pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.*

1. *Peut-on trouver une fonction φ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{e^{-2t}}{x+t} \right| \leq \varphi(t)$?*
2. ***(CCP 50)** Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.*
3. *Étudier la monotonie de F sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Proposition 1.0.3 (Continuité de $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ définie sur un EVN) *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times J$, où A est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

(i) Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.

(ii) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

(iii) Il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times J \quad |f(x,t)| \ \leq \ \varphi(t).$$

Alors pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J, et la fonction F définie sur A par $F(x) = \int_J f(x,t)\,dt$ est continue sur A.

L'hypothèse de domination peut être remplacée par une hypothèse de domination au voisinage de tout point :
(iii bis) pour tout $a \in A$, il existe un voisinage V de a dans A (par exemple une boule fermé $\overline{B}(a,r)$) et une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in V \times J \quad |f(x,t)| \ \leq \ \varphi(t).$$

Démonstration : Identique aux deux propositions précédentes.

Exemple 1.0.3 *Montrer que $F : z \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-z\sqrt[3]{t}}}{1+it^{3/4}}dt$ est continue sur $H = \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\}$.*

Théorème 1.0.1 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu) *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in I}$ une famille de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle J. Soit $\lambda_0 \in \overline{I}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :*

1. *pour tout $\lambda \in I$, la fonction f_λ est continue par morceaux sur J ;*
2. *pour tout $u \in J$, on a : $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} f_\lambda(u) = f(u)$, et la fonction f ainsi définie est continue par morceaux sur J ;*

3. *(Domination) il existe une fonction φ continue par morceaux positive et intégrable sur J telle que pour tout $\lambda \in I$ et pour tout $u \in J$: $|f_\lambda(u)| \leq \varphi(u)$ (hypothèse de domination).*

Alors, les fonctions f_λ et leur limite f sont intégrables sur J et :

$$\int_J \lim_{\lambda \to \lambda_0} f_\lambda(u)du \;=\; \lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_J f_\lambda(u)du = \int_J f(u)du.$$

Démonstration : Pour $\lambda \in I$, la majoration $|f_\lambda| \leq \varphi$ prouve l'intégrabilité de f_λ sur J.
Utilisons la caractérisation séquentielle d'existence d'une limite et le théorème de convergence dominé. Soit $\lambda_0 \in \overline{I}$ un point adhérent à I (dans $\overline{\mathbb{R}}$) et $(t_n)_n$ une suite de points de I convergeant vers λ_0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la fonction g_n définie sur J par : $g_n(u) = f_{t_n}(u)$. Alors :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue par morceaux sur J ;
2. la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge simplement sur J vers la fonction f ;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in J$, $|g_n(u)| \leq \varphi(u)$.

D'après le théorème de convergence dominée, la fonction f est intégrable sur J et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_J g_n \;=\; \int_J f$, c'est-à-dire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_J f_{t_n} \;=\; \int_J f$.

D'après la caractéristion séquentielle de l'existence d'une limite : $\displaystyle\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_J f_\lambda \;=\; \int_J f \;=\; \int_J \lim_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda$.

Remarque 1.0.2

1. *(IMPORTANT) Ce résultat sera souvent appliqué lorsque l'on cherchera $\displaystyle\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_J f(\lambda,t)dt$. Il suffira de poser $f_\lambda : t \mapsto f(\lambda,t)$.*
2. *Ce résultat sert surtout lorsque $\lambda_0 = \pm\infty$, car sinon on pourra appliquer le plus souvent les propositions précédentes.*

   Si λ_0 est réel, ce théorème permettra par exemple de prolonger par continuité $\lambda \mapsto \displaystyle\int_J f(\lambda,t)dt$ en λ_0.
3. *Si $\lambda_0 = +\infty$ la domination sur un intervalle du type $[a, +\infty[$, suffit car nous cherchons une limite en $+\infty$.*

Exemple 1.0.4

1. *Pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t}dt$.*
   (a) ***(CCP 50)*** *Montrer que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.*
   (b) ***(CCP 50)*** *Déterminer un équivalent de F au voisinage de $+\infty$.*
   (c) *Déterminer un équivalent de F au voisinage de 0.*

2. *Soit* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ *telle que* $\lim\limits_{+\infty} f = l_\infty$ *et* $\lim\limits_{0^+} f = l_0$ *soient des réels. On pose* $L(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$, *pour* $p \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) *Montrer que* L *est définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(on pourra montrer que* f *est bornée sur* $\mathbb{R}_+^*$*).*
   (b) *Montrer que* $\lim\limits_{p\to+\infty} pL(p) = l_0$ *et* $\lim\limits_{p\to 0^+} pL(p) = l_\infty$.

2 Dérivabilité

Proposition 2.0.1 (Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$**)** ***(Énoncé CCP 30)*** *Soit* f *une fonction définie sur* $I \times J$ *à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *(*I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$.*) On suppose que*

(i) *[Dérivabilité par rapport au paramètre] Pour tout* $t \in J$, *la fonction* $x \longmapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I.

(ii) *[Régularité de* f *par rapport à la variable d'intégration] Pour tout* $x \in I$, *la fonction* $t \longmapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux et intégrable sur* J.

(iii) *[Régularité de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *par rapport à la variable d'intégration] Pour tout* $x \in I$, *la fonction* $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* J.

(iv) [Domination] Il existe une fonction φ continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_J f(x,t)dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et* $\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$

Démonstration : Soit $x_0 \in I$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite nulle avec tous les h_n non nuls.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{g(x_0+h_n)-g(x_0)}{h_n} = \displaystyle\int_J \frac{f(x_0+h_n,t)-f(x_0,t)}{h_n}dt$. On note alors f_n la fonction $t \longmapsto \dfrac{f(x_0+h_n,t)-f(x_0,t)}{h_n}$ définie sur J.

- D'après (i), les fonctions f_n sont continues par morceaux sur J et intégrables.
- D'après (ii), la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $t \in J$ on a : $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ donc $f_n(t) = \dfrac{1}{h_n}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dx$.
  L'hypothèse de domination donne alors :
  $|f_n(t)| \leq \left|\dfrac{1}{h_n}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h_n} \varphi(t)dx\right| = \left|\dfrac{\varphi(t)}{h_n}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h_n} dx\right| = \varphi(t)$, car $\varphi(t)$ est indépendant de x.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_J f_n(t)dt = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt$, autrement dit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{g(x_0+h_n)-g(x_0)}{h_n} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt$. Le critère séquentiel montre que g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt$.

Exemple 2.0.1 *Soit* $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)dt$.

1. ***(CCP 30)*** *Montrer que* F *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. ***(CCP 30)*** *Trouver une équation différentielle* (E) *vérifiée par* F. *Résoudre* (E).
3. *Montrer que* F *est décomposable en série entière sur* $\mathbb{R}$ *directement, sans passer par le résultat de l'équation différentielle.*

Proposition 2.0.2 (Dérivation de $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$) *Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.) On suppose que*

- *(i) [Dérivabilité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*
- *(ii) [Régularité de f par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.*
- *(iii) [Régularité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.*
- *(iv) [Domination locale] Pour tout segment $[a,b] \subset I$, il existe une fonction φ continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que*

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_J f(x,t)dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et* $\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$

Démonstration : La preuve est semblable à celle de la proposition 1.0.2, car la dérivablité et la continuité sont des propriétés locales.

Exemple 2.0.2

1. *Montrer que* $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
2. *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.
3. *En déduire qu'il existe* C *dans* $\mathbb{R}$ *tel que :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = C - \operatorname{Arctan}(x)$.
4. *En déterminant* $\lim_{x \to +\infty} F(x)$, *en déduire l'expression de* F *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 2.0.1 *Ainsi dériver* $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ *permet d'avoir parfois une expression simple de* F' *ou d'avoir une équation différentielle vérifiée par* F*, ce qui nous permet d'avoir* F*.*

Corollaire 2.0.1 ($x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ **de classe** $\mathcal{C}^k$**)** *Soient* $f : I \times J \to \mathbb{K}$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$ *telles que*

(i) [Caractère $\mathcal{C}^k$ *en le paramètre] Pour tout* t *dans* J*,* $x \mapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I*.*

(ii) [Régularité des dérivées $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$ *par rapport à la variable d'intégration] Pour tout* j *dans* $[\![0, k-1]\!]$ *et pour tout* x *dans* I*,* $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *est continue par morceaux et intégrable sur* J*.*

(iii) [Régularité des dérivées $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ *par rapport à la variable d'intégration] Pour tout* x *dans* I*,* $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* J*.*

(iv) [Domination] Il existe une fonction φ_k *continue par morceaux sur* J*, à valeurs réelles positives, intégrable sur* J *telle que*

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_k(t).$$

(iv bis) [Domination locale] Pour tout segment $[a,b]$ *inclus dans* I*, il existe une fonction* φ_k *continue par morceaux sur* J*, à valeurs réelles positives, intégrable sur* J *telle que*

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J,\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_k(t).$$

Alors, $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I *et*

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \forall x \in I,\ g^{(j)}(x) = \int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt.$$

Démonstration : Démontrons cela par récurrence sur k dans le cas (iv) bis avec la domination locale.
Pour $k = 1$, c'est la proposition 2.0.2.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et on suppose la proposition pour k et on se donne f vérifiant les propriétés de l'énoncé pour $k+1$.
Montrons d'abord que g est de classe $\mathcal{C}^k$. Il ne reste que l'hypothèse de domination locale à vérifier. Soient $[a,b]$ un segment inclus dans I et φ_{k+1} à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que que : $\forall (x,t) \in [a,b] \times J,\ \left|\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)\right| \leq \varphi_{k+1}(t)$. Pour tout (x,t) de $[a,b] \times J$, on a : $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t) + \displaystyle\int_a^x \dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)dx$. Ainsi : $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + \displaystyle\int_a^x \left|\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)\right| dx \leq \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + \displaystyle\int_a^b \left|\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)\right| dx \leq \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + \displaystyle\int_a^b \varphi_{k+1}(t)dx = \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + (b-a)\varphi_{k+1}(t)$. On pose $\varphi_k : t \mapsto \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + (b-a)\varphi_{k+1}(t)$ et par hypothèses cette fonction est continue par morceaux et intégrable sur I. Ainsi grâce à l'hypothèse de récurrence au rang k, on a : g de classe $\mathcal{C}^k$ et $g^{(k)} = h = x \mapsto \displaystyle\int_J \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$. Montrons que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

- Pour x fixé dans I, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
- Pour t fixé dans J, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

- Pour x fixé dans I, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
- Il existe une fonction φ_{k+1} intégrable sur I telle que : $\forall (x,t) \in I \times J,\ \left|\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)\right| \leq \varphi_{k+1}(t)$.

La proposition 2.0.2, nous permet de dire que $h : x \mapsto \displaystyle\int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :
$\forall x \in I,\ g^{(k+1)}(x) = h'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)dt$.
Nous avons démontré la proposition au rang $k+1$, ce qui achève la récurrence.

Pour montrer la proposition avec l'hyptohèse (iv), comme celle-ci implique l'hypothèse de domination locale, on a le résultat.

Corollaire 2.0.2 ($x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ de classe $\mathcal{C}^\infty$) *Soient $f : I \times J \to \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ telles que*

i) [Caractère $\mathcal{C}^\infty$ en le paramètre] Pour tout t dans J, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

ii) [Régularité des dérivées $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout j dans $\mathbb{N}$ et pour tout x dans I, $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

iii) [Domination] Pour tout j de $\mathbb{N}$, existe une fonction φ_j continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\right| \leq \varphi_j(t).$$

OU

iii) bis [Domination locale] Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, pour tout j de $\mathbb{N}$, existe une fonction φ_j continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J,\ \left|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\right| \leq \varphi_j(t).$$

Dans ce cas g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et : $\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ g^{(j)}(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt$.

Remarque 2.0.2

1. *La domination locale s'utilise souvent lorsque I est un intervalle ouvert ou non borné.*
2. *Dans le corollaire précédent, on peut avoir la domination qu'à partir d'un certain rang k, mais il faut montrer alors que les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ sont intégrables sur J pour $j < k$.*

Exemple 2.0.3

1. *Pour x dans $\mathbb{R}_+$, on pose $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt$. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner ses dérivées successives. Est-ce que S est DSE au voisinage de 0 ?*

2. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt.$

(a) Déterminer le domaine de définition D *de* F*.*

(b) Montrer que F *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*

(c) Montrer que F *est l'unique solution sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de* $y'' + y = 1/x$ *admettant une limite en* $+\infty$*.*

3. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. Montrer que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3 Compléments : thèmes d'étude

3.1 Fonction Gamma

On pose : $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. On rappelle $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. **(CCP 29)** Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. **(CCP 29 pour $\mathcal{C}^1$)** Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $\Gamma^{(j)}(x)$ sous forme d'intégrale, pour $j \in \mathbb{N}$.
3. **(CCP 29)** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
4. En déduire :
   (a) $\Gamma(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

(b) un équivalent de Γ en 0^+.

5. Étudier les variations de Γ.
6. Déterminer $\lim_{+\infty} \Gamma$.
7. Montrer que Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
8. Déterminer $\Gamma(1/2)$.

3.2 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \int_a^b g(t) \sin(xt) dt = 0$.

Ce résultat est encore valable pour g continue par morceaux sur $[a, b]$.

• Commençons par montrer le résultat pour g constante : $\forall d \in \mathbb{R}, \ \int_a^b d\sin(xt)dt = \frac{d\cos(xa) - d\cos(xb)}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

• Montrons maintenant le résultat pour une fonction en escalier. Soit $(c_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à g et on note $d_i = g|_{]c_i,c_{i+1}[}$, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$.

On a donc : $\int_a^b g(t)\sin(xt)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} d_i \sin(xt)dt \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, car $\int_{c_i}^{c_{i+1}} d_i \sin(xt)dt \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, grâce au premier point, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$.

• Maintenant pour g continue par morceaux. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par densité des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$, il existe ψ une fonction en escalier telle que $\|g - \psi\|_\infty \leq \varepsilon$. On a donc :

$\left|\int_a^b (g(t) - \psi(t)|\sin(xt)dt\right| \leq \int_a^b |g(t) - \psi(t)|.|\sin(xt)|dt \leq \int_a^b \|g - \psi\|_\infty \leq (b-a)\varepsilon$.

On a grâce au deuxième point : $\lim_{x\to+\infty} \int_a^b \psi(t)\sin(xt)dt = 0$. Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in [A, +\infty[, \ \left|\int_a^b \psi(t)\sin(xt)dt\right| \leq \varepsilon$.

Ainsi pour $x \geq A$, on a $\left|\int_a^b g(t)\sin(xt)dt\right| = \left|\int_a^b (g(t) - \psi(t)\sin(xt)dt + \int_a^b \psi(t)\sin(xt)dt\right| \leq \left|\int_a^b (g(t) - \psi(t)\sin(xt)dt\right| + \left|\int_a^b \psi(t)\sin(xt)dt\right| \leq (b-a+1)\varepsilon$.

On a donc : $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, \ x \geq A \Rightarrow \left|\int_a^b g(t)\sin(xt)dt\right| \leq (b-a+1)\varepsilon$, d'où le résultat.

3.3 Produit de convolution

Soient f une fonction continue, à valeurs réelles et intégrable sur $\mathbb{R}$ et g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs réelles telle que pour tout k de $\mathbb{N}$, la fonction $g^{(k)}$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornées sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$.

1. Montrer que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que : $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ (f * g)(x) = (g * f)(x)$.
3. Montrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer ses dérivées successives.
4. Montrer que si $\lim_{+\infty} g = 0$, alors $\lim_{+\infty} f * g = 0$.
5. Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées sont bornées. Montrer que l'application $T : g \mapsto f * g$ est continue de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.
6. Montrer que si f et g sont nulles en dehors d'un segment $[-A, A]$, alors $f * g$ est nulle en dehors d'un segment $[-B, B]$.
7. Si on suppose maintenant f et g que continues et dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, montrer que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\|f * g\|_\infty \leq \frac{1}{2}(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$, avec pour rappel : $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt}$.