

# 1 Dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles

## 1.1 Définition et premières propriétés

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Dans tout ce paragraphe,  $F$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  tel que  $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$ .

On rappelle que dans ce cas, toutes les normes sur  $F$  sont équivalentes, donc la notion de convergence est indépendante de celle-ci.

**Définition 1.1.1 (Dérivée en un point)** Soit  $f : I \rightarrow F$  une application et soit  $t_0 \in I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $t_0$  si :  $\lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) \right)$  existe.

Dans ce cas, cette limite est appelée la dérivée de  $f$  en  $t_0$  (ou le vecteur dérivé de  $f$  en  $t_0$ ), et on la note  $f'(t_0)$ .

**Remarque 1.1.1** Lorsque  $F = \mathbb{R}^2$  ou  $F = \mathbb{R}^3$  et que la fonction  $f$  représente le mouvement d'un point matériel en fonction du temps, le vecteur  $f'(t_0)$  représente la vitesse instantanée du point à l'instant  $t_0$ .

**Définition 1.1.2 (Dérivée à gauche et à droite)** Soit  $f : I \rightarrow F$  et  $t_0 \in I$ .

1. Si  $t_0 \neq \sup I$ , on dit que  $f$  est dérivable à droite en  $t_0$  lorsque :  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \left( \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) \right)$  existe.  
Dans ce cas, on note  $f'_d(t_0)$  cette limite et on l'appelle la dérivée de  $f$  à droite en  $t_0$ .
2. Si  $t_0 \neq \inf I$ , on dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $t_0$  lorsque :  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \left( \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) \right)$  existe.  
Dans ce cas, on note  $f'_g(t_0)$  cette limite et on l'appelle la dérivée de  $f$  à gauche en  $t_0$ .

**Remarque 1.1.2** De façon équivalente,  $f$  est dérivable à droite en  $t_0$  si  $f|_{I \cap [t_0, +\infty[}$  est dérivable en  $t_0$ .

**Proposition 1.1.1 (Lien entre dérivabilité et dérivabilité à gauche et à droite)** Soient une fonction  $f : I \rightarrow F$  et  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ .

Alors  $f$  est dérivable en  $t_0$  si et seulement si  $f$  est dérivable à droite et à gauche en  $t_0$  et  $f'_d(t_0) = f'_g(t_0)$ .

*Démonstration :* Provient du fait que d'avoir une limite en un point est équivalent à avoir des limites identiques à gauche et à droite de ce point.

**Proposition 1.1.2 (Lien entre dérivabilité et développement limité à l'ordre un)** Soient  $f \in \mathcal{F}(I, F)$  et  $t_0 \in I$ . Alors les énoncés suivants sont équivalents :

- (i)  $f$  est dérivable en  $t_0$  ;
- (ii) il existe  $l \in F$  et  $\varepsilon \in \mathcal{F}(I, F)$  tels que :

$$\forall t \in I, f(t) = f(t_0) + (t - t_0)l + (t - t_0)\varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = 0$$

De plus, lorsque l'une de ces conditions est vérifiée,  $l = f'(t_0)$ .

*Démonstration* : • Montrons (i)  $\Rightarrow$  (ii).

On suppose  $f$  dérivable en  $a$ . Posons  $l = f'(t_0)$  et pour  $t \in I$  :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-t_0} (f(t) - f(t_0)) - f'(t_0) & \text{si } t \neq t_0 \\ 0 & \text{si } t = t_0 \end{cases}$$

On vérifie que pour tout  $t \in I$ ,  $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$ . De plus, par définition de la dérivabilité, on a :  $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = 0$ .

• Montrons (ii)  $\Rightarrow$  (i).

On suppose qu'il existe  $l \in F$  et une fonction  $\varepsilon \in \mathcal{F}(I, F)$  tels que :

$$\forall t \in I, f(t) = f(t_0) + (t - t_0)l + (t - t_0)\varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = 0$$

Alors, pour tout  $t \in I \setminus \{t_0\}$ , on a :  $\frac{1}{t-t_0} (f(t) - f(t_0)) = l + \varepsilon(t)$ .

Par suite,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t-t_0} (f(t) - f(t_0)) = l$ , ce qui prouve que  $f$  est dérivable en  $t_0$  et  $f'(t_0) = l$ .

**Corollaire 1.1.1 (Dérivable implique continue)** Soient  $a \in I$  et une fonction  $f : I \rightarrow F$  dérivable en  $t_0$ . Alors  $f$  est continue en  $t_0$ .

*Démonstration* : D'après la proposition précédente, il existe  $l \in F$  et  $\varepsilon \in \mathcal{F}(I, F)$  tels que :

$\forall t \in I, f(t) = f(t_0) + (t - t_0)l + (t - t_0)\varepsilon(t)$ . En faisant tendre  $t$  vers  $t_0$ , on a :  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$ , ce qui prouve la continuité en  $t_0$ .

**Remarque 1.1.3 ATTENTION**, la réciproque est fautive.

Soient  $y \in F$  et  $f : t \mapsto \|ty\|_F$ . Montrer que  $f$  est continue en 0, puis donner une condition nécessaire et suffisante sur  $y$  pour que  $f$  soit dérivable en 0.

**Proposition 1.1.3 (Dérivation et coordonnées)** Soient  $f \in \mathcal{F}(I, F)$  et  $t_0 \in I$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $F$ . On a donc  $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$ , avec  $(f_1, \dots, f_n)$  les applications coordonnées de  $f$ . Alors les énoncés suivants sont équivalents :

(i)  $f$  est dérivable en  $t_0$ .

(ii) Toutes les applications coordonnées  $f_i$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont dérivables en  $t_0$ .

Dans ce cas,

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^n f'_i(t_0) e_i.$$

*Démonstration* : Soit  $t \in I$ , avec  $t \neq t_0$ . On a :  $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} e_i$  (\*). On a vu

que dans un espace vectoriel dimension finie, une fonction converge en  $t_0$  si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées convergent. Ainsi  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$  existe si et seulement si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0}$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Le passage à la limite quand  $t$  tend vers  $t_0$  dans (\*) donne la relation.

**Remarque 1.1.4** L'étude de la dérivabilité d'une fonction à valeurs dans  $F$  de dimension finie  $n \geq 1$  se ramène à l'étude de la dérivabilité de  $n$  fonctions d'une variable réelle à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Exemple 1.1.1** Soient  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $t_0$  et  $w \in F$ . La fonction vectorielle  $f : t \mapsto u(t)w$  est dérivable en  $t_0$  car :

De plus  $f'(t_0) =$

**Définition 1.1.3 (Fonction dérivée)** Si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ , on dit qu'elle est dérivable sur  $I$ .

De plus, dans ce cas, l'application de  $I$  dans  $E : t \mapsto f'(t)$  est appelée fonction dérivée de  $f$ , et notée  $f'$ , ou  $D(f)$ , ou  $\frac{df}{dt}$ .

**Exemple 1.1.2** Dériver sur  $\mathbb{R}$  la fonction vectorielle  $R : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ .

**Corollaire 1.1.2** Soit  $f : I \rightarrow F$ . On suppose que  $f$  est continue sur  $I$  et dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$ . Alors,

$$f \text{ est constante sur } I \text{ si et seulement si : } \forall t \in \overset{\circ}{I}, f'(t) = 0.$$

*Démonstration* : Il suffit d'appliquer la propriété déjà vue pour les fonctions à valeurs réelles (ou complexes) aux applications coordonnées de  $f$ .

## 1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

**Proposition 1.2.1 (Dérivation d'une combinaison linéaire)** Soient  $f$  et  $g$  des applications de  $I$  dans  $E$  dérivables en un point  $t_0 \in I$  (resp. dérivable sur  $I$ ). Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux scalaires. Alors  $\alpha f + \beta g$  est dérivable en  $t_0$  (resp. dérivable sur  $I$ ) et :

$$(\alpha f + \beta g)'(t_0) = \alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0) \quad (\text{resp. } (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g').$$

*Démonstration* : Posant  $h = \alpha f + \beta g$ , on passe à la limite quand  $t$  tend vers  $t_0$  dans l'égalité :

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \alpha \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} + \beta \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Les cas dérivables sur  $I$  s'en déduisent immédiatement.

**Remarque 1.2.1** On en déduit que l'ensemble des applications de  $I$  dans  $E$  dérivables sur  $I$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel noté  $\mathcal{D}^1(I, E)$  et que l'application  $f \mapsto f'$  est linéaire de  $\mathcal{D}^1(I, E)$  sur  $\mathcal{F}(I, E)$ .

**Proposition 1.2.2 (Dérivation d'une composée)** Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles réels,  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable en  $t_0 \in J$  (resp. sur  $J$ ) telle que  $\varphi(J) \subset I$ . Soit  $f : I \rightarrow F$  une fonction dérivable en  $u_0 = \varphi(t_0)$  (resp. sur  $I$ ). Alors  $f \circ \varphi$  est dérivable en  $t_0$  (resp. sur  $J$ ) et

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0) \cdot f'(\varphi(t_0)) \quad (\text{resp. } (f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)).$$

*Démonstration* : Écrivons le développement limité à l'ordre un de  $f$  au voisinage de  $u_0$  :  
 $f(u) - f(u_0) = (u - u_0)f'(u_0) + (u - u_0)\varepsilon(u)$ , avec  $\varepsilon : J \rightarrow F$  une fonction telle que  $\lim_{u \rightarrow u_0} \varepsilon(u) = 0$ .

On a donc :  $\forall t \in I, f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0)) = (\varphi(t) - \varphi(t_0))f'(u_0) + (\varphi(t) - \varphi(t_0))\varepsilon(\varphi(t))$ .

Pour  $t$  dans  $I$  avec  $t \neq t_0$ , on a :  $\frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))}{t - t_0} = \frac{(\varphi(t) - \varphi(t_0))}{t - t_0} f'(u_0) + \frac{(\varphi(t) - \varphi(t_0))}{t - t_0} \varepsilon(\varphi(t))$ .

Or  $\varphi$  est dérivable en  $t_0$ , donc elle y est aussi continue. Par composition de limites, on a :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(\varphi(t)) = \lim_{u \rightarrow u_0} \varepsilon(u) = 0, \text{ puis : } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))}{t - t_0} = \varphi'(t_0) f'(u_0).$$

**Remarque 1.2.2**  $\varphi'(t_0)$  est un scalaire ( $c$  est un réel) et  $f'(\varphi(t_0))$  est un vecteur de  $F$ , donc  $\varphi'(t_0) \cdot f'(\varphi(t_0))$  est la multiplication issue de la loi externe définie sur  $\mathbb{K} \times F$ .

**Proposition 1.2.3 (Dérivée et application linéaire)** Soit  $F, G$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie,  $u$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$ , et  $f$  une fonction dérivable en  $t_0 \in I$  (resp. sur  $I$ ) à valeurs dans  $F$ .

Alors  $u \circ f$  est dérivable en  $t_0$  (resp. sur  $I$ ) et :

$$(u \circ f)'(t_0) = u(f'(t_0)) \text{ (resp. } (u \circ f)' = u \circ f').$$

*Démonstration :* Pour tout  $t \in I \setminus \{t_0\}$ , on pose  $g = u \circ f$ .

$$\text{On a : } \frac{1}{t - t_0} (g(t) - g(t_0)) =$$

**Exemple 1.2.1** Soit  $u, v, w$  trois fonctions définies et dérivable sur  $I = [a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (avec

$a < b$ ). Montrer que  $g : x \mapsto \begin{vmatrix} u(a) & u(b) & u(x) \\ v(a) & v(b) & v(x) \\ w(a) & w(b) & w(x) \end{vmatrix}$  est dérivable sur  $I$  et exprimer sa dérivée.

**Proposition 1.2.4 (Dérivée et application bilinéaire)** Soient  $F$  et  $G$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimensions finies,  $f : I \rightarrow F, g : I \rightarrow G$  deux fonctions dérivables en  $t_0 \in I$  (resp. sur  $I$ ) et  $B$  une application bilinéaire de  $F \times G$  dans  $H$  (un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie). Alors :

(i) l'application  $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$  est dérivable en  $t_0$  (resp. sur  $I$ );

(ii) et on a la relation :

$$B(f, g)'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)) \text{ (resp. } B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g'))$$

*Démonstration :* Pour tout  $t \in I \setminus \{t_0\}$ , en posant  $\varphi = B(f, g)$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t - t_0} (\varphi(t) - \varphi(t_0)) &= \frac{1}{t - t_0} (B(f(t), g(t)) - B(f(t_0), g(t_0))) \\ &= \frac{1}{t - t_0} (B(f(t), g(t)) - B(f(t), g(t_0)) + B(f(t), g(t_0)) - B(f(t_0), g(t_0))) \end{aligned}$$

Soit encore, par bilinéarité de  $B$  :

$$\frac{1}{t - t_0} (\varphi(t) - \varphi(t_0)) = B\left(f(t), \frac{1}{t - t_0} (g(t) - g(t_0))\right) + B\left(\frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)), g(t_0)\right).$$

Puisque  $f$  est dérivable en  $t_0$ ,  $f$  est aussi continue en  $t_0$  et puisque  $g$  est aussi dérivable en  $t_0$ , on a donc :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0))\right) = f'(t_0) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{1}{t - t_0} (g(t) - g(t_0))\right) = g'(t_0).$$

Enfin, puisque  $F$  et  $G$  sont de dimensions finies, et  $B$  est bilinéaire sur  $F \times G$ ,  $B$  est continue sur  $F \times G$ . Par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{1}{t - t_0} (\varphi(t) - \varphi(t_0)) \right) = B(f(t_0), g'(t_0)) + B(f'(t_0), g(t_0)).$$

**Remarque 1.2.3** Soient  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $f : I \rightarrow F$  deux fonctions dérivables sur  $I$ . Alors  $\lambda f$  est dérivable sur  $I$  et :  $\forall t \in I, (\lambda f)'(t) =$

**Exemple 1.2.2** Soient  $M$  et  $N$  deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Déterminer la dérivée de  $u \mapsto M(u)N(u)$ .

**Corollaire 1.2.1 (Dérivation d'un produit scalaire)** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables en  $t_0$  (resp. sur  $I$ ). Si  $F$  est un espace euclidien, alors  $\langle f, g \rangle : t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$  est dérivable en  $t_0$  (resp. sur  $I$ ) et

$$\langle f, g \rangle'(t_0) =$$

*Démonstration :* L'application  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  est bilinéaire sur  $F^2$  qui est de dimension finie, donc :  $\forall t \in I, \langle f, g \rangle'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle$ .

**Exemple 1.2.3** Soit  $f$  une fonction dérivable de  $I$  dans  $F$ , avec  $F$  un espace euclidien.

1. Si  $h = \|f\|^2$ , alors :  $\forall t \in I, h'(t) =$
2. On en déduit que  $f$  est de norme constante si et seulement si :
3. On suppose que :  $\forall t \in I, f(t) \neq 0$ . Montrer que  $k : t \mapsto \|f(t)\|$  est dérivable sur  $I$  et déterminer  $k'$ .

**Proposition 1.2.5 (Dérivation d'une application multilinéaire)** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $F_1, \dots, F_p, G$  des espaces vectoriels de dimension finie. Soient  $M : F_1 \times \dots \times F_p \rightarrow G$  une application multilinéaire et  $f_i : I \rightarrow F_i$  des applications dérivables en  $t_0$  (resp. sur  $I$ ), pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Alors l'application  $M(f_1, \dots, f_p) : t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t))$  est dérivable en  $t_0$  (resp. sur  $I$ ) et

$$M(f_1, \dots, f_p)'(t_0) =$$

*Démonstration :* On a  $\frac{1}{t - t_0} (M(f_1(t), \dots, f_p(t)) - M(f_1(t_0), \dots, f_p(t_0))) =$   
 $\sum_{i=1}^p M \left( f_1(t_0), \dots, f_{i-1}(t_0), \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0}, f_{i+1}(t_0), \dots, f_p(t_0) \right)$  et on conclut comme dans la preuve de la proposition 1.2.4.

**Corollaire 1.2.2 (Dérivation du déterminant)** Soient  $f_1, \dots, f_n$  sont des fonctions dérivables en  $t_0$  (resp. sur  $I$ ) de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $F$  muni d'une base  $\mathcal{B}$ , alors la fonction  $\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n) : t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), \dots, f_n(t))$  est dérivable en  $t_0$  (resp. sur  $I$ ) et :

$$\det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, \dots, f_n)'(t_0) =$$

$$\det_{\mathcal{B}}(f_1'(t_0), f_2(t_0), \dots, f_n(t_0)) + \det_{\mathcal{B}}(f_1(t_0), f_2'(t_0), \dots, f_n(t_0)) + \dots + \det_{\mathcal{B}}(f_1(t_0), f_2(t_0), \dots, f_n'(t_0)).$$

*Démonstration :*  $\det : F^p \rightarrow \mathbb{R}$  est multilinéaire et  $F$  est de dimension finie.

### 1.3 Dérivées successives

**Définition 1.3.1 (Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty$ )** Soit  $f : I \rightarrow F$  une fonction. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Sous réserve d'existence, la dérivée  $k^{\text{ème}}$  de  $f$  est définie par

$$f^{(0)} = f, f^{(k+1)} = (f^{(k)})'.$$

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si  $f^{(k)}$  existe et est continue. Elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si ses dérivées à tout ordre existent, ce qui est équivalent à être de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ .

**Remarque 1.3.1**  $(f^{(n)})^{(m)} = f^{(m+n)}$ .

**Proposition 1.3.1 (Dérivation coordonnée par coordonnée)** Soient  $f \in \mathcal{F}(I, F)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $F$ . On a donc  $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$ , avec  $(f_1, \dots, f_n)$  les applications coordonnées de  $f$ . Alors les énoncés suivants sont équivalents :

(i)  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ .

(ii) Toutes les applications coordonnées  $f_i$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$

Dans ce cas, on a :

$$\forall l \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall t \in I, f^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^n f_i^{(l)}(t) e_i.$$

*Démonstration* : Pour  $k = 1$ , nous avons déjà fait la preuve. Ensuite le formule se généralise par récurrence.

**Exemple 1.3.1** 1. Soient  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  (avec  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) et  $w \in F$ . La fonction vectorielle  $f : t \mapsto u(t)w$  est  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et :  $\forall l \leq k, \forall t \in I, f^{(l)}(t) =$

2. Déterminer la dérivée  $n$ -ème de  $f : t \mapsto e^t \cos(t)$ .

**Proposition 1.3.2 (Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ )** Soient  $f, g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  (avec  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ), définies sur  $I$  à valeurs dans des espaces vectoriels de dimension finie,  $\lambda$  un réel,  $L$  une application linéaire et  $B$  une application bilinéaire. Alors,  $\lambda f + g, L \circ f$  et  $B(f, g)$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  et pour  $l \leq k$  :

1.  $(\lambda f + g)^{(l)} = \lambda f^{(l)} + g^{(l)}$ .

2.  $(L \circ f)^{(l)} = L \circ (f^{(l)})$ .

3. (**CCP 3 Énoncé+démonstration dans le cas réel**)  $B(f, g)^{(l)} = \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} B(f^{(j)}, g^{(l-j)})$

(formule de Leibniz).

*Démonstration* : Les trois points se montrent par récurrence. La dernière démonstration est sur le même principe que la formule de Leibniz vue en sup.

Démontrons la formule de Leibniz.

Pour CCP 3, dans le cas réel, on prend donc  $B : (x, y) \mapsto xy$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et il faut remplacer  $B(f^{(p)}, g^{(q)})$  par  $f^{(p)}g^{(q)}$ . Réécrire la preuve dans ce cas est un bon exercice.

Démontrons le résultat par récurrence. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $(P_k)$  : si  $f : I \rightarrow F$  et  $g : I \rightarrow G$  sont des applications de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $F$  et  $G$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $B : F \times G \rightarrow H$

est une application bilinéaire (avec  $H$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie), alors  $B(f, g)$  est de

$$\text{classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \text{ et } (B(f, g))^{(k)} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} B(f^{(p)}, g^{(k-p)}).$$

• Pour  $k = 0$ , cela provient du fait qu'en dimension finie les applications bilinéaires sont continues sur  $I$  et donc par composition  $B(f, g)$  est continue et  $B(f, g)^{(0)} = B(f, g) = \sum_{p=0}^0 \binom{0}{p} B(f^{(p)}, g^{(0-p)})$ .

• Soit  $k \in \mathbb{N}$  et on suppose  $(P_k)$ . Soient  $f : I \rightarrow F$  et  $g : I \rightarrow G$  sont des applications de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ , et  $B : F \times G \rightarrow H$  est une application bilinéaire.

Grâce à  $(P_k)$  comme  $f$  et  $g$  sont aussi de classe  $\mathcal{C}^k$ , alors  $B(f, g)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et

$$(B(f, g))^{(k)} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} B(f^{(p)}, g^{(k-p)}). \text{ Soit } p \in \llbracket 0, k \rrbracket. \text{ Les applications } f^{(p)} \text{ et } g^{(k-p)}, \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1,$$

donc dérivables et grâce à la proposition 1.2.4,  $B(f^{(p)}, g^{(k-p)})$  est dérivable et :

$(B(f^{(p)}, g^{(k-p)}))' = B(f^{(p+1)}, g^{(k-p)}) + B(f^{(p)}, g^{(k-p+1)})$ . Les fonctions  $f^{(p+1)}$ ,  $g^{(k-p)}$ ,  $f^{(p)}$  et  $g^{(k-p+1)}$  sont continues sur  $I$ , alors le raisonnement fait pour  $k = 0$  nous dit que  $B(f^{(p+1)}, g^{(k-p)}) + B(f^{(p)}, g^{(k-p+1)})$  est continue sur  $I$  et donc  $B(f^{(p)}, g^{(k-p)})$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . La fonction  $(B(f, g))^{(k)}$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  par combinaison linéaire et donc  $B(f, g)$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $I$ . De plus :

$$(B(f, g))^{(k+1)} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (B(f^{(p)}, g^{(k-p)}))' = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (B(f^{(p+1)}, g^{(k-p)}) + B(f^{(p)}, g^{(k-p+1)})) =$$

$$\binom{k}{k} B(f^{(k+1)}, g^{(0)}) + \binom{k}{0} B(f^{(0)}, g^{(k+1)}) + \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} B(f^{(p+1)}, g^{(k-p)}) + \sum_{p=1}^k B(f^{(p)}, g^{(k-p+1)}) =$$

$$B(f^{(k+1)}, g^{(0)}) + B(f^{(0)}, g^{(k+1)}) + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l-1} B(f^{(l)}, g^{(k-(l-1))}) + \sum_{p=1}^k \binom{k}{p} B(f^{(p)}, g^{(k-p+1)}) =$$

$$\binom{k+1}{k+1} B(f^{(k+1)}, g^{(0)}) + \binom{k+1}{0} B(f^{(0)}, g^{(k+1)}) + \sum_{p=1}^k \left( \binom{k}{p-1} + \binom{k}{p} \right) B(f^{(p)}, g^{(k+1-p)}) =$$

$\sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} B(f^{(p)}, g^{(k+1-p)})$ , grâce à la formule du triangle de Pascal, ce qui donne la proposition pour  $k+1$  et qui achève la récurrence.

**Remarque 1.3.2** 1. L'ensemble  $\mathcal{C}^k(I, F)$  (avec  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $I$  dans  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

2. Pour  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ , et  $B : (x, y) \mapsto xy$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , le troisième point nous redonne la formule de Leibniz classique. En effet  $B(f^{(p)}, g^{(q)}) = f^{(p)}g^{(q)}$ , pour  $p, q$  dans  $\mathbb{N}$ .

**Exemple 1.3.2** 1. Soit  $u, v, w$  trois fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$  (avec  $a < b$ ). On suppose

$$\begin{vmatrix} u(a) & u(b) & u'(a) \\ v(a) & v(b) & v'(a) \\ w(a) & w(b) & w'(a) \end{vmatrix} = 0. \text{ Montrer qu'il existe } c \in ]a, b[ \text{ vérifiant } \begin{vmatrix} u(a) & u(b) & u''(c) \\ v(a) & v(b) & v''(c) \\ w(a) & w(b) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

2. (**CCP 3**) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer les dérivées  $n$ -èmes sur leurs ensembles de définition respectifs de  $g : x \mapsto e^{2x}$  et  $h : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ , puis en déduire celle de  $f : x \mapsto \frac{e^{2x}}{1+x}$ .

## 1.4 Dérivation des suites et séries de fonctions vectorielles

### 1.4.1 Extension des théorèmes de dérivation

Nous pouvons étendre les résultats sur la dérivation des suites et séries de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{K}$  à des fonctions à valeurs dans  $F$ .

**Proposition 1.4.1 (Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions)** 1. Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions à valeurs dans  $F$  telles que :

- pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  ;
- la suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  définie sur  $I$  à valeurs dans  $F$ .
- la suite  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction  $h$  définie sur  $I$  à valeurs dans  $F$ ,

alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et :  $f' = h$ , soit :  $\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = f'(x)$

et  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment de  $I$ .

2. Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions telle que

- pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  ;
- la suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ .
- la suite  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment  $[a, b]$  inclus  $I$  vers une fonction  $h$  définie sur  $I$  à valeurs dans  $F$ ,

alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et :  $f' = h$ , donc :  $\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = f'(x)$

et  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment de  $I$ .

*Démonstration :* 1. On se fixe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  de  $F$ . On décompose chaque fonction  $f_n$  dans cette base. On munit  $F$  de la norme  $N$ , définie par  $N\left(\sum_{i=1}^p x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^p |x_i|$ . Le choix d'une norme n'influence pas la notion de convergence en dimension finie, donc si on a convergence pour la norme  $N$ , nous l'aurons aussi pour toute norme sur  $F$ .

On note :  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \sum_{i=1}^p f_{n,i} e_i, f = \sum_{i=1}^p f_i e_i$  et  $h = \sum_{i=1}^p h_i e_i$ .

Comme les fonctions  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , alors toutes les fonctions coordonnées  $f_{n,i}$  le sont aussi

et on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, f'_n = \sum_{i=1}^p f'_{n,i} e_i$ .

Soit  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Soit  $x \in I$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ , alors la notion de convergence dans un espace vectoriel de dimension finie nous dit que l'on a convergence pour chaque coordonnée :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n,i}(x) = f_i(x)$ . Ainsi  $(f_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f_i$  sur  $I$ .

On a :  $\forall x \in I, |f'_{n,i}(x) - h_i(x)| \leq \sum_{k=1}^p |f'_{n,k}(x) - h_k(x)| = N(f'_n(x) - h(x)) \leq \|f'_n - h\|_\infty$ . Ainsi

on a  $\|f'_{n,i} - h_i\|_\infty \leq \|f'_n - h\|_\infty$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f'_n - h\|_\infty = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f'_{n,i} - h_i\|_\infty = 0$ . Donc  $(f'_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $h_i$  sur  $I$ .

Grâce aux résultats que l'on a vu sur les suites de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , les fonctions  $f_i$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , donc  $f$  aussi. De plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_{n,i}(x) = f'_i(x)$  et comme la notion de convergence dans un espace vectoriel de dimension finie est équivalente à la convergence pour chaque coordonnée, alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = f'(x)$ .

Par ailleurs la suite  $(f_{n,i})$  converge uniformément vers  $f_i$  sur chaque segment  $J$  de  $I$ . On a :

$\forall x \in J, N(f_n(x) - f(x)) = \sum_{k=1}^p |f_{n,k}(x) - f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^p \|f_{n,k} - f_k\|_{J,\infty}$ . On a donc :

$\|f_n - f\|_{J,\infty} \leq \sum_{k=1}^p \|f_{n,k} - f_k\|_{J,\infty}$  et comme pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_{n,k} - f_k\|_{J,\infty} = 0$ , alors :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{J,\infty} = 0$ , ce qui donne la convergence uniforme de  $(f_n)$  vers  $f$  sur  $J$ .

2. Même démonstration que pour les suites de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 1.4.2 (Dérivation terme à terme)** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions à valeurs dans  $F$ .

- pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .
- la série de fonction  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$
- la série  $\sum f'_n$  converge uniformément ou normalement sur  $I$  (ou sur tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $I$ ).

Alors la série de fonctions  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$ .

*Démonstration* : Même démonstration que pour les séries de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

### 1.4.2 Application à l'exponentielle

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de la norme  $\|\cdot\|_2$  (on rappelle  $\|A\|_2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2$ , avec  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ ) qui vérifie :

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$  (voir chapitre 7).

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie  $n$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Sur  $\mathcal{L}(E)$ , on définit la norme  $\|\cdot\|$  par :  $\forall f \in \mathcal{L}(E), \|f\| = \|\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\|_2$ .

Cette norme vérifie aussi :  $\forall f, g \in E, \|f \circ g\| \leq \|f\| \times \|g\|$  (\*).

**Proposition 1.4.3 (Dérivation de  $t \mapsto \exp(ta)$ )** Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ . L'application  $e_a : t \mapsto \exp(ta)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt}(\exp(ta)) =$$

*Démonstration* : Introduisons les fonctions  $u_n : \mathbb{R} \rightarrow E$  définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, u_n(t) = \frac{t^n}{n!} \cdot a^n.$$

- Chaque  $u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- La série  $\sum u_n$  converge simplement et sa somme est la fonction  $e_a$ .
- Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On a :

$$u'_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot a^n \text{ si } n \geq 1 \text{ et } u'_n(t) = 0 \text{ si } n = 0.$$

Soit  $[\alpha, \beta]$  un segment de  $\mathbb{R}$ . Soit  $t \in [\alpha, \beta]$  et on pose  $M = \max(|\alpha|, |\beta|)$ . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u'_n(t)\| \leq \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} \|a^n\| \leq \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} \|a\|^n = \frac{(M\|a\|)^{n-1}}{(n-1)!} \|a\|,$$

grâce à la propriété (\*) de la norme  $\|\cdot\|$ .

On a donc :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u'_n\|_{[\alpha, \beta], \infty} \leq \frac{(M\|a\|)^{n-1}}{(n-1)!} \|a\|$ . Or, on sait que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum \frac{x^n}{n!}$  converge

donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{(M\|a\|)^{n-1}}{(n-1)!}$  converge.

Par comparaison de séries à termes positifs, on obtient la convergence normale de  $\sum u'_n$  sur  $[\alpha, \beta]$ .

Finalement, par convergence uniforme sur tout segment de  $\mathbb{R}$ , on peut affirmer que  $e_a$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}, e'_a(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot a^{n+1} = a \circ \exp(t.a) = \exp(t.a) \circ a,$$

car l'application  $x \mapsto x \circ a$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$  qui est de dimension finie, donc continue, ce qui implique que :

$$\exp(t.a) \circ a = \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{t^n}{n!} \cdot a^n \right) \circ a = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{t^n}{n!} \cdot a^n \circ a = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{t^n}{n!} \cdot a^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot a^{n+1}.$$

**Proposition 1.4.4 (Dérivation de  $t \mapsto \exp(tA)$ )** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . L'application  $e_A : t \mapsto \exp(tA)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A \exp(tA) = \exp(tA)A.$$

*Démonstration :* Identique à la démonstration précédente.

**Remarque 1.4.1** Par récurrence, on obtient que  $t \mapsto \exp(t.a)$  et  $t \mapsto \exp(t.A)$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et que :  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \frac{d^p}{dt^p}(\exp(ta)) = a^p \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a^p$  et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \frac{d^p}{dt^p}(\exp(tA)) = A^p \exp(tA) = \exp(tA)A^p.$$

**Exemple 1.4.1** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Soit  $\psi : u \rightarrow (\exp(uA))^T \exp(uA)$ . Dériver  $\psi$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. On suppose que  $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA) \in O_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

## 2 Généralités sur les équations différentielles linéaires d'ordre un

Ici  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

## 2.1 Rappels de sup des équations différentielles linéaires du premier ordre

Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  trois fonctions définies sur un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Soit  $I$  un intervalle tel que pour tout  $t \in I$ ,  $\alpha(t) \neq 0$ . On cherche à identifier les fonctions  $y$  telles que pour tout  $t \in I$ ,  $\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$ .

Pour commencer on résout cette équation sur chaque intervalle  $I$  où  $\alpha$  ne s'annule pas, en cherchant les solutions de l'équation dite **normalisée** :

$$y'(t) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}y(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}.$$

Cette équation est équivalente à la première, car  $\alpha$  ne s'annule pas sur  $I$ .

Ceci explique l'intérêt d'avoir  $\alpha$  qui ne s'annule pas. Nous recollerons ensuite dans un deuxième temps les solutions trouvées sur chaque intervalle  $I$ , pour pouvoir avoir des solutions définies sur  $J$  tout entier. Ainsi pour toute résolution d'équation, on précisera bien sur quels intervalles on travaille.

Nous sommes donc amenés à résoudre dans un premier temps des équations du type

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t),$$

avec  $a = \beta/\alpha$  et  $b = \gamma/\alpha$ .

À partir de maintenant,  $a$  et  $b$  sont des fonctions continues définies sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

### 2.1.1 L'équation homogène

On résout tout d'abord l'équation sans second membre, ou l'équation homogène associée :

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, t \in I.$$

On rappelle que cette équation est équivalente sur  $I$  à  $\alpha y' + \beta y = 0$ .

**Proposition 2.1.1 (Solutions homogènes d'une équation du premier ordre)** *Les solutions de l'équation homogène que l'on appelle **solutions homogènes** sont les fonctions définies sur  $I$  de la forme  $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , où  $A$  est une primitive de  $a$ .*

*Soit  $t_0 \in I$ . On peut aussi écrire les solutions sous la forme*

$$t \mapsto \lambda e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}, \lambda \in \mathbb{K}.$$

*Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est*

$$\mathcal{S}_H = \{\lambda e^{-A}, \lambda \in \mathbb{K}\} = \{\mu y_H, \mu \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}(y_H),$$

*où  $y_H$  est une solution non nulle quelconque de l'équation homogène.*

**Exemple 2.1.1** 1. À connaître : soit  $c \in \mathbb{K}$ . Résoudre l'équation  $y' + cy = 0$  ( $E_1$ ).

2. (**CCP 42**) Soit  $(H) : 2xy' - 3y = 0$ . Résoudre  $(H)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### 2.1.2 Une solution particulière

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation différentielle  $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ ,  $t \in I$  (ou  $\alpha y' + \beta y = \gamma$ ). Pour cela, on utilise la méthode de **variation de la constante**.

On cherche une solution définie sur  $I$  de la forme  $t \mapsto \lambda(t)y_H(t)$ , où  $y_H$  est une solution non nulle de l'équation homogène.

On injecte ensuite cette solution particulière dans l'équation différentielle :

$$\lambda' y_H + \lambda y_H' + a \lambda y_H = b \Leftrightarrow \lambda' y_H + \lambda (y_H' + a y_H) = b \Leftrightarrow \lambda' y_H = b \quad (*)$$

car  $y_H$  est solution de l'équation homogène  $y_H' + a y_H = 0$ .

Ceci donne une expression de  $\lambda'$ , puis on trouve ainsi  $\lambda$  en intégrant. Sur  $I$ , on notera  $f : t \mapsto \lambda(t)y_H(t)$ , une solution particulière de l'équation (ne pas oublier de multiplier par  $y_H$  après avoir trouvé  $\lambda$ ). Vous pouvez retenir si vous le souhaitez l'expression  $\lambda' y_H = b$  et la redonner directement, mais faites très attention, cette expression n'est valable que pour l'équation normalisée :  $y' + a y = b$ .

Pour retrouver la relation (\*), pour éviter les calculs trop lourds, gardez les notations  $y_H$ , ne remplacez pas  $y_H$  par la solution trouvée.

Si vous regardez attentivement votre équation, parfois une solution particulière se voit (par exemple une fonction constante). Dans ce cas vous pouvez toujours dire : « vérifions que cette fonction est solution de notre équation différentielle ».

**Exemple 2.1.2** 1. Donner une solution particulière de  $y' - 2ty = 4t$  :

2. (CCP 42) Donner une solution particulière de  $(\mathcal{E}) : 2xy' - 3y = \sqrt{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### 2.1.3 Solution complète de l'équation différentielle

**Théorème 2.1.1 (Équations différentielles du premier ordre)** En notant  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions de l'équation homogène et  $f$  une solution particulière, l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}$  de l'équation générale (équation de départ  $\alpha y' + \beta y = \gamma$ ) sur chaque intervalle  $I$  est

$$\mathcal{S} = f + \mathcal{S}_H = \{f + g, g \in \mathcal{S}_H\} = \{f + \lambda y_H, \lambda \in \mathbb{K}\},$$

avec  $y_H$  une solution non nulle de l'équation homogène.

**Exemple 2.1.3** 1. (CCP 42) Résoudre  $(\mathcal{E}) : 2xy' - 3y = \sqrt{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , puis sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Résoudre sur les intervalles appropriés :  $x(1-x)y' - y = x$ .  
Chercher les solutions définies sur  $]0, +\infty[$ .

## 2.2 Équations différentielles d'ordre un dans un espace vectoriel

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On considère :

- une application  $a$  continue de  $I$  dans  $\mathcal{L}(E) : a : \begin{cases} I \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ t \mapsto a(t) \end{cases} ;$
- une application  $x$  dérivable de  $I$  dans  $E : x : \begin{cases} I \rightarrow E \\ t \mapsto x(t) \end{cases} ;$
- une application  $b$  continue de  $I$  dans  $E : b : \begin{cases} I \rightarrow E \\ t \mapsto b(t) \end{cases} .$

On désigne par  $a.x$  l'application de  $I$  dans  $E : a.x : \begin{cases} I \rightarrow E \\ t \mapsto a(t)(x(t)) \end{cases} .$

Soient  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  continue et  $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  continue également.

### Définition 2.2.1 (Équation différentielle linéaire d'ordre un)

- L'équation  $(\mathcal{E}) : x' = a.x + b$  est appelée équation linéaire du premier ordre .  
Une solution de cette équation est une application  $x$  dérivable de  $I$  dans  $E$ , telle que :

$$\forall t \in I \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t).$$

- L'application  $b$  est appelé second membre de  $(\mathcal{E})$ .
- On appelle équation homogène (ou sans second membre) associée à  $(\mathcal{E})$  l'équation :

$$(\mathcal{E}_0) : x' = a.x .$$

**Remarque 2.2.1** Une solution  $x$  de  $(\mathcal{E})$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . En effet l'application  $B : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \times E \rightarrow E \\ (a, x) \mapsto a(x) \end{cases}$  est bilinéaire et  $\mathcal{L}(E) \times E$  est de dimension finie, donc  $B$  est continue. Comme  $x$  est continue, car dérivable, alors par composition  $t \mapsto a(t)(x(t)) = B(a(t), x(t))$  est continue sur  $I$ . Comme  $b$  est continue sur  $I$ , alors par somme  $x'$  l'est aussi.

**Définition 2.2.2 (Système différentiel d'ordre un)** 1. On appelle système différentiel d'ordre un de taille  $n$  toute équation de la forme  $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ .

Avec les notations usuelles pour les coordonnées, l'équation s'écrit

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x'_2(t) = a_{2,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{2,n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases} .$$

2. Si  $B$  est nulle, le système  $X'(t) = A(t)X(t)$  est dit homogène.

3. Le système linéaire homogène associé à  $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$  est  $X'(t) = A(t)X(t)$ .

**Remarque 2.2.2 (IMPORTANTE)** En choisissant une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , l'équation différentielle  $(\mathcal{E})$  peut se représenter matriciellement par un système différentiel :  $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ , avec pour tout  $t$  de  $I : A(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a(t)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(b(t)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Le système différentiel homogène associé est  $X'(t) = A(t)X(t)$  et  $B$  représente le second membre.

**Exemple 2.2.1** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  le système différentiel :  $(S) : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + t \end{cases} .$

**Proposition 2.2.1 (Principe de superposition)** Soient deux équations différentielles :

$(\mathcal{E}_1) : x' = a.x + b_1$  et  $(\mathcal{E}_2) : x' = a.x + b_2$ .

Soient  $x_1$  et  $x_2$  des solutions des équations respectives  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_2)$ . Alors pour tout  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ . La fonction  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$  est solution de l'équation :

Nous avons le même résultat pour les systèmes différentiels, si  $X_1$  est solution de  $X' = AX + B_1$  et  $X_2$  est solution de  $X' = AX + B_2$ , alors  $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$  est solution de

Démonstration : On a  $x'_1 = a.x_1 + b_1$  et  $x'_2 = a.x_2 + b_2$  donc :

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)' = \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 = \lambda_1 (a.x_1 + b_1) + \lambda_2 (a.x_2 + b_2) = a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2).$$

**Exemple 2.2.2** Donner une solution de  $(S) : \begin{cases} x' &= x + y + 1 \\ y' &= y + 3t \end{cases}$ .

**Remarque 2.2.3** Soient  $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$  et  $B \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$  et  $X$  une solution de  $X' = AX + B$ .

Alors  $Re(X)$  est solution de  $X' = AX + Re(B)$  et  $Im(X)$  est solution de  $X' = AX + Im(B)$ .

## 2.3 Problème de Cauchy et structure de l'espace des solutions

### 2.3.1 Problème de Cauchy

**Définition 2.3.1 (Problème de Cauchy)** Soient  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in E$  et  $a, b, A, B$  des fonctions continues sur  $I$ .

On appelle problème de Cauchy la donnée :  $\begin{cases} \forall t \in I, & x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 & (*) \end{cases}$ .

Pour un système linéaire, cela se traduit par :  $\begin{cases} \forall t \in I, & X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 & (*) \end{cases}$ .

**Remarque 2.3.1** Les relation  $(*)$  s'appellent conditions initiales à l'instant  $t_0$ .

**Théorème 2.3.1 (Cauchy-Lipschitz)** Soient  $t_0 \in I$  et  $a, b, A, B$  des fonctions continues sur  $I$ .

Soit  $x_0 \in E$  Il existe une unique solution sur  $I$  de l'équation différentielle  $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$  vérifiant la condition  $x(t_0) = x_0$ .

Pour un système, soit  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , il existe une unique solution sur  $I$  de l'équation différentielle  $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$  vérifiant la condition  $X(t_0) = X_0$ .

Démonstration : Admis.

**Remarque 2.3.2** *Le théorème précédent dit que le problème de Cauchy de la définition 2.3.1 admet une unique solution.*

**Exemple 2.3.1** 1. Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux solutions distinctes de  $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$ , avec  $a$  et  $b$  continues sur  $I$ . Montrer que :  $\forall t \in I, x_1(t) \neq x_2(t)$ .

2. Soient  $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ ,  $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  une solution de  $X' = AX + B$ . Montrer que  $X$  est à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  si et seulement si  $X(t_0)$  est dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

3. Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une unique application  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $M(0) = I_n$  et :  $\forall t \in \mathbb{R}, M'(t) = SM(t)S$ .

### 2.3.2 Structure de l'espace des solutions

On note  $n = \dim(E)$ .

#### Proposition 2.3.1 (Structure des solutions d'une équation homogène)

• L'ensemble  $\mathcal{S}_H$  des solutions de l'équation différentielle homogène  $x' = a.x$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, E)$  de dimension  $n$ .

Précisément pour tout  $t_0 \in I$ , l'application  $\phi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_H & \rightarrow E \\ x & \mapsto x(t_0) \end{cases}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}_H$  sur  $E$ .

• Pour les systèmes différentiels, l'ensemble  $\mathcal{S}_H$  des solutions du système différentiel homogène  $X' = AX$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$  de dimension  $n$  et

$\phi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_H & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ Y & \mapsto Y(t_0) \end{cases}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}_H$  sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

Démonstration : Montrons que  $\mathcal{S}_H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, E)$  :

- La fonction nulle est solution de  $x' = a.x$ , donc  $\mathcal{S}_H$  est non vide.
- Soient  $x_1, x_2 \in \mathcal{S}_H$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a :  $(\lambda x_1 + x_2)' = \lambda x_1' + x_2' = \lambda a.x_1 + a.x_2 = a.(\lambda x_1 + x_2)$ . Ainsi  $\lambda x_1 + x_2$  est dans  $\mathcal{S}_H$ .

La bijectivité de  $\phi_{t_0}$  découle du théorème de Cauchy-Lipschitz (dans le cas  $b = 0$ ), sa linéarité est immédiate. C'est donc un isomorphisme et donc  $\mathcal{S}_H$  est un espace vectoriel de dimension  $\dim(E) = n$ .

**Remarque 2.3.3** Si pour une solution  $x$  de  $x' = a.x$ , il existe  $t_0 \in I$  tel que  $x(t_0) = 0$ , alors :

**Exemple 2.3.2** Soient  $x_1, \dots, x_n$  des solutions de  $(H) : x' = a.x$ , avec  $\dim(E) = n$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

1. Montrer que l'on a les équivalences entre les assertions suivantes :

(a)  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $\mathcal{S}_H$ .

(b) Il existe  $t_0 \in I$  tel que  $(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$  soit une base de  $E$ .

(c)  $\forall t \in I, \det_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \neq 0$ .

2. (a) Dans ce cas, montrer que toute application  $\varphi : I \rightarrow E$  dérivable s'écrit de manière unique :

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k, \text{ avec } \lambda_k : I \rightarrow \mathbb{R}, \text{ pour } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

(b) Montrer que :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall t \in I, \lambda_k(t) = \det_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, \underbrace{\varphi(t)}_{k\text{-ème place}}, \dots, x_n(t)) / \det_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t))$ .

(c) En déduire que les  $\lambda_k$  sont dérivables sur  $I$ .

**Corollaire 2.3.1 (Ensemble des solutions de  $x' = a.x + b$ )** Soit  $x_p$  une solution particulière de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}) : x' = a.x + b$ .

L'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E}) : x' = a.x + b$  est  $x_p + \mathcal{S}_H = \{x_p + x, x \in \mathcal{S}_H\}$ , avec  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée  $(\mathcal{E}_H) : x' = a.x$ .

C'est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^1(I, E)$  de direction  $\mathcal{S}_H$ .

Pour les systèmes différentiels, soit  $Y_p$  une solution particulière de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}) : Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ .

L'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E}) : Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$  est  $\{Y_p + Y, Y \in \mathcal{S}_H\}$ , avec  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée  $(\mathcal{E}_H) : Y'(t) = A(t)Y(t)$ .

*Démonstration* : On a les équivalences :  $z' = az + b \Leftrightarrow z' = az + x'_p - a.x_p \Leftrightarrow (z - x_p)' = a(z - x_p) \Leftrightarrow z - x_p \in \mathcal{S}_H$ .

## 2.4 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Dans ce paragraphe  $a$  est un endomorphisme de  $E$  et  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui ne dépend pas de  $t$ .

### 2.4.1 Résolution des systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

**Proposition 2.4.1 (Solutions de l'équation homogène)** Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Soit  $x_0 \in E$ . L'application  $\psi : t \mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0)$  est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' &= a.x \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}.$$

Pour les systèmes différentiels, soit  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . L'application  $\psi : t \mapsto \exp((t - t_0)A)X_0$  est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' &= AX \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}.$$

*Démonstration* : Soit  $\varphi : t \mapsto \exp((t - t_0)a)$ . Par composition de dérivation, nous avons :

$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = a \circ \exp((t - t_0)a)$ . Comme l'application  $\tau : u \mapsto u(x_0)$  est une application linéaire de  $\mathcal{L}(E)$  dans  $E$ , qui sont de dimension finie, alors :

$\forall t \in \mathbb{R}, \psi'(t) = (\tau \circ \varphi)'(t) = \tau(\varphi'(t)) = \varphi'(t)(x_0) = a(\exp((t - t_0)a)(x_0)) = a(\psi(t))$ . Ainsi  $\psi$  est solution de  $x' = a.x$ . De plus  $\psi(t_0) = \exp(0)x_0 = Id_E(x_0) = x_0$ . Ainsi l'unicité est donnée par le théorème de Cauchy Lipschitz.

**Exemple 2.4.1** 1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont positifs et soit  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  une solution de  $X' = AX$ . Montrer que si  $X(0)$  a tous ses coefficients positifs, alors  $X(t)$  aussi pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

2. Résoudre 
$$\begin{cases} x' &= x - \frac{y}{2} - z \\ y' &= -x + z \\ z' &= x - \frac{y}{2} - z \end{cases}, \text{ avec } x(0) = y(0) = z(0) = 1.$$

**Remarque 2.4.1 (IMPORTANTE)** Pour résoudre un système  $X' = AX$ , il est rare de passer par l'exponentielle, car l'expression de  $\exp(tA)$  peut être compliquée à calculer. Les paragraphes suivants donnent des méthodes lorsque  $A$  est diagonalisable ou trigonalisable.

**Corollaire 2.4.1 (Exponentielle de matrices/endomorphismes qui commutent)**

- Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $AB = BA$ . Alors :  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ .
- Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $uv = vu$ . Alors :  $\exp(u + v) = \exp(u) \exp(v)$ .

*Démonstration* : Montrons le cas matriciel.

**2.4.2 Résolution de  $X' = AX$  quand  $A$  est diagonalisable**

**Lemme 2.4.1 ( $X' = AX$ , avec  $A$  diagonale)** Soit  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . L'ensemble des solutions de

$$X' = AX \text{ soit } \begin{cases} x'_1(t) = \\ x'_2(t) = \\ \vdots \\ x'_n(t) = \end{cases} \text{ est donnée par}$$

*Démonstration* :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x'_i = \lambda_i x_i \Leftrightarrow \exists c_i \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, x_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$  et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

**Proposition 2.4.2 ( $X' = AX$ , avec  $A$  diagonalisable)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonalisable, de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (répétées suivant leurs multiplicités), et soient  $U_1, \dots, U_n$  des vecteurs propres associés. Alors une base de solutions de l'équation différentielle  $X'(t) = AX(t)$  est

$$(X_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} U_i)_{1 \leq i \leq n}.$$

Ces solutions sont définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Autrement dit l'ensemble des solutions est  $\text{Vect}(X_1, \dots, X_n) = \left\{ t \mapsto \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} U_i, C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K} \right\}$ .

**Remarque 2.4.2** (IMPORTANTE) Concrètement, si  $P$  est la matrice dont les colonnes sont  $U_1, \dots, U_n$ , alors  $A = PDP^{-1}$ , avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . L'équation  $X'(t) = AX(t)$  devient alors  $P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t)$  soit  $Z'(t) = DZ(t)$ , où  $Z$  est la fonction  $Z = P^{-1}X$ . Si l'on note  $z_1, \dots, z_n$  les fonctions coordonnées de  $Z$ , on obtient  $n$  équations scalaires  $z'_i(t) = \lambda_i z_i(t)$ , qui se résolvent en  $z_i : t \mapsto C_i e^{\lambda_i t}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}$ , comme dans le lemme 2.4.1. Enfin  $X$  est donné par  $X : t \mapsto PZ(t)$ .

**Exemple 2.4.2** 1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(a) (CCP 74) Justifier sans calculs que  $A$  est diagonalisable.

(b) (CCP 74) Déterminer les valeurs propres de  $A$  et une base de vecteurs propres.

(c) (CCP 74) En utilisant ce qui précède et en justifiant, résoudre  $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$ .

(d) Chercher les solutions de avec  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = -2$  et  $z(0) = 1$ .

2. Résoudre  $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ .

**Remarque 2.4.3** *IMPORTANTE*, si vous partez d'une matrice réelle qui n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , mais qui l'est sur  $\mathbb{C}$ , vous obtenez comme dans l'exemple précédent, des solutions complexes. Si vous voulez retrouver des solutions réelles, les solutions de la forme  $t \mapsto e^{\lambda_i t} U_i$ , avec  $\lambda_i$  réel sont à garder et les solutions  $t \mapsto e^{\lambda_i t} U_i$  et  $t \mapsto e^{\overline{\lambda_i} t} \overline{U_i}$ , avec  $\lambda_i$  complexe sont à remplacer par  $t \mapsto \operatorname{Re}(e^{\lambda_i t} U_i)$  et  $t \mapsto \operatorname{Im}(e^{\lambda_i t} U_i)$ .

**Exemple 2.4.3** Donner les solutions réelles de  $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ .

### 2.4.3 Résolution de $X' = AX$ quand $A$ est trigonalisable

Il n'y a pas de résultats généraux exigibles au programme, travaillons donc sur un exemple.

**Exemple 2.4.4 (CCP 75)**

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

(a) Montrer que  $A$  n'est pas diagonalisable.

(b) Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  canoniquement associé à  $A$ . Trouver une base  $(v_1, v_2)$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ .

(c) En déduire la résolution du système  $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que si chaque valeur propre de  $A$  est de partie réelle strictement négative, alors toute solution de  $(S) : X' = AX$  tend vers 0 en  $+\infty$ .

### 3 Équations différentielles scalaires linéaires d'ordre $n$

#### 3.1 Définition et lien avec les systèmes différentiels

Dans ce paragraphe,  $a_{n-1}, \dots, a_0$  et  $b$  sont des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

##### 3.1.1 Définitions

**Définition 3.1.1 (Équation différentielles linéaires)** 1. Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre  $n$  est une équation différentielle qui s'écrit sous la forme :

$$(\mathcal{E}) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = b(t).$$

2. La fonction  $b$  est appelée second membre de l'équation différentielle. Lorsque  $b$  est nulle, on dit que l'équation différentielle est homogène ou sans second membre .
3. Pour une équation différentielle  $(\mathcal{E}) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = b(t)$ , l'équation différentielle homogène associée est  $(\mathcal{E}_h) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = 0$ .

Nous avons toujours

**Proposition 3.1.1 (Principe de superposition)** Soient deux équations différentielles

$$(\mathcal{E}_1) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = b_1(t) \text{ et}$$

$(\mathcal{E}_2) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = b_2(t)$  ayant la même équation différentielle homogène associée. Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions des équations respectives  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_2)$ . Alors pour tout  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ , la fonction  $\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2$  est solution de l'équation différentielle :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = \lambda_1b_1(t) + \lambda_2b_2(t).$$

*Démonstration :* Calquer la preuve de l'ordre un.

**Définition 3.1.2 (Problème de Cauchy)** Soient  $t_0 \in I$  et  $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ .

On appelle problème de Cauchy le recherche de solutions  $y$  de  $(\mathcal{E})$  vérifiant

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = b(t) \\ (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases}.$$

##### 3.1.2 Lien équation différentielles scalaire linéaire d'ordre $n$ et les systèmes différentiels

**Proposition 3.1.2 (Équation différentielle scalaire d'ordre  $n$  et système différentielle)** L'application

$\varphi : y \mapsto Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$  induit une bijection de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$(\mathcal{E}) : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b$  sur l'ensemble des solutions de l'équation  $(S) : Y' = AY + B$ , où

$A =$

et  $B =$

La bijection réciproque est  $Y = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto z_0$ .

*Démonstration :* *Démonstration :* Si  $y$  est solution de  $y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \dots - a_0y + b$ , il est clair

que  $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$  est solution de  $Y' = AY + B$ , donc  $\varphi$  va bien dans les bons espaces.

Soit  $Y = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$  une solution de  $Y' = AY + B$ . Montrons qu'il existe une unique fonction  $n$  fois dérivable  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  solution de  $(\mathcal{E})$  et vérifiant  $\varphi(y) = Y$ . On a donc :

$$\begin{pmatrix} z'_0 \\ \vdots \\ z'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Ainsi :  $\forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ ,  $z'_i = z_{i+1}$  et  $z'_{n-1} = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k z_k + b$ . Ainsi nous obtenons par récurrence :

$\forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ ,  $z_i = z_0^{(i)}$  et  $z_0^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z_0^{(k)} = b$ . Ainsi  $z_0$  est  $n$  fois dérivable, est solution de  $(\mathcal{E})$  et c'est de plus la seule fonction vérifiant  $\varphi(z_0) = Y$ .

Ainsi  $\varphi$  est une bijection des solutions de  $(\mathcal{E})$  dans les solutions de  $(S)$  et  $\varphi^{-1}(Y) = z_0$ .

### 3.1.3 Espace des solutions

**Corollaire 3.1.1 (Cauchy-Lipschitz et conséquences)** 1. Soient  $t_0 \in I$  et  $(y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$ .

*Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = b(t) \\ (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

*admet une unique solution.*

2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .

3. Si on note  $\mathcal{S}_0$  l'ensemble des solutions de  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$ , alors l'application  $y \mapsto (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0))$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}_0$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

*Démonstration :*

1. On reprend les notations de la proposition précédente. L'application  $\varphi$  nous permet de nous ramener au problème de Cauchy suivant :  $Y' = AY + B$ , avec la condition initiale

$$Y'(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}. \text{ Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz (} A \text{ et } B \text{ sont continues), ce système}$$

différentiel admet une unique solution, donc notre problème initial aussi, via la bijection  $\varphi$ .

2. De la même manière l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$  est isomorphe, via  $\varphi$ , à l'espace vectoriel des solutions de  $X' = AX$  qui est de dimension  $n$ .

3. Soit  $\psi$  l'application linéaire :  $y \mapsto (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0))$ . En identifiant  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , l'application  $\psi \circ \varphi^{-1}$  est  $Y \mapsto \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$ , qui est un isomorphisme de l'ensemble des solutions de  $Y' = AY$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , grâce à la proposition 2.3.1. En composant par  $\varphi$  qui est un isomorphisme, alors  $\psi$  est bien un isomorphisme de  $\mathcal{S}_0$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

**Exemple 3.1.1** 1. Soient  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ . On pose  $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .

On considère l'équation différentielle  $(\mathcal{E}) : y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0$ .

- (a) Montrer que, pour  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ , la fonction  $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$  est solution de  $(\mathcal{E})$  si et seulement si :  $P(\lambda) = 0$ .
- (b) En déduire que si  $P$  est scindé à racines simples  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}$  de  $(\mathcal{E})$  est  $\text{Vect}(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_n})$ .

2. Quelle est la dimension des solutions du système différentiel  $\begin{cases} x'' = -2x + y \\ y'' = x - 2y \end{cases}$  ?

**Proposition 3.1.3 (Ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$ )** On note  $(\mathcal{E}_H)$  l'équation homogène  $y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0$  associée à  $(\mathcal{E})$  et  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions homogènes. L'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$  s'écrit sous la forme  $\{y_p + z, z \in \mathcal{S}_H\}$ , avec  $y_p$  une solution particulière de  $(\mathcal{E})$ .

*Démonstration* : Calquer la preuve faite pour l'ordre un.

## 3.2 Équations différentielles scalaires linéaires d'ordre 2

### 3.2.1 Structure de l'espace des solutions

Partons d'une équation de la forme  $\alpha(t)y''(t) + \beta(t)y'(t) + \gamma(t)y(t) = \delta(t)$ .

Pour utiliser les théorèmes (comme le théorème de Cauchy-Lipschitz) qui vont suivre, nous devons dans un premier temps normaliser l'équation différentielle. Nous devons donc diviser l'équation par la fonction  $\alpha$  et résoudre l'équation  $y''(t) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}y'(t) + \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}y(t) = \frac{\delta(t)}{\alpha(t)}$  sur des intervalles où  $\alpha$  ne s'annule pas.

On va donc résoudre  $(\mathcal{E}) : y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ , avec  $a, b, c$  des fonctions continues sur  $I$ .

**Lemme 3.2.1 (Ecriture de  $(\mathcal{E})$  sous la forme de système linéaire d'ordre un)** *L'équation  $(\mathcal{E})$  peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire d'ordre un :*

**Théorème 3.2.1 (Cauchy-Lipschitz)** *Soit  $t_0 \in I$ . Le problème de Cauchy d'ordre deux :*

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

*admet une et une seule solution.*

**Exemple 3.2.1** 1. *Soit  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  paire. On considère :  $y''(t) + \varphi(t)y(t) = 0$   $(\mathcal{E})$ .*

*(a) Montrer que si  $y$  est une solution de  $(\mathcal{E})$  sur  $\mathbb{R}$ , alors  $y$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .*

*(b) Montrer que si  $y$  est solution de  $(\mathcal{E})$ , alors  $\tilde{y} : t \mapsto y(-t)$  est aussi solution de  $(\mathcal{E})$ .*

*(c) Montrer qu'une solution  $y$  est paire si et seulement si  $y'(0) = 0$ .*

2. *Montrer que  $f : x \mapsto \operatorname{sh}(\operatorname{Arcsin}(x))$  est décomposable en série entière sur un intervalle à préciser et donner celui-ci. On cherchera une équation différentielle vérifiée par  $f$ .*

3. Soient  $a$  et  $b$  deux fonctions continues sur  $[c, d]$  et  $(\mathcal{E}) : y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ . Soit  $u$  une solution non nulle de  $(\mathcal{E})$  sur  $[c, d]$ .
- (a) Soit  $(t_n)$  une suite à valeurs dans  $[c, d]$  qui converge vers  $\alpha$ , avec tous les  $t_n$  deux à deux distincts. On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}, u(t_n) = 0$ . Montrer que  $u(\alpha) = u'(\alpha) = 0$ .
- (b) En déduire que  $u$  n'a qu'un nombre fini de zéros sur  $[c, d]$ .

**Remarque 3.2.1** Pour chercher les solutions développables en série entière d'une équation différentielle, il faut procéder de la façon suivante :

- On fixe une suite  $(a_n)$  et on suppose que le rayon de convergence  $R$  de  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est strictement positif.
- On substitue  $S$  dans l'équation différentielle et quitte à faire des décalages d'indices, on essaye de se ramener à une somme classée par puissances :  $\sum (\dots) x^n$ . Par unicité du DSE, on identifie les coefficients pour que  $S$  soit solution.
- Habituellement, on obtient une relation de récurrence qui permet alors de définir  $(a_n)$ . On montre alors que  $R > 0$  (avec par exemple la règle de D'Alembert) et éventuellement on explicite  $a_n$ .
- On obtient ainsi toutes les solutions développables en série entière. Mais attention, toutes les solutions de l'équation différentielle ne sont pas forcément DSE (voir l'exemple 3.2.2)

**Proposition 3.2.1 (Dimension de l'équation homogène)** L'ensemble des solutions de  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$  est un espace vectoriel de dimension 2.

**Proposition 3.2.2 (Ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$ )** On note  $(E_H)$  l'équation homogène  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$  associée à  $(\mathcal{E})$  et  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions homogènes. L'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$  s'écrit sous la forme  $\{y_p + z, z \in \mathcal{S}_H\}$ , avec  $y_p$  une solution particulière de  $(\mathcal{E})$ .

**Exemple 3.2.2 (CCP 32)** Soit l'équation différentielle :  $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$  ( $E$ ).

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle  $] -r, r[$ , avec  $r > 0$ .  
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de  $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$  sur  $]0, 1[$  sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur  $] -1, 1[$  ?

1. Soient  $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  une telle solution et  $R$  son rayon de convergence et on suppose que  $R > 0$ .

Comme on peut dériver terme à terme cette série entière sur  $] -R, R[$ , alors :

$$\forall x \in ] -R, R[, 0 = (x^2 - x)g''(x) + 3xg'(x) + g(x) = (x^2 - x) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n}_{=0 \text{ si } n=0 \text{ ou } n=1} - \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}}_{=0 \text{ si } n=1} + 3 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n}_{=0 \text{ si } n=0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \\
&\sum_{n=0}^{+\infty} [n(n-1) + 3n + 1] a_n x^n - \sum_{l=1}^{+\infty} (l+1) l a_{l+1} x^l = \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)^2 a_n - (n+1) n a_{n+1}] x^n.
\end{aligned}$$

2.

### 3.2.2 Wronskien

Soit  $(\mathcal{E})$  l'équation  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$  et  $(\mathcal{E}_H)$  l'équation homogène  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$  associée.

**Définition 3.2.1 (Wronskien)** Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de  $(\mathcal{E}_H)$ . On appelle wronskien de la famille  $(y_1, y_2)$  l'application définie sur  $I$  par

$$w : t \mapsto \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

**Remarque 3.2.2** Les solutions  $y_1$  et  $y_2$  étant deux fois dérivables, alors le wronskien est dérivable.

**Proposition 3.2.3 (Wronskien et base de solutions homogènes)** Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de  $(\mathcal{E}_H)$  et  $w$  leur wronskien. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $(y_1, y_2)$  est une base de solution de  $\mathcal{E}_H$ .
2.  $\forall t \in I, w(t) \neq 0$ .
3.  $\exists t \in I, w(t) \neq 0$ .

*Démonstration :* C'est l'exemple 2.3.2 dans le cas  $n = 2$ .

**Exemple 3.2.3** Montrer que les fonction  $y_1 : t \mapsto \cos(t)$  et  $y_2 : t \mapsto t$  ne sont pas solution sur  $\mathbb{R}$  d'une même équation différentielle  $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ , avec  $a$  et  $b$  continues sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 3.2.3** Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de  $(\mathcal{E}_H)$ . Alors leur wronskien  $w$  vérifie l'équation :

En particulier pour une équation du type  $y'' + q(t)y = 0$ , alors  $w$  est

**Exemple 3.2.4** Soit  $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

1. Montrer qu'il existe deux fonctions  $u$  et  $v$  solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $y'' + q(t)y = 0$  et telles que :  
 $u(0) = 1, u'(0) = 0, v(0) = 0$  et  $v'(0) = 1$ .
2. Montrer que  $(u, v)$  est une base de solutions de  $y'' + q(t)y = 0$ .
3. On suppose que  $u$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = u(x) \int_0^x \frac{dt}{u^2(t)}$ .
4. On suppose que  $q$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
  - (a) Montrer que si  $u$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , alors :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t)$  est réelle, puis que celle-ci est nulle.
  - (b) Montrer que  $u$  et  $v$  ne peuvent pas être toutes les deux bornées.

### 3.2.3 Méthode de la variation des constantes

Nous allons adapter dans ce paragraphe la méthode de la variation des constantes à une équation  $(\mathcal{E}) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ . On note  $(\mathcal{E}_H) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$  l'équation homogène associée. Soit  $(y_1, y_2)$  une base de solution de  $(\mathcal{E}_H)$ .

Nous allons maintenant donner une méthode pour trouver une solution particulière de  $(\mathcal{E})$ .

**Proposition 3.2.4 (Variation des constantes)** *Soit  $(y_1, y_2)$  une base de solutions de  $(\mathcal{E}_H) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ . Soit  $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ , avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dérivables sur  $I$ . Alors  $y$  est solution de  $(\mathcal{E}) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$  si*

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)y_1(t) + \lambda_2'(t)y_2(t) & = 0 \\ \lambda_1'(t)y_1'(t) + \lambda_2'(t)y_2'(t) & = c(t) \end{cases}$$

*Démonstration :*

### Exemple 3.2.5 (CCP 31)

1. Donner une primitive de  $x \mapsto \cos^4(x)$ .
2. Résoudre l'équation différentielle  $y'' + y = \cos^3(x)$ .

### 3.2.4 Révision de sup : équation du second ordre à coefficients constants

Soient  $a, b, c$  trois nombres complexes tels que  $a \neq 0$  et  $d$  une fonction continue définie sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On recherche les solutions de l'équation différentielle

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t), t \in I.$$

#### a) L'équation homogène

On considère dans un premier temps l'équation homogène

$$(\mathcal{E}) : ay'' + by' + cy = 0.$$

**Proposition 3.2.5 (Le cas complexe)** *L'ensemble des fonctions complexes solutions homogènes est*

$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}(y_1, y_2),$$

- Si  $ar^2 + br + c = 0$  a deux solutions distinctes  $r_1$  et  $r_2$ ,  $y_1(t) = e^{r_1 t}$ ,  $y_2(t) = e^{r_2 t}$
- Si  $ar^2 + br + c = 0$  a une unique solution  $r$ ,  $y_1(t) = e^{rt}$ ,  $y_2(t) = te^{rt}$

L'équation  $ar^2 + br + c = 0$  est appelée **équation caractéristique** associée à l'équation.

**Remarque 3.2.4 ATTENTION**, la méthode précédente ne marche que si  $a, b$  et  $c$  sont constantes !

**Proposition 3.2.6 (Le cas réel)** *On suppose maintenant  $a, b$  et  $c$  réels. L'ensemble des fonctions réelles solutions de  $ay'' + by' + cy = 0$  est*

$$(\mathcal{S}_H)_{\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(y_1, y_2),$$

- Si  $ar^2 + br + c = 0$  a deux solutions réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ ,  $y_1(t) = e^{r_1 t}$ ,  $y_2(t) = e^{r_2 t}$
- Si  $ar^2 + br + c = 0$  a une unique solution réelle  $r$ ,  $y_1(t) = e^{rt}$ ,  $y_2(t) = te^{rt}$
- Si  $ar^2 + br + c = 0$  a deux solutions complexes distinctes conjuguées  $\alpha + i\beta$  et  $\alpha - i\beta$ ,  $y_1(t) = e^{(\alpha + i\beta)t}$ ,  $y_2(t) = e^{(\alpha - i\beta)t}$

**Remarque 3.2.5** Dans le cas où  $\Delta = b^2 - 4ac$  est strictement négatif, on peut écrire les solutions sous la forme  $t \mapsto Ae^{\alpha t} \cos(\beta t - \phi)$ , avec  $A$  dans  $\mathbb{R}_+$  et  $\phi$  dans  $\mathbb{R}$  (on prend ici  $A = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$  et  $\cos(\phi) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}$  et  $\sin(\phi) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}$ ).

Réciproquement une fonction de la forme  $t \mapsto Ae^{\alpha t} \cos(\beta t - \phi)$  est solution de l'équation différentielle, car en développant on trouve  $\lambda_1 = A \cos(\phi)$  et  $\lambda_2 = A \sin(\phi)$ .

Dans le dernier cas l'ensemble des solutions est aussi  $\{t \mapsto Ae^{\alpha t} \cos(\beta t - \phi), A \in \mathbb{R}_+, \phi \in \mathbb{R}\}$ .

C'est en général la forme utilisée en physique.  $\phi$  est le déphasage et  $A$  l'amplitude du signal. Ces deux grandeurs dépendent des conditions initiales.  $\beta$  est la pulsation et  $\alpha$  est le coefficient d'amortissement (s'il est négatif) ou d'amplification (s'il est positif). S'il est nul, le signal est périodique de période  $\frac{2\pi}{\beta}$ . Ces deux dernière quantités ne dépendent pas des conditions initiales, mais sont caractéristiques de l'équation différentielle (ou du système physique) étudié.

Un résultat classique à connaître par coeur :  $b = 0$  et  $a, c$  réels

On a en divisant par  $a$  une équation du type :  $y'' + \alpha y = 0$ .

- Premier cas :  $\alpha < 0$

Il existe donc  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que l'on ait  $\alpha = -\omega^2$  (par exemple  $\omega = \sqrt{-\alpha}$ ) et l'équation devient :  $y'' - \omega^2 y = 0$ .

- Deuxième cas :  $\alpha > 0$

Il existe donc  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que l'on ait  $\alpha = \omega^2$  (par exemple  $\omega = \sqrt{\alpha}$ ) et l'équation devient :  $y'' + \omega^2 y = 0$ .

**Exemple 3.2.6** Trouver toutes les fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - f(-x) = x$  (E).

### b) Une solution particulière

On note (E) l'équation caractéristique  $ar^2 + br + c = 0$ . Pour identifier une solution particulière de l'équation  $ay'' + by' + cy = de^{\alpha t}$ , avec  $\alpha$  et  $d$  des constantse dans  $\mathbb{C}$ . On pourra s'aider des formes suivantes.

... sur (E)...	... chercher la solution particulière sous la forme
$\alpha$ non racine	
$\alpha$ racine simple	
$\alpha$ racine double	

**Remarque 3.2.6** 1. Lorsque le second membre est une constante, ceci correspond au cas  $\alpha = 0$ .  
 2. (IMPORTANT) Si  $a, b, c$  et  $d$  sont réels et que le second membre est de la forme  $t \mapsto d \cos(\alpha t)$  ou  $t \mapsto d \sin(\alpha t)$ , on cherche une solution particulière de  $t \mapsto de^{i\alpha t}$ , puis on passe à la partie réelle pour avoir une solution particulière associée au second membre  $t \mapsto d \cos(\alpha t)$  et à la partie imaginaire si le second membre est  $t \mapsto d \sin(\alpha t)$ .

### c) Les solutions générales

**Théorème 3.2.2 (Équations différentielles du second ordre)** En notant  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions de l'équation homogène et  $f$  une solution particulière, l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}$  de l'équation générale est  $\mathcal{S} = f + \mathcal{S}_H = \{f + g, g \in \mathcal{S}_H\} = \{f + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\}$ .

**Exemple 3.2.7** Résoudre : (E) :  $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x + 3e^x$

## 4 Compléments (hors-programme, mais des méthodes pratiques)

### 4.1 Méthodes de recherche des solutions de $X' = A(t)X + B(t)$

#### 4.1.1 Recherche d'une solution particulière : méthode de variation des constantes

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  une base de  $X' = AX$ . On cherche une solution particulière sous la forme

$Z = \sum_{k=1}^n \lambda_k X_k$  de  $X' = A(t)X + B(t)$ . On injecte cela dans  $X' = A(t)X + B(t)$ . On a :

$$Z' = \sum_{k=1}^n \lambda'_k X_k + \sum_{k=1}^n \lambda_k X'_k = \sum_{k=1}^n \lambda'_k X_k + \sum_{k=1}^n \lambda_k A X_k = \sum_{k=1}^n \lambda'_k X_k + AZ. \text{ Ainsi } Z \text{ est solution de}$$

$X' = A(t)X + B(t)$  si et seulement si  $\sum_{k=1}^n \lambda'_k X_k = B$ .

Cela généralise la preuve faite dans 3.2.4.

**Exemple 4.1.1** On considère le système différentiel  $\begin{cases} (1+t^2)x' = tx + y + 2t^2 - 1 \\ (1+t^2)y' = -x + ty + 3t \end{cases} \quad (\mathcal{E}).$

1. Montrer que  $Y_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$  et  $Y_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$  sont deux solutions du système homogène associé  $X' = AX$ . Pourquoi  $\text{Vect}(Y_1, Y_2)$  est-il l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de ce système ?
2. Donner l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$  en cherchant une solution particulière sous la forme  $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ , avec  $\lambda_1, \lambda_2$  dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

### 4.1.2 Par changement de base

Dans ce cas, il faut résoudre l'équation homogène  $X' = AX$  et trouver une solution particulière de  $X'(t) = AX(t) + B(t)$ .

**Remarque 4.1.1** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonalisable, de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , et soient  $U_1, \dots, U_n$  des vecteurs propres associés. Si  $P$  est la matrice dont les colonnes sont  $U_1, \dots, U_n$ , alors  $A = PDP^{-1}$ , avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . L'équation  $X'(t) = AX(t) + B(t)$  s'écrit quant à elle  $Z'(t) = DZ(t) + P^{-1}B(t)$ , avec  $Z = P^{-1}X$ . On peut chercher une solution particulière  $Z_p$  de cette dernière équation puis calculer  $X_p = PZ_p$ .

Si la matrice  $A$  n'est que trigonalisable, alors l'équation  $X'(t) = AX(t) + B(t)$  s'écrit  $Z'(t) = TZ(t) + P^{-1}B(t)$  avec  $T$  triangulaire supérieure, que l'on résout en commençant par le bas...

**Exemple 4.1.2** Résoudre  $\begin{cases} x' &= -x - 4y - t \\ y' &= x + 3y \end{cases}$ .

## 4.2 Résolution pratique d'équations différentielles du second ordre

### 4.2.1 ...lorsque l'on dispose d'une solution homogène

Il s'agit ici de résoudre l'équation  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$  ou  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ , lorsqu'on connaît une solution  $y_0$  de l'équation homogène (trouvée soit par observation, soit en cherchant une solution développable en série entière ou une solution polynomiale, soit en étant guidé par l'énoncé,...).

On suppose que  $y_0$  ne s'annule pas sur  $I$ .

On effectue le changement de fonction inconnue  $y = y_0z$ , qui donne  $y' = y_0'z + y_0z'$  puis  $y'' = y_0''z + 2y_0'z' + y_0z''$ , ce qui conduit à l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y_0(t)z''(t) + (2y_0'(t) + a(t))z'(t) = 0 \quad (\text{resp. } = c(t))$$

soit une équation du premier ordre, d'inconnue  $z'$  (après avoir divisé par  $y_0$ ).

**Exemple 4.2.1** Soit  $(\mathcal{E}) : (1 + t^2)y''(t) - 2y(t) = 0$ .

1. Chercher une solution polynomiale non nulle de  $(\mathcal{E})$ . Soit  $y_0$  cette solution.
2. Déterminer une solution particulière sous la forme  $y_0z$  non colinéaire à  $y_0$ .

**Remarque 4.2.1**  $(\mathcal{E})$  est équivalente sur  $\mathbb{R}$  à  $y''(t) - \frac{2}{1+t^2}y(t) = 0$ , qui est normalisée, homogène et à coefficients continus, donc son ensemble de solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Comme  $(y_0, y_1)$  est une famille libre de cet ensemble (l'une des fonction est paire et l'autre impaire), alors l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$  est  $\text{Vect}(y_0, y_1)$ .

#### 4.2.2 Changement de variable

**Exemple 4.2.2** Soit  $(E) : xy'' - y' - x^3y = 0$ .

1. Résoudre cette équation différentielle sur  $\mathbb{R}_+^*$  en posant le changement de variable  $t = x^2$ .
2. Déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$ .

### 4.3 Équations différentielles non linéaires

**Exemple 4.3.1** On pose  $f = \tan$  sur  $] -\pi/2, \pi/2[$ .

1. Montrer que  $f$  est l'unique solution de l'équation différentielle :  $y' = 1 + y^2$  vérifiant  $y(0) = 0$ .
2. On pose  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ . Pour  $n \geq 1$ , montrer que :  $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ .
3. Montrer que :  $\forall x \in [0, \pi/2[, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) \geq 0$ . En déduire que le rayon de convergence  $R$  de  $\sum a_n z^n$  vaut au moins  $\pi/2$ .
4. Montrer que :  $\forall x \in ] -\pi/2, \pi/2[, \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .