

1 Intégration des fonctions vectorielles

1.1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Dans ce paragraphe $[a, b]$ désignera un segment de \mathbb{R} , le corps \mathbb{K} sera \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie. On se fixe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Définition 1.1.1 (Fonctions continues par morceaux sur un segment) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction. On dit qu'elle est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ de $[a, b]$ ($a = a_0 < a_1 < \dots < a_{p-1} < a_p = b$) telle que :

- pour tout $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la restriction $f_j = f|_{]a_j, a_{j+1}[}$ soit continue ;
- pour tout $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on puisse prolonger f_j en une fonction \tilde{f}_j continue sur $[a_j, a_{j+1}]$.

Une telle subdivision est dite adaptée à f .

Lemme 1.1.1 (Fonctions continues par morceaux et fonctions coordonnées) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue par morceaux que l'on décompose suivant ses fonctions coordonnées : $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$,

où pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les fonctions f_i vont de $[a, b]$ dans \mathbb{K} .

f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les fonctions f_i le sont aussi.

Démonstration : • On suppose f continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ une subdivision adaptée à f . Soit $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. La fonction f est continue sur $]a_j, a_{j+1}[$, donc toutes ses fonctions coordonnées f_i le sont aussi. Par ailleurs $\lim_{a_j^+} f$ et $\lim_{a_{j+1}^-} f$ existent, alors chaque fonction coordonnée

admet une limite à droite en a_j et à gauche en a_{j+1} . Donc pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les fonctions $f_i|_{]a_j, a_{j+1}[}$ se prolongent par continuité sur $[a_j, a_{j+1}]$.

• On suppose que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les fonctions f_i sont continues par morceaux sur $[a, b]$. On note σ_i une subdivision adaptée à f_i , pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit σ la réunion de toutes ces subdivisions. Cette subdivision étant plus fine que toutes les subdivisions σ_i , alors σ est une subdivision adaptée à toutes les fonctions f_i . On pose $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$. Soit $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Toutes ses fonctions coordonnées f_i sont continues sur $]a_j, a_{j+1}[$, donc f l'est aussi. De plus $\lim_{a_j^+} f_i$ et $\lim_{a_{j+1}^-} f_i$ existent, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$,

donc f admet une limite à droite en a_j et à gauche en a_{j+1} . Ainsi $f|_{]a_j, a_{j+1}[}$ se prolonge par continuité sur $[a_j, a_{j+1}]$.

Lemme 1.1.2 (Intégration d'une fonction vectorielle sur une base) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux que l'on décompose suivant ses fonctions coordonnées : $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$, où pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$,

les fonctions f_i vont de $[a, b]$ dans \mathbb{K} .

Le vecteur $\sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$ est indépendant de la base \mathcal{B} choisie.

Démonstration : Soit $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ une autre base de E et on décompose f dans cette base : $f = \sum_{i=1}^n g_i u_i$. On note $I = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$ et $J = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b g_i(t) dt \right) u_i$. On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}} = [a_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de passage de la base \mathcal{B} à \mathcal{U} .

Définition 1.1.2 (Intégrale d'une fonction continue sur un segment) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux que l'on décompose suivant ses fonctions coordonnées : $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$. On appelle intégrale de

f sur $[a, b]$ le vecteur de E égal à $\sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$.

Ce vecteur est noté $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t) dt$.

Remarque 1.1.1 1. Cette définition a un sens car l'intégrale de f sur $[a, b]$ ne dépend pas de la base choisie sur E grâce au lemme précédent.

2. Si $a > b$, on pose $\int_a^b f(t) dt = - \int_{[b,a]} f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$.

Exemple 1.1.1 Soit F un sous-espace vectoriel de E et $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux telle que : $\forall t \in [a, b], f(t) \in F$. Montrer que $\int_a^b f$ est dans F .

Proposition 1.1.1 (Linéarité) Soient f, g définies sur $[a, b]$ à valeurs dans E , et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Démonstration : C'est une conséquence de la linéarité de l'intégrale pour les fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans \mathbb{K} , appliquée aux applications coordonnées.

Proposition 1.1.2 (Relation de Chasles) Soient $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux et $c \in]a, b[$. Alors :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Démonstration : C'est une conséquence de la relation de Chasles pour les fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans \mathbb{K} , appliquée aux applications coordonnées.

Proposition 1.1.3 (Inégalité triangulaire) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux. Alors :

$$\left\| \int_{[a,b]} f(t) dt \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f(t)\| dt \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\| = (b-a) \|f\|_\infty.$$

Démonstration : Une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow E$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ de $[a, b]$ telle que pour tout k de $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ la fonction φ soit constante sur $]a_k, a_{k+1}[$.

On note $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i e_i$. Si φ est en escalier, alors toutes les fonctions φ_i le sont sur $[a, b]$. En effet soit $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Alors la fonction φ est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$ et elle est égale à un vecteur v_k de E . On décompose $v_k = \sum_{i=1}^n v_{k,i} e_i$, alors : $\forall x \in]a_k, a_{k+1}[$, $v_k = \varphi(x)$, puis : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\forall x \in]a_k, a_{k+1}[$ $v_{k,i} = \varphi_i(x)$ car (e_1, \dots, e_n) est une base de E . Ainsi les fonctions φ_i sont aussi en escalier.

Par conséquent σ est une subdivision adaptée à toutes les fonctions φ_i et donc en utilisant l'expression d'une intégrale pour une fonction en escalier à valeurs dans \mathbb{K} , on a : $\int_a^b \varphi = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b \varphi_i \right) e_i =$

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) v_{k,i} \right) e_i = \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) \left(\sum_{i=1}^n v_{k,i} e_i \right) = \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) v_k.$$

Par ailleurs, la fonction $\|\varphi\|$ est en escalier : pour tout k de $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$, sur $]a_k, a_{k+1}[$, elle est constante égale à $\|v_k\|$. Dans ce cas, on a :

$$\left\| \int_a^b \varphi \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) v_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{p-1} |a_{k+1} - a_k| \times \|v_k\| = \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) \times \|v_k\| = \int_a^b \|\varphi\|,$$

en utilisant la valeur de l'intégrale de la fonction en escalier $\|\varphi\|$ à valeurs dans \mathbb{R} . Le résultat est donc vrai pour une fonction en escalier.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$, avec $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Il existe une fonction en escalier $\psi_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\|f_i - \psi_i\|_\infty \leq \varepsilon$.

Soit $\psi : [a, b] \rightarrow E$ définie par $\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i e_i$.

Sur E , on pose la norme N_1 définie par : $N_1\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Comme en est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc il existe α, β dans \mathbb{R}_+^* tels que : $\forall x \in E$, $\alpha \|x\| \leq N_1(x) \leq \beta \|x\|$.

$$\text{Ainsi : } \forall x \in E, \|f(x) - \psi(x)\| \leq \frac{1}{\alpha} N_1(f(x) - \psi(x)) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n |f_i(x) - \psi_i(x)| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \|f_i - \psi_i\|_\infty \leq \frac{n\varepsilon}{\alpha}.$$

On a donc : $\forall x \in E$, $\|\psi(x)\| = \|\psi(x) - f(x) + f(x)\| \leq \|\psi(x) - f(x)\| + \|f(x)\| \leq \frac{n\varepsilon}{\alpha} + \|f(x)\|$.

De plus, grâce à l'inégalité triangulaire pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{K} , on a pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$: $\left| \int_a^b (f_i - \psi_i) \right| \leq \int_a^b |f_i - \psi_i| \leq \varepsilon(b-a)$. Comme $\int_a^b (f - \psi) = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i - \psi_i \right) e_i$, alors :

$$N_1\left(\int_a^b (f - \psi)\right) = \sum_{i=1}^n \left| \int_a^b (f_i - \psi_i) \right| \leq n\varepsilon(b-a), \text{ puis : } \left\| \int_a^b (f - \psi) \right\| \leq \frac{n\varepsilon(b-a)}{\alpha}.$$

$$\text{On a donc : } \left\| \int_a^b f \right\| = \left\| \int_a^b (f - \psi) + \int_a^b \psi \right\| \leq \left\| \int_a^b (f - \psi) \right\| + \left\| \int_a^b \psi \right\| \leq \frac{n\varepsilon(b-a)}{\alpha} + \int_a^b \|\psi\| \leq \frac{n\varepsilon(b-a)}{\alpha} + \int_a^b \left(\frac{n\varepsilon}{\alpha} + \|f\| \right) = \frac{2n\varepsilon(b-a)}{\alpha} + \int_a^b \|f\|.$$

Ceci étant vrai pour tout ε de \mathbb{R}_+^* , alors quand ε tend vers 0, on obtient : $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$.

Proposition 1.1.4 (Intégrale et application linéaire) Soient $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux, F un espace vectoriel normé de dimension finie et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$L\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b L(f).$$

Démonstration : Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F . On pose

$A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(L)$. On a $f = \sum_{j=1}^p f_j e_j$. On a donc :

$L(f) = \sum_{j=1}^p f_j L(e_j) = \sum_{j=1}^p f_j \sum_{i=1}^n a_{i,j} u_i = \sum_{i=1}^n \left(a_{i,j} \sum_{j=1}^p f_j \right) u_i$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application $a_{i,j} \sum_{j=1}^p f_j$ est continue par morceaux, par combinaison linéaire et par définition de l'intégrale (qui ne dépend pas de la base choisie), on a : $\int_a^b L(f) = \sum_{i=1}^n \int_a^b \left(a_{i,j} \sum_{j=1}^p f_j \right) u_i = \sum_{i=1}^n \left(a_{i,j} \sum_{j=1}^p \int_a^b f_j \right) u_i$, par linéarité de l'intégrale. D'autre part, on a :

$$L\left(\int_a^b f\right) = L\left(\sum_{j=1}^p \underbrace{\left(\int_a^b f_j\right)}_{\in \mathbb{K}} e_j\right) = \sum_{j=1}^p \left(\int_a^b f_j\right) L(e_j) = \sum_{j=1}^p \left(\int_a^b f_j\right) \sum_{i=1}^n a_{i,j} u_i = \sum_{i=1}^n \left(a_{i,j} \sum_{j=1}^p \int_a^b f_j \right) u_i = \int_a^b L(f).$$

Théorème 1.1.1 (Convergence des sommes de Riemann) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient R_n et R'_n les sommes de Riemann de f définies par :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad R'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Alors les suites $(R_n)_{n \geq 1}$ et $(R'_n)_{n \geq 1}$ des sommes de Riemann convergent vers $\int_a^b f(t) dt$:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$. On définit la fonction φ_n (qui est dite en escalier) par : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall x \in [a_k, a_{k+1}[$, $\varphi_n(x) = f(a_k)$ et $\varphi_n(b) = f(b)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est continue sur le compact $[a, b]$, alors grâce au théorème de Heine, elle est uniformément continue. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall u, v \in [a, b], |u-v| \leq \alpha \Rightarrow \|f(u) - f(v)\| \leq \varepsilon$.

Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \frac{b-a}{n} \leq \alpha$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq N$. Soit $x \in [a, b[$. Il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que x soit dans $[a_k, a_{k+1}[$. Or $0 \leq x - a_k \leq a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n} \leq \alpha$, donc $\|f(x) - f(a_k)\| \leq \varepsilon$ et donc : $\|f(x) - \varphi_n(x)\| \leq \varepsilon$. Or $f(b) = \varphi_n(b)$, donc : $\forall x \in [a, b], \|f(x) - \varphi_n(x)\| \leq \varepsilon$.

Ainsi on a : $\left\| \int_a^b f - \int_a^b \varphi_n \right\| = \left\| \int_a^b (f - \varphi_n) \right\| \leq \int_a^b \|f - \varphi_n\| \leq \varepsilon(b-a)$. Or on constate que

$$\int_a^b \varphi_n = R'_n.$$

On a donc montré que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left\| \int_a^b f - R'_n \right\| \leq (b-a)\varepsilon$. Cela prouve

$$\text{que } \lim_{n \rightarrow +\infty} R'_n = \int_a^b f.$$

On montre de même que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \int_a^b f$.

Remarque 1.1.2 1. Pour conserver l'idée de limite de moyennes sur $[a, b]$, on peut écrire :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

2. Pour faire apparaître une somme de Riemann, factorisez d'abord votre expression par $1/n$, puis essayer de trouver dans le \sum une formule en k/n , ce qui vous permettra d'identifier votre fonction f et enfin, vous trouvez l'intervalle $[a, b]$.

Exemple 1.1.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Trouver un équivalent de $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha}$.

1.2 Primitives et intégrales

Dans ce paragraphe, I désignera un intervalle de \mathbb{R} , le corps \mathbb{K} sera \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie. On se fixe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1.2.1 Théorème fondamental de l'analyse

Définition 1.2.1 (Primitive) Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction continue. Une application $g : I \rightarrow E$ est une primitive de f si g est dérivable sur I et : $g' = f$.

Théorème 1.2.1 (Théorème fondamental de l'analyse) Soient $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et $a \in I$.

Alors l'application F de I dans E définie par : $\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et sa dérivée est f . L'application F est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration : Si on écrit $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$, avec $f_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ les fonctions coordonnées, alors :

$\forall x \in I, \int_a^x f(t)dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^x f_i(t)dt \right) e_i$. Comme f est continue sur I , alors toutes les fonctions coordonnées le sont, puis en appliquant le théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{K} , on obtient : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in I, \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f_i(t)dt \right) = f_i(x)$. Grâce aux résultats sur les dérivées des fonctions vectorielles, on a donc $\forall x \in I, \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i = f(x)$.

Ainsi F est une primitive de f .

Soit G une primitive de f s'annulant en a . On a sur I : $(G - F)' = f - f = 0$. Donc $G - F$ est constante, mais comme $(G - F)(a) = 0$, alors $G - F = 0$, puis $F = G$.

Remarque 1.2.1 1. (IMPORTANT) Soit $f : I \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$.

2. (IMPORTANT) Si 0 est dans I , alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt =$

Exemple 1.2.1 1. Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = 1 + \int_0^{x+y} f(t)dt.$$

2. (**Lemme de Gronwall**) Soit $c \in \mathbb{R}$, u et v deux fonctions continues sur \mathbb{R}_+ , avec u à valeurs dans \mathbb{R} et v à valeurs dans \mathbb{R}_+ . On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, u(x) \leq c + \int_0^x u(t)v(t)dt$ (*).
 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, u(x) \leq c \exp\left(\int_0^x v(t)dt\right)$ (on pourra dériver $w : x \mapsto c + \int_0^x u(t)v(t)dt$).

1.2.2 Applications

a) Inégalité des accroissements finies

Théorème 1.2.2 (Inégalité des accroissements finis) Soit $f : I \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 .

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in \overset{\circ}{I}, \|f'(x)\| \leq M$.

Alors : $\forall a, b \in I, \|f(b) - f(a)\| \leq M|b - a|$.

Démonstration : Soient $a, b \in \overset{\circ}{I}$. Grâce à la remarque 1.2.1, on a :

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t)dt \right\| \leq \int_{I(a,b)} \|f'\| \leq \int_{I(a,b)} M = M|b - a|, \text{ avec } I(a,b) = [a,b] \text{ si } a \leq b \text{ et } I(a,b) = [b,a] \text{ sinon.}$$

Exemple 1.2.2 1. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$.

2. Soit U un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $g : U \rightarrow E$ une application de classe \mathcal{C}^1 , telle qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in U, \|dg(x)\| \leq K$ (on rappelle que : $dg(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$). Montrer que g est K -lipschitzienne.

b) Intégration d'une limite uniforme

Proposition 1.2.1 (Intégration d'une limite uniforme sur un segment) 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$u_n : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue. On suppose que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction u . Alors la fonction u est continue sur $[a, b]$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b u_n = \int_a^b u.$$

2. Soit $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_n : I \rightarrow E$ continue. On suppose que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u . Alors la fonction u est continue sur I et si on pose $U_n : x \mapsto \int_a^x u_n$ et $U : x \mapsto \int_a^x u$, alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I .

Démonstration : La démonstration est identique à celle sur les suites de fonctions (chapitre 8) à valeurs dans \mathbb{K} , sauf que l'on remplace les valeurs absolues par des normes.

Corollaire 1.2.1 (Primitivation terme à terme sur un segment) 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$f_n : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue. Si $\sum f_n$ est une série de fonctions qui converge uniformément ou normalement sur le segment $[a, b]$, alors la série $\sum \int_a^b f_n$ converge et :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : I \rightarrow E$ une fonction continue, avec I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $a \in I$. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I . Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur

$$I \text{ et } \forall x \in I, \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t) dt.$$

c) Problème de Cauchy pour les équations différentielles

Proposition 1.2.2 (Problème de Cauchy sous forme intégrale) Soient $(t_0, x_0) \in I \times E$ et deux applications continues $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$. Une application φ est une solution du problème de Cauchy :

$$(E) : x' = a(t).x + b(t) \text{ et } x(t_0) = x_0$$

si et seulement si, elle satisfait l'équation intégrale :

Démonstration :

Remarque 1.2.2 Cette formulation a un intérêt plutôt théorique et sert par exemple à montrer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. Donnons la démonstration de ce théorème qui n'est pas exigible. Pour $(t, x) \in I \times E$, on pose : $f(t, x) = a(t).x + b(t)$. On définit par récurrence la suite de fonction

$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant : $\varphi_0 : t \mapsto x_0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} : t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds$, définie sur I . Comme a est continue et la composition $(u, y) \mapsto u(y)$ de $\mathcal{L}(E) \times E$ dans E l'est aussi car on est en dimension finie, alors on montre par récurrence que toutes les fonctions φ_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur I .

Soit $K = [a, b]$ tel que : $t_0 \in K \subset I$. On pose $h = b - a > 0$. L'ensemble K est une partie compacte, donc les fonctions continues a et $t \mapsto f(t, x_0)$ y sont bornées. Soit $k = \sup_{t \in K} \|a(t)\|$ et $M = \sup_{t \in K} \|f(t, x_0)\|$. On a : $\forall (t, x_1, x_2) \in K \times E \times E$, $\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| = \|a(t).(x_2 - x_1)\| \leq \|a(t)\| \|x_2 - x_1\| \leq k \|x_2 - x_1\|$ (*).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\mathcal{P}(n) : \forall t \in K$, $\|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq \frac{Mk^{n-1}}{n!} |t - t_0|^n$.

$\mathcal{P}(1)$ est vérifiée, car : $\forall t \in K$, $\|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x_0)\| ds \right| \leq M |t - t_0|$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Soit $t \in K$. On a :

$$\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi_{n-1}(s))] ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi_{n-1}(s))\| ds \right|.$$

Par (*), on a donc :

$$\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq \left| k \int_{t_0}^t \|\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)\| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \frac{Mk^n}{n!} |s - t_0|^n ds \right|,$$

grâce à $\mathcal{P}(n)$.

Si on a $t \geq t_0$, alors $\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq \frac{Mk^n}{n!} \int_{t_0}^t (s - t_0)^n ds = \frac{Mk^n}{n!} \cdot \frac{(t - t_0)^{n+1}}{n+1} = \frac{Mk^n}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1}$.

Si on a $t \leq t_0$, alors $\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq \frac{Mk^n}{n!} \int_t^{t_0} (t_0 - s)^n ds = \frac{Mk^n}{n!} \cdot \frac{(t_0 - t)^{n+1}}{n+1} = \frac{Mk^n}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1}$.

On a donc $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

Par conséquent, comme pour t dans K , on a $|t - t_0| \leq h$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in K, \|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq Mh \frac{(kh)^{n-1}}{n!}.$$

Montrons que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément. La suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série télescopique $\sum_{n \geq 1} (\varphi_n - \varphi_{n-1})$ converge pour la norme $\|\cdot\|_{\infty, K}$. Nous venons de voir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|_{\infty, K} \leq Mh \frac{(kh)^{n-1}}{n!}. \text{ Cela prouve même la convergence normale de } \sum_{n \geq 1} (\varphi_n - \varphi_{n-1}),$$

car la série $\sum_{n \geq 1} Mh \frac{(kh)^{n-1}}{n!}$ converge vers $\frac{M}{k} e^{kh}$ si $k \neq 0$ et converge clairement si $k = 0$.

Soit φ la limite de la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est aussi continue par convergence uniforme et continuité de φ_n .

Montrons maintenant que φ est bien solution du problème de Cauchy initial.

Tout d'abord, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(t_0) = x_0$, donc en passant à la limite : $\varphi(t_0) = x_0$.

Soit $t \in I$. On prend $K = [t_0, t]$ ou $K = [t, t_0]$. Par (*), on a :

$\forall s \in K$, $\|f(s, \varphi(s)) - f(s, \varphi_n(s))\| \leq k \|\varphi(s) - \varphi_n(s)\| \leq k \|\varphi - \varphi_n\|_{\infty, K}$. Ainsi la suite de fonctions $(s \mapsto f(s, \varphi_n(s)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $s \mapsto f(s, \varphi(s))$ sur le segment K et donc comme

toutes ces fonctions sont continues, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$.

Or on a : $\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds$, donc en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a :

$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$. Ceci prouve d'une part la dérivabilité de φ sur I , mais aussi que φ est solutions de $x' = a(t).x + b(t)$, grâce à la proposition précédente.

Montrons maintenant l'unicité.

Supposons qu'il existe une fonction ψ dérivable, telle que $\psi(t_0) = x_0$ et que : $\forall t \in I, \psi'(t) = f(t, \psi(t))$. Soit $t \in I$. On pose $K = [t_0, t]$ ou $K = [t, t_0]$. Soit $b = \sup_{s \in K} \|\psi(s) - x_0\|$ (la continuité de ψ et le caractère compact de K justifiant l'existence de b). Grâce à la proposition précédente,

$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds$. En procédant comme précédemment, on montre par récurrence (ici

on commence à $n = 0$) que : $\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \|\psi(t) - \varphi_n(t)\| \leq b \frac{(k|t - t_0|)^n}{n!}$. Comme la série $\sum \frac{(k|t - t_0|)^n}{n!}$ converge (sa somme est $\exp(k|t - t_0|)$), alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(k|t - t_0|)^n}{n!} = 0$, puis : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = \psi(t)$, donc : $\varphi(t) = \psi(t)$.

d) Intégration le long d'une courbe

Proposition 1.2.3 (Intégration le long d'une courbe) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soient U un ouvert de E , F un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie et $f : U \rightarrow F$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Pour toute application $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a :

$$\int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt =$$

Démonstration : Soit $\varphi : t \mapsto f(\gamma(t))$ définie sur $[0, 1]$. Cette application est \mathcal{C}^1 , par composition et la règle de la chaîne donne : $\forall t \in [0, 1], \varphi'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t))$, puis $f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt$.

Remarque 1.2.3 Si γ est de la forme $t \mapsto a + tv$, avec $v \in E$, alors $f(b) - f(a) = \int_0^1 df(a + tv).v dt$.

1.3 Formules de Taylor

1.3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 1.3.1 (Formule de Taylor avec reste intégral) Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ et $a \in I$.

Alors pour tout point $x \in I$, on a :

$$f(x) =$$

Démonstration : Comme f est de classe \mathcal{C}^{n+1} , alors ses fonctions coordonnées le sont aussi et donc la formule s'obtient en appliquant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral des fonctions à valeurs dans \mathbb{K} aux fonctions coordonnées de f .

Remarque 1.3.1 1. La quantité $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ est appelée reste intégrale et permet de mesurer exactement l'erreur commise lorsque l'on approche $f(x)$ par son polynôme de Taylor en a .

2. Cette formule est vraie sur I tout entier, c'est donc une propriété globale.

Exemple 1.3.1 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0; a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ . On suppose que toutes les dérivées de f sont positives.

1. Montrer que : $\forall x \in [0; a[, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux) du.$

On pose $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux) du.$

2. Montrer que pour tout entier n et pour tout x de $[0; a[$, on a : $0 \leq R_n(x) \leq f(x).$

3. Soient x et y tels que l'on ait $0 \leq x < y < a$. Montrer que l'on a : $R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y).$

4. En déduire que pour tout $x \in [0; a[$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x).$

Corollaire 1.3.1 (Formule de Taylor pour les polynômes) Soit $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On a :

$$A = \sum_{k=0}^n \frac{(X-a)^k}{k!} A^{(k)}(a) \quad \text{ou} \quad A(X+a) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} A^{(k)}(a).$$

Exemple 1.3.2 Soit $n \in \mathbb{N}$ et H un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$. Montrer qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls, tels que : $H = \{P \in \mathbb{K}_n[X], \sum_{i=0}^n \lambda_i P^{(i)}(0) = 0\}$.

1.3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition 1.3.1 (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ telle que $f^{(n+1)}$ soit bornée sur I . Alors :

$$\forall a, b \in I, \left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq$$

Démonstration : • Si $a = b$, c'est clair.

• Si $a < b$, alors en reprenant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral :

$$\left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \left\| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right\| dt.$$

Par croissance de l'intégrale, cette dernière est majorée par $\int_a^b \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{(b-t)^n}{n!} dt = \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

• Calcul analogue pour $a > b$ en intervertissant les bornes des intégrales majorantes.

Remarque 1.3.2 L'inégalité de Taylor-Lagrange est une formule globale vraie sur tout l'ensemble de définition. Elle permet de majorer simplement l'erreur commise lorsque l'on approche $f(x)$ par son polynôme de Taylor en a .

Exemple 1.3.3 1. (a) Montrer que : $\forall x \in [0, 1], \left| \operatorname{ch}(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3 \operatorname{sh}(1)}{6}$.

(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, avec $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}} \right) \right) - n$, pour n dans \mathbb{N}^* .

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, E)$ telle que $\|f\|$ et $\|f''\|$ soient majorées respectivement par M_0 et M_2 .

(a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall h \in \mathbb{R}_+^*, \|f'(x)\| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2h}{2}$.

(b) En déduire que f' est bornée par $2\sqrt{M_0M_2}$.

1.3.3 Formule de Taylor-Young

Proposition 1.3.2 (Formule de Taylor-Young) Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en $a \in I$, donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n).$$

Démonstration : Montrons cela par récurrence sur n .

- Si $n = 1$, alors f étant dérivable admet un développement limité à l'ordre un, ce qui donne : $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose le résultat au rang n .

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$. On pose $\psi : x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$, qui est de classe \mathcal{C}^1 sur I (on a $n+1 \geq 1$).

On applique l'hypothèse de récurrence à f' qui est de classe \mathcal{C}^n , donc il existe $\beta : I \rightarrow E$ tel que $\lim_a \beta = 0$ et :

$$\forall x \in I, f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + (x-a)^n \beta(x).$$

Autrement dit : $\forall x \in I, \psi'(x) = (x-a)^n \beta(x)$.

Soient $a, x \in I$ et on note $I(a, x) = [a, x]$, si $a \leq x$ et $I(a, x) = [x, a]$ sinon. Appliquons l'inégalité des accroissements finis à ψ sur le segment $[a, x]$ (sur ce compact, ψ' est continue donc bornée) :

$$\|\psi(x) - \psi(a)\| \leq |x-a| \sup_{t \in I(a,x)} \|\psi'(t)\| = |x-a| \sup_{t \in I(a,x)} \|(t-a)^n \beta(t)\| \leq |x-a|^{n+1} \sup_{t \in I(a,x)} \|\beta(t)\|.$$

Ceci donne :
$$\frac{1}{|x-a|^{n+1}} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \sup_{t \in I(a,x)} \|\beta(t)\|.$$

Montrons que $\lim_{x \rightarrow a} \sup_{t \in I(a,x)} \|\beta(t)\| = 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\lim_a \beta = 0$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \in I, |t-a| \leq \alpha \Rightarrow \|\beta(t)\| \leq \varepsilon$.

Soit $x \in I$, tel que : $|x-a| \leq \alpha$. Ainsi pour t dans $I(a, x)$, on a : $|t-a| \leq \alpha$, donc $\|\beta(t)\| \leq \varepsilon$, ce qui donne $\sup_{t \in I(a,x)} \|\beta(t)\| \leq \varepsilon$.

On a donc montré que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow \sup_{t \in I(a,x)} \|\beta(t)\| \leq \varepsilon$.

Ainsi :
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|x-a|^{n+1}} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| = 0$$
 et donc :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = o((x-a)^{n+1}), \text{ d'où le résultat pour } n+1, \text{ ce qui achève la récurrence.}$$

Remarque 1.3.3 *La formule de Taylor-Young est une propriété locale, car elle donne un comportement quand x tend vers a .*

2 Vecteurs tangents à une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie

2.1 Surfaces de \mathbb{R}^3

Définition 2.1.1 (Surfaces de \mathbb{R}^3) *Si F est une application de classe \mathcal{C}^1 d'un ouvert U de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , alors l'ensemble $\{(x, y, z) \in U, F(x, y, z) = 0\}$ est appelé surface de \mathbb{R}^3 .*

Exemple 2.1.1 *Décrire les surfaces définies par les équations :*

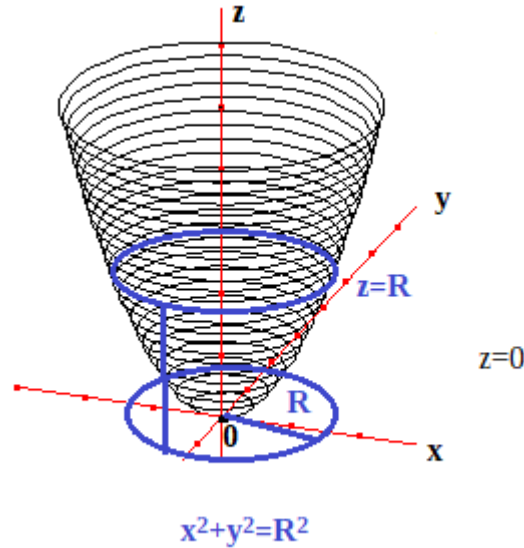
1. $0 = ax + by + cz - d$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$:
2. $0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 8$:

Voici un cas particulier de surface :

Définition 2.1.2 (Graphe d'une fonction numérique de \mathbb{R}^2) Une fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto f(x, y) \end{cases}$ de classe C^1 se représente dans l'espace à l'aide de points de coordonnées (x, y, z) tels que $z = f(x, y)$. Cela définit une surface qui est incluse dans \mathbb{R}^3 , en considérant $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y) - z = 0\}$.

Exemple 2.1.2

Représenter $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sur \mathbb{R}^2 .



2.2 Vecteurs tangents

Dans ce paragraphe, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et M est une partie de E .

Définition 2.2.1 (Vecteur tangent à M) Soient $x \in M$ et $v \in E$. On dit que v est un vecteur tangent à M en x s'il existe un réel strictement positif ε et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ dérivable en 0, telle que : $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

On note $T_x M$ l'ensemble des vecteurs tangents à M en x .

Exemple 2.2.1 Soit F un sous-espace affine de E de direction A . Soit $x \in F$. Montrer que : $T_x F = A$.

Proposition 2.2.1 (Vecteurs tangents d'une partie définie implicitement) Soit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, une application de classe \mathcal{C}^1 , avec Ω un ouvert de E . Soit $M = \{x \in \Omega, g(x) = 0\}$. Soit $x \in M$. Si $dg(x) \neq 0$, alors $T_x M = \text{Ker}(dg(x))$.

En particulier si E est muni d'une structure euclidienne, si $\nabla g(x) \neq 0$, alors $T_x M = (\nabla g(x))^\perp$.

Démonstration : Nous admettons le premier point.

Le deuxième point vient du fait que : $\forall h \in E, dg(x).h = \langle \nabla g(x), h \rangle$.

Remarque 2.2.1 On retrouve le fait que le gradient soit orthogonal aux lignes de niveau. En effet soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 , avec Ω un ouvert de E . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la ligne de niveau $X_\lambda = \{x \in \Omega, f(x) = \lambda\}$. Soient $x \in X_\lambda$ et $v \in T_x X_\lambda$. Alors v et $\nabla f(x)$ sont orthogonaux. En reprenant la proposition précédente, on considère $g = f - \lambda$ et donc $X_\lambda = \{x \in \Omega, g(x) = 0\}$. Ainsi $T_x X_\lambda = (\nabla g(x))^\perp = (\nabla f(x))^\perp$, car $\nabla g = \nabla f$, car λ est constante.

Exemple 2.2.2 1. Nous rappelons que nous avons vu dans le chapitre 15, que si $f = \det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, alors : $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), df(I_n)(H) = \text{tr}(H)$. Soit $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(M) = 1\}$. Déterminer $T_{I_n}(SL_n(\mathbb{R}))$.

2. On considère la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, avec $R > 0$. Soit $u = (u_1, u_2, u_3) \in S$. Déterminer $T_u S$.

Corollaire 2.2.1 (Vecteurs tangents à un graphe d'une fonction de deux variables) Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit \mathcal{S} la surface (de \mathbb{R}^3) définie par l'équation : $z = f(x, y)$ qui est le graphe de f .

Soit $a = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Alors

$$T_a \mathcal{S} = \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, w = u \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right\}.$$

Démonstration :

Définition 2.2.2 (Plan tangent à une surface de \mathbb{R}^3) Soient U un ouvert de \mathbb{R}^3 et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On pose \mathcal{S} la surface définie par l'équation : $f(x, y, z) = 0$ et on considère $a \in \mathcal{S}$.

Le plan tangent à \mathcal{S} en a est le sous-espace affine $a + T_a \mathcal{S}$ de \mathbb{R}^3 . Ce plan passe donc par a et $T_a \mathcal{S}$ est sa direction.

Corollaire 2.2.2 (Équation des plans tangents au graphe d'une fonction de deux variables) Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On pose \mathcal{S} la surface définie par l'équation :

$z = f(x, y)$.

Soit $a = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Alors l'équation du tangent à \mathcal{S} en a est :

Démonstration : On a : $m(x, y, z) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \overrightarrow{am}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in T_a\mathcal{S}$, car a est dans \mathcal{S} .

Exemple 2.2.3 1. Le plan tangent de la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (avec $R > 0$) en $u = (u_1, u_2, u_3) \in S$ est

2. Soit \mathcal{S} la surface d'équation $z = x^2 + y^2$. Soit $a = (1, -1, 2) \in \mathcal{S}$. Quelle est l'équation du plan tangent à \mathcal{S} en a ?

2.3 Optimisation sous contrainte d'égalité

Proposition 2.3.1 (Extremum sur une partie M) Soit Ω un ouvert de E . Soit M une partie de Ω et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en un point x de M . Si $f|_M$ admet un extremum local en x , alors : $\forall v \in T_x M, df(x)(v) = 0$.

Démonstration : Soit $v \in T_x M$. Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ une application dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. Comme γ est à valeur dans M et que $f|_M$ admet un extremum en x , alors $g : t \mapsto f(\gamma(t))$ admet un extremum en 0. La fonction g étant définie sur un ouvert, alors on a : $g'(0) = 0$, soit : $0 = df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = df(x) \cdot v$.

Théorème 2.3.1 (Optimisation sous contrainte) Soient Ω un ouvert et f et g deux fonctions de Ω dans \mathbb{R} de classe C^1 . On pose $M = \{x \in \Omega, g(x) = 0\}$. Soit $x \in M$ tel que : $dg(x) \neq 0$.

Si $f|_M$ admet un extremum local en x , alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df(x) = \lambda dg(x)$.

En particulier, si E est un espace euclidien, dans ces conditions il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$.

Démonstration : $df(x)$ et $dg(x)$ sont deux formes linéaires. Or nous avons $T_x M = \text{Ker}(dg(x))$, donc grâce à la proposition précédente, $\text{Ker}(dg(x)) \subset \text{Ker}(df(x))$.

Si $\text{Ker}(df(x)) = E$, alors $df(x) = 0$, puis $df(x) = 0 \cdot dg(x)$.

Si $\text{Ker}(df(x)) \neq E$, alors $\dim(\text{Ker}(dg(x))) = \dim(\text{Ker}(df(x))) = \dim(E) - 1$, puis

$\text{Ker}(dg(x)) = \text{Ker}(df(x))$. Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que : $df(x) = \lambda dg(x)$, car nous avons un hyperplan défini par les formes linéaires non nulles $df(x)$ et $dg(x)$.

Dans le cas euclidien, cela signifie que : $\forall h \in E, \langle \nabla f(x), h \rangle = df(x) \cdot h = \lambda dg(x) \cdot h = \lambda \langle \nabla g(x), h \rangle$, puis : $\forall h \in E, \langle \nabla f(x) - \lambda \nabla g(x), h \rangle = 0$. Ainsi $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x)$ est dans $E^\perp = \{0\}$ et donc : $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$.

Exemple 2.3.1 1. (**CCP 41**) Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2.$$

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$ qui est la sphère de \mathbb{R}^2 de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{13}$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ usuelle.

C est donc une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^2 . Comme \mathbb{R}^2 est de dimension finie, C est un compact de \mathbb{R}^2 . On a aussi $C \neq \emptyset$. f est une application polynomiale donc f est continue sur le compact C . Donc f atteint un maximum et un minimum sur C .

Soit $(u, v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.

(a) Justifier qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :

$$(S) : \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$

- (b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$. En déduire les valeurs possibles de λ .
- (c) Déterminer les valeurs possibles de (u, v) , puis donner le maximum et le minimum de f sur C .

2. Soit E un espace euclidien et $u \in S(E)$. On pose $f : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$. On a vu dans le chapitre précédent que f est différentiable et $\forall x \in E, \nabla f(x) = 2u(x)$. Montrer que f admet un minimum sur $S(0, 1)$ et que celui-ci est une valeur propre de f .

3. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ et $f : (\mathbb{R}_+)^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

On définit $\Gamma = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 1\}$.

Il existe $a \in \Gamma$ tel que $f(a) = \sup_{x \in \Gamma} f(x)$ (*), avec les a_i dans \mathbb{R}_+^* . En effet, la fonction

$g : (\mathbb{R}_+)^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n - 1$ étant polynomiale, est continue. Donc $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ est un fermé de \mathbb{R}^n . D'autre part, on a : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq \alpha_i x_i \leq 1$. D'où :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq x_i \leq \frac{1}{\alpha_i}$ (car $\alpha_i > 0$). Il s'ensuit que Γ est aussi borné, donc c'est un compact de \mathbb{R}^n (on est en dimension finie). Sur Γ , la fonction f est continue par théorème sur les opérations sur les fonctions continues ; d'où l'existence de $a \in \Gamma$ tel que $f(a) = \sup_{x \in \Gamma} f(x) = \max_{x \in \Gamma} f(x)$.

Si un des a_i est nul, alors $f(a) = 0$. Or $f(1, \dots, 1) = 1$ et f atteint son maximum en a . Contradiction. Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i > 0$.

(a) Déterminer tous les points a vérifiant (*) et en déduire que : $\forall x \in \Gamma, x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq 1$.

(b) Montrer que : $\forall x \in (\mathbb{R}_+)^n, x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$.