Séance du 22/05 : Algèbre linéaire

Ex 1 : [Mines] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

- $u^2 = 0$ et il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $u \circ v + v \circ u = id_E$;
- $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(u)$.

Ex 2 : [Mines] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^2 = A$ si et seulement si $\mathrm{rg}\,(A) \leq tr(A)$ et $\mathrm{rg}\,(I_n - A) \leq tr(I_n - A)$.

Ex 3 : [Mines] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E), a, b \in \mathbb{R}$ et $P = X^2 + aX + b$. On suppose que P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et $P(u) = 0$.

1. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $F_x = vect(x, u(x))$ est un plan stable par u.
2. Soient F un sous-espace vectoriel stable par u et $x \in E \setminus F$. Montrer que $F \cap F_x = \{0\}$.
3. Montrer que u est diagonalisable par blocs identiques de taille 2×2.

Ex 4 : [Mines] Donner une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables.

Ex 5 : [Mines] Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $p(M) = M'$, avec : $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ m'_{i,j} = m_{i,j}$ si $i = \sigma(j)$ et $m'_{i,j} = 0$ sinon.

1. Montrer que p est un projecteur. Déterminer son noyau et son image.

   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle. On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les applications $\phi : M \mapsto \sum_{k=1}^{n} m_{\sigma(k),k}$ et $u_A : M \mapsto \phi(M)A + \phi(A)M$.
2. Montrer que u_A est diagonalisable si et seulement si $\phi(A) \neq 0$.
3. u_A peut-il être un projecteur ?

Ex 6 : [Mines] Soit $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $\forall i, j, k, l \in [\![1, n]\!],\ M_{i,j}M_{k,l} = \delta_{j,k}M_{i,l}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(M_{i,j})$ est indépendante de j. On la notera F_i.
2. Montrer que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.
3. En déduire $\dim(F_i)$.
4. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ M_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$, avec $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
5. Expliciter les automorphismes d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (morphismes d'algèbre bijectifs).

Ex 7 : [Mines] Soit G un groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$

1. On suppose que : $\displaystyle\sum_{g\in G} tr(g) = 0$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{g\in G} g = 0$.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par tous les éléments de G. Montrer que V admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

Séance du 23/05 : Intégration

Ex 8 : [Mines] Convergence et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$

Ex 9 : [Centrale] Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}),\ \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2 < +\infty\}$. Soit $f \in E$ et on pose $\|f\| = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}$ et on définit l'application Tf, par $Tf(0) = f(0)$ et $Tf(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f$, pour $x > 0$.

1. (a) Rappeler le théorème concernant la dérivablité des fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$.
   (b) Montrer que Tf est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (Tf(x))^2 \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f^2(t)dt$.
2. Soit $A > 0$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^A (Tf(x))^2 dx \leq 2\int_0^A \frac{f(x)}{x}\left(\int_0^x f\right) dx$.
   En déduire que Tf est dans E et que $\|Tf\| \leq 2\|f\|$ $(*)$.
3. Montrer que la constante 2 est optimale dans l'inégalité $(*)$ (on pourra considérer les fonctions $f_a : t \mapsto t^{-a}$).

Ex 10 : [Mines] Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}\right) - 1\right) dx$.

Ex 11 : [Mines]

1. Soient f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f de signe constant. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt = g(c)\int_a^b f(t)dt$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue telle que f admet la limite $\lambda \in \mathbb{R}$ et 0 et telle qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ telle que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)-\mu}{t}$ est d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$. Montrer que pour tout $0 < a < b$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t} dt$ existe et la calculer.

Ex 12 : [Mines] Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ telle que f' est bornée et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.
Montrer que : $\displaystyle\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$.

Ex 13 : [Mines]

1. Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Donner une expression de f', puis de f.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Ex 14 : [Mines] Soient $C, d \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^d e^{-tx^2}(C + x^2)^\alpha dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi} C^\alpha}{2\sqrt{t}}$.

Séance du 27/05 : Algèbre générale

Ex 15 : [Centrale] Soient p un nombre premier tel que $p \equiv 3[4]$ et $C = \{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ x = y^2\}$.

1. Rappeler l'énoncé du petit théorème de Fermat. Montrer que : $-1 \notin C$.

   On pose $\pi_x = \displaystyle\prod_{y \in C \setminus \{x\}} (x + y)$ et pour $x \in C \setminus \{0\}$ et $\pi = \displaystyle\prod_{\substack{x,y \in C \\ x \neq y}} (x + y)$.

2. Déterminer le cardinal de C.
3. Montrer que : $\forall x \in C \setminus \{0\},\ \pi_x = \pi_1$.
4. Calculer π.

Ex 16 : [Centrale] On pose $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = 2^n - 1$ et $s_n = u^{2^n} + v^{2^n}$.

1. Montrer que si M_n est premier, alors n est premier.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} = s_n^2 - 2$. Qu'en déduire sur la suite (s_n) ?
3. Soit q un nombre premier. On munit l'ensemble $B = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ des deux lois de composition interne définies par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y).(x', y') = (xx' + 3yy', xy' + x'y).$$

   (a) Montrer que les deux lois précédentes munissent B d'une structure d'anneau commutatif fini.

(b) On note $A = \mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$. Montrer que l'application $\pi : \left\{ \begin{array}{lcl} A & \to & B \\ a + \sqrt{3}b & \mapsto & (\overline{a}, \overline{b}) \end{array} \right.$ est bien défini et est un morphisme surjectifs d'anneaux.

4. On suppose n premier. Montrer que si M_n divise s_{n-2}, alors M_n est premier.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde en considérant le plus petit facteur premier q de M_n et déterminer l'ordre de $(\overline{2}, \overline{1})$ dans le groupe des éléments inversibles de l'anneau B.

Ex 17 : [Mines] Soit A un anneau commutatif. Si I est un idéal de A, on note $R(I) = \{x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x^n \in I\}$.

1. Montrer que $R(I)$ est un idéal de A contenant I.
2. Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)$ et $R(I) + R(J) \subset R(I + J)$.
3. Dans cette question, $A = \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des entiers naturels n non nuls tels que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls dont la décomposition en facteurs premiers ne comporte aucun facteur premier d'exposant un moins égal à deux.

Ex 18 : [Mines] Soit $A = \{n \in \mathbb{N},\ 2^n + 1 \equiv 0[n]\}$.

1. Montrer que 3 est l'unique nombre premier appartenant à A.
2. Montrer que A contient toutes les puissances entières de 3.

Ex 19 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $P = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que $(X-1)^k | P$. On note $\mu(P)$ le nombre de coefficients non nuls de P.On veut montrer que $\mu(P) \geq k+1$. On raisonne par l'absurde et on pose $A = \{i \in [\![0, n]\!],\ a_i \neq 0\}$.

1. Soit $P_0 = 1$ et $P_s = \displaystyle\prod_{j=0}^{s-1} (X - j)$, pour $s \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall s \in [\![0, k-1]\!],\ P^{(s)}(1) = \displaystyle\sum_{i \in A} a_i P_s(i)$.
2. En déduire que : $\forall i \in A,\ a_i = 0$. Conclure.
3. L'inégalité démontrée est-elle optimale ?

Ex 20 : [Mines] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n, avec $n \geq 2$ et ayant n racines réelles distinctes et non nulles $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i P'(a_i)}$.

Ex 21 : [Mines] Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et B sont inversibles et préciser le sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par A et B.
2. Dans le cas $n = 3$, préciser les matrices de G qui sont diagonalisables.

Séance du 29/05 : Probabilité, dénombrement

<u>Ex 22</u> : [Centrale] On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.
3. Donner tous les entiers tels que C_n soit pair. En déduire tous les entiers tels que C_n soit impair.

<u>Ex 23</u> : [Centrale] On note d_n le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ sans points fixes que l'on appelera dérangement.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$.

   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{d_n}{n!} t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

   On note $D(t)$ la somme de cette série.

   (c) Calculer $e^t D(t)$.

   (d) En déduire que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

   (e) Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la probabilité p_n qu'un élément de $\mathcal{S}_n$ soit un dérangement.

2. (a) Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on note $s_n(p)$ le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,p]\!]$. Montrer que $p^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} s_n(k)$.

   (b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $\left(s_n(p) \dfrac{x^p}{p!} \dfrac{y^n}{n!} \right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. On note $S(x,y)$ sa somme.

   (c) Calculer $e^x S(x,y)$.

   (d) En déduire la valeur de $s_n(p)$ dans le cas $n = p$, puis dans le cas général.

<u>Ex 24</u> : [Mines] Soit $p \in]0,1[$. Dans un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n, on tire S jetons où S est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et p. Quelle est la probabilité d'obtenir des jetons de numéros consécutifs.

<u>Ex 25</u> : [Mines] On considère une urne remplie avec des boules numérotées de 1 à $2n$. On procède à une suite de tirages sans remise.

1. Calculer la probabilité que les boules impaires soient tirées exactement dans l'ordre $1, 3, ..., 2n-1$.
2. Soit X la variable correspondant au nombre de tirages nécessaires pour obtenir toutes les boules impaires. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Ex 26 : [Mines] On tire au hasard un élément A de $\mathcal{P}([\![1,n]\!])$. Calculer la probabilité que $card(A)$ soit un entier pair.

Ex 27 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Pour $m \in [\![1,n]\!]$, on note $X_m = \min\{k \in [\![1,n]\!],\ \sigma(k) \geq m\}$ et $Y_m = \max\{k \in [\![1,n]\!],\ \sigma(k) \geq m\}$. Calculer la loi de X_m et Y_m et leur espérance.

Ex 28 : [Mines] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi uniforme sur $\{-1,2\}$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + ... + X_n$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $A_n = (\exists k \geq 0,\ S_k = -n)$ et $p_n = P(A_n)$.

1. Exprimer $P(\exists k > 0,\ S_k = 0)$ en fonction de p_{-1} et p_2.
2. Trouver une relation entre p_{n+2}, p_n et p_{n-1}.
3. En déduire la valeur de p_n.

Séance du 30/5 : Matrices et déterminant

Ex 29 : [Centrale]

1. Rappeler la formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. En déduire, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une relation entre $Com(A), A$ et $\det(A)$.
2. Soit $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ définie par $a_{i,i} = 2$, pour i dans $[\![1,n]\!]$ et $a_{i,j} = -1$ si $|i-j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. Calculer $\det(A)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres sont négatifs et tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0$, pour $i \in [\![1,n]\!]$.
   (a) Montrer que A est inversible.
   (b) Montrer que les coefficients de A^{-1} sont positifs.

Ex 30 : [Centrale]

1. Rappeler la définition de l'indicatrice d'Euler et exprimer $\varphi(n)$ en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n.
2. Pour $n \geq 2$, calculer $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$.
3. En déduire le déterminant de $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$, avec $a_{i,j} = i \wedge j$.

Ex 31 : [Centrale] On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

2. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ et $D = diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Montrer qu'il existe un polynôme f tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(\alpha_i)^2 = \alpha_i$. En déduire que $f(D)^2 = D$.

   On considère la suite (c_k) définie par $c_0 = 1$ et pour $k \in \mathbb{N}$: $c_{k+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} c_i c_{k-i}$ et le polynôme $\phi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k X^{k+1}$.

3. Déterminer le reste de la division euclidienne de ϕ^2 par X^{n+1}.
4. Trouver un polynôme g tel que, pour toute matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on ait : $g(N)^2 = I_n + N$.
5. Soit A une matrice inversible. Montrer qu'il existe $R \in \{P(A),\ P \in \mathbb{C}[X]\}$ tel que $R^2 = A$.

<u>Ex 32</u> : [Mines] Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 2n}$ telle que $a_{i,i} = a$ et $a_{i,2n-i+1} = b$, pour $1 \leq i \leq 2n$ et les autres coefficients sont nuls.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.
2. À quelle condition A est-elle inversible ?
3. Calculer A^k, pour $k \in \mathbb{N}$.

<u>Ex 33</u> : [Mines] Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $|\det(A)| \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$.
2. Lorsque $\det(A) \neq 0$, étudier le cas d'égalité.

<u>Ex 34</u> : [Mines] Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et $f : M \mapsto PM - MP$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Calculer sa trace.

<u>Ex 35</u> : [Mines]

1. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $CD = DC$. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.
2. Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :
   i. λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 0 & A^{-1}C \\ I_n & A^{-1}B \end{pmatrix}$;
   ii. il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que la fonction $t \mapsto e^{\lambda t} x$ soit solution de $Ay'' - By' - Cy = 0$.

Séance du 03/06 : Séries, suites et séries de fonctions

Ex 36 : [Mines] Nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - (-1)^n}$?

Ex 37 : [Mines] Quelles sont les fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $\mathbb{R}_+$ d'une suite d'applications polynomiales réelles ?

Ex 38 : [Centrale] Soient $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\beta \in]1, +\infty[$. Soit $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\alpha^n t)}{\beta^n}$.

1. Montrer que f est définie et continue. Si $\alpha < \beta$, montrer que f dérivable.
2. On suppose $\alpha \geq \beta$. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Ex 39 : [Centrale] Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ croissante telle que : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{a}{x}$, avec $a > 0$.

1. Citer le théorème d'intégration des relations de comparaison, puis trouver un équivalent de $\ln(f(x))$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Donner le domaine de définition de $u : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)e^{-nx}$. Déterminer les limites de u aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{C}{x} f(1/x)$.

Ex 40 : [Mines] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b} u_n$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.
2. Dans ce cas, montrer que $\sum n(u_{n+1} - u_n)$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(u_{n+1} - u_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Ex 41 : [Mines] Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs.

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \exp(-\lambda_n x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

On suppose dans le suite que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et la calculer.

3. Traiter le cas particulier où $\lambda_n = n+1$.

Ex 42 : [Mines] On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1 + xe^{-t})dt$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter son développement.

Séance du 05/06 : Réduction

Ex 43 : [Mines] Soient $a_1 < ... < a_n$ des réels et $M = \begin{pmatrix} a_1+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a_n+1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. Montrer que M est diagonalisable et que ses espaces propres sont des droites.

Ex 44 : [Mines] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec B diagonalisable. On suppose que $AB^3 = B^3A$. Montrer que A et B commutent. Pour quels p, peut-on généraliser le résultat avec $AB^p = B^pA$?

Ex 45 : [Mines] On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des suites bornées de $(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}}$.
On s'intéresse à l'endomorphisme T de $\mathbb{B}$ qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T.
2. Soit $S \subset \mathbb{B}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{B}$ de dimension finie stable par T. On note $\widetilde{T}$ l'endomorphisme induit par T sur S. Montrer que l'on dispose de $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ distincts tels que $S = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(\widetilde{T} - \lambda_i Id_S)$.

Ex 46 : [Mines] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de f tel que 0 soit racine simple de P. Montrer que : $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f)$.

   On suppose dans la suite que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $fg = 0$. Montrer que f et g sont cotrigonalisables.
3. Soient $f_1, ..., f_p \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent entre eux. Montrer que $f_1, ..., f_p$ sont cotrigonalisables.
4. Soient $f_1, ..., f_n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents qui commutent. Calculer $f_1 \circ ... \circ f_n$.

Ex 47 : [Mines] Soit u un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}^n$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i. u admet n valeurs propres distinctes ;
ii. la famille $(id_E, u, ..., u^{n-1})$ est libre ;
iii. il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ soit libre.

Ex 48 : [Mines]

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'invesre de $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.
2. Soient A, B, C diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$. Montrer que $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont semblables.

Ex 49 : [Mines]

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si e^A l'est. Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}$?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $e^M = A$ admette une solution $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Séance du 06/06 : Séries entières, dérivation

Ex 50 : [Centrale] On considère la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec $a_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1} (t-k)dt$ et $a_0 = 1$.

1. Montrer que le rayon de convergence R est au moins égal à un.
2. Calculer $S(x)$, pour $|x| < 1$, puis montrer que $R = 1$.
3. Déterminer un équivalent de a_n.

Ex 51 : [Mines] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right)$. Déterminer un équivalent de u_n.

Ex 52 : [Centrale] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable telle que $ff^{(3)} = 0$.

1. Montrer que, si f' est strictement monotone sur un intervalle I, alors f prend une même valeur au plus deux fois sur I.
2. On pose $\Gamma = \{x \in I,\ f''(x) = 0\}$. Montrer que, si Γ est non vide, alors Γ n'est ni majoré, ni minoré.
3. Montrer que Γ est un intervalle et en déduire f.

Ex 53 : [Mines] Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = e^{-1/x^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est-elle solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire homogène normalisée à coefficients continues ?

Ex 54 : [Centrale]

1. Montrer le théorème d'intégration des séries uniformément convergentes sur un sgment.
2. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue, on pose $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$. On considère la même définition si f est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   On note pour $r > 0$, $\gamma_r : t \in [0, 2\pi] \to re^{it}$.
   Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$. Montrer que $f(a) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}dz$.
3. En déduire, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour r assez grand (à préciser), l'égalité $\exp(M) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_r} e^z(zI_n - M)^{-1}dz$.

Ex 55 : [Centrale]

1. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et X_x une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre x. Calculer $\mathtt{E}(X_x)$, puis montrer que pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $P\left(|X_x - \mathtt{E}(X_x)| \geq \varepsilon x\right) = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$, quand x tend vers $+\infty$.

   Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_\alpha : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n!}x^n$.

2. Déterminer le domaine de définition de u_α.
3. Déterminer u_1 et u_2.
4. Montrer que pour tout $\alpha < 0$, on a : $u_\alpha(x) = o(e^x)$, quand x tend vers $+\infty$.
5. Montrer que pour tout $\alpha \in]-1, 0[$, on a : $u_\alpha(x) \sim x^\alpha e^x$, quand x tend vers $+\infty$.

Ex 56 : [Centrale] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n \geq 1} \sin(nx)e^{-n^\alpha}$, avec $0 < \alpha$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Est-elle décomposable en série entière au voisinage de 0 ?

Séance du 10/06 : Espaces euclidiens et préhilbertiens

Ex 57 : [Centrale] Pour $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(S) \leq \lambda_2(S) \leq ... \leq \lambda_n(S)$ le spectre ordonné de S. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire cononiquement noté $\langle\ .\ ,.\ \rangle$ et on note S^{n-1} la sphère unité.

1. Montrer que, si S est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda_1(S) = \min\{\langle Sx, x\rangle\ ,\ x \in S^{n-1}\}$.
2. Soit $d \in [\![1, n]\!]$ et on note $\mathcal{V}_d$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension d. Montrer que pour k dans $[\![1, n]\!]$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a :
$\lambda_k(S) = \min\limits_{V \in \mathcal{V}_k} \max\{\langle Sx, x\rangle\ ,\ x \in V \cap S^{n-1}\} = \max\limits_{V \in \mathcal{V}_{n-k+1}} \min\{\langle Sx, x\rangle\ ,\ x \in V \cap S^{n-1}\}$.
3. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i+j \leq n+1$ et $S, S' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, montrer que : $\lambda_{i+j-1}(S) \geq \lambda_i(S)+\lambda_j(S)$.

<u>Ex 58</u> : [Mines] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}(P(x)+x^n)^2 dx \geq (n!)^2$.

<u>Ex 59</u> : [Mines] Soit E un espace euclidien.

1. Trouver les endomorphismes f tels que : $\forall x, y \in E,\ \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0$.
2. Pour un tel f, discuter de la nature de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

<u>Ex 60</u> : [Mines] Soit E un espace euclidien de dimension 4. Trouver les $f \in \mathcal{L}(E)$ non nuls tels que $tr(f) = 0,\ f + f^4 = 0$ et $f^* = -f^2$.

<u>Ex 61</u> : [Mines] Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E),\ u^* = -u\}$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'ensemble $T = \{tr(uv),\ v \in \mathcal{O}(E)\}$ est majoré.
2. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tu) \in \mathcal{O}(E)$.
3. On suppose que $\sup(T)$ est atteint en $v = Id_E$. Montrer que u est dans $S^+(E)$.
4. Étudier la réciproque.

<u>Ex 62</u> : [Mines] On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel défini par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$ et on note $\|\ .\ \|_2$ la norme associée. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall f \in F,\ \|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$.

1. Montrer que $F \neq E$.
2. Soit $(f_1, ..., f_n)$ une famille orthonormale de F. Montrer que :
$$\forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{R},\ \left|\sum_{i=1}^n a_i f_i\right| \leq C\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$
3. En déduire que F est de dimension finie majorée par C^2.

<u>Ex 63</u> : [Mines]

1. Montrer que $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(M) = 1\}$ est un fermé non compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
3. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

4. En déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(M) > 0\}$ sont connexes par arcs.

Séance du 12/06 : Équations différentielles, calcul différentiel, fonctions vectorielles

---

Ex 64 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Trouver les fonctions $y \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ solutions de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} y^{(k)}\omega^{n-k} = 0$.

Ex 65 : [Mines] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note (S) le système différentielle :
$\forall p \in [\![1, n]\!],\ x_p^{(m)}(t) = \displaystyle\sum_{q=1}^{n} a_{p,q} x_q(t)$.
Montrer que A est nilpotente si et seulement si toutes les solutions de (S) sont polynomiales.

Ex 66 : [Mines]

1. Soient $A \in \mathbb{R}_+$ et $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues. On suppose que :
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leq A + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)dt$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leq A\exp(\displaystyle\int_0^x g(t)dt)$.
Soit $(*)$ l'équation différentielle $x''(t) + a(t)x(t) = b(t)$, avec a et b continues sur $\mathbb{R}_+$ et telles que b et $t \mapsto ta(t)$ soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$ Soit x solution de $(*)$
2. Montrer que : $\forall t \in [1, +\infty[,\ x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \displaystyle\int_1^t (t-u)a(u)x(u)du + \int_1^t (t-u)b(u)du$.
3. On pose, pour $t \geq 1$, $y(t) = \dfrac{|x(t)|}{t}$. Montrer l'existence de K tel que :
$$\forall t \in [1, +\infty[,\ y(t) \leq K\exp\left(\int_1^t u|a(u)|du\right) \leq K\exp\left(\int_1^{+\infty} u|a(u)|du\right).$$

Ex 67 : [Mines] On considère l'équation différentielle $y'' - y = |\cos(x)|$. Existe-t-il des solutions positives ? Bornées ? Positives et bornées ?

Ex 68 : [Mines] Soit $K \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions $f :]0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation : $x\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y) - y\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y) = Kf(x,y)$.

Ex 69 : [Mines] Pour $x = (x_0, ..., x_n)$ et $y = (y_0, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ on pose
$$f(x,y) = \left(\sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j=k}} x_i y_j\right)_{k\in[\![0,2n]\!]} \in \mathbb{R}^{2n+1}.$$

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nuls. Montrer que $f(x,y)$ est non nul.
2. Soient u et v les applications de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ définies par $u : x \mapsto f(x,x)$ et $v : x \mapsto \dfrac{f(x,x)}{\|f(x,x)\|}$ où $\| \,.\, \|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^{2n+1}$. Calculer les différentielles de u et v.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul. Calculer $\mathrm{rg}\,(dv(x))$.

<u>Ex 70</u> : [Mines] Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne canonique.
On pose $f : M \in E \mapsto \|M\|^2 = tr(M^T M)$ et $g : M \in E \mapsto \det(M) - 1$. On note h la restriction de f à $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in E,\ \det(M) = 1\}$.

1. Jusitifer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer leur gradient en une matrice $M \in SL_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f admet un minimum sur $SL_n(\mathbb{R})$. Soit M_0 une matrice où il est atteint.
3. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale au gradient de g en M_0. Montrer qu'il existe un chemin γ de classe $\mathcal{C}^1$ défini sur un voisinage de 0, à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = H$.
4. Montrer que $(\nabla f(M_0))^{\perp} = (\nabla g(M_0))^{\perp}$.
5. Calculer le minimum de h sur $SL_n(\mathbb{R})$.

Séance du 13/06 : Variables aléatoires

<u>Ex 71</u> : [Mines] Une puce se trouve sur l'origine de $\mathbb{Z}^2$. À chaque étape, elle saute aléatoirement dans l'une des quatre directions. On note X_n l'abscisse de la puce à l'étape n. Calculer $\mathtt{E}(X_n)$ et $\mathtt{E}(X_n^2)$.

<u>Ex 72</u> : [Mines] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer l'existence de α dans $\mathbb{R}_+^*$ que l'on déterminera tel que :
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\left|\dfrac{1}{\ln(n)} \max\limits_{1\leq k\leq n} X_k - \alpha\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$

<u>Ex 73</u> : [Centrale]

1. Rappeler la formule des probabilités totales et composées.

   On fixe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables alétoires indépendantes uniformément distribuées sur $[\![1, d]\!]$. Soit $N_d = \inf\{n \geq 2,\ U_n \in \{U_1, ..., U_n\}\}$.

2. Quelles sont les valeurs prises par N_d ?
3. Montrer que $P(N_d > k) = \dfrac{d!}{d^k (d-k)!}$, pour $k \in [\![0, d]\!]$.
4. Pour tout réel $x > 0$, calculer $\lim\limits_{d \to +\infty} P\left(\dfrac{N_d}{\sqrt{d}} > x\right)$.

<u>Ex 74</u> : [Mines] On suppose que lorsqu'un enfant naît, il a une chance sur deux d'être une fille. Dans une famille donnée, le nombre d'enfants est la variable aléatoire Z et le nombre de fille est X.

1. Montrer que : $\forall t \in [0,1],\ G_X(t) = G_Z\left(\dfrac{1+t}{2}\right)$.
2. Expliciter la loi de X si Z suit une loi de Poisson de paramètre λ.

<u>Ex 75</u> : [Mines] Soit $g : t \mapsto \dfrac{e^t}{(1+e)-t}$.

1. Montrer que g est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$
2. Soit $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X. Déterminer la probabilité que $M = \begin{pmatrix} 0 & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ait un nombre fini de sous-espaces stables.

<u>Ex 76</u> : [Mines] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$ d'espérance $\mathtt{E}(X) = m$.

1. Montrer que $\mathtt{V}(X) \leq (m-a)(b-m)$.
2. Montrer que cette inégalité est optimale.

<u>Ex 77</u> : [Mines]

1. Soit $(X_1, ..., X_n)$ une famille i.i.d. de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On note $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \mathtt{E}(e^{tS}) \leq \exp\left(\dfrac{nt^2}{2}\right)$.

   En déduire que : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ P(|S| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$.
2. Généraliser au cas où les X_k sont des variables aléatoires discrètes i.i.d., à valeurs dans $[-1,1]$ centrées.

Séance du 17/06 : Espaces vectoriels normés, suites, fonctions usuelles

---

<u>Ex 78</u> : [Centrale] Soient (E,N) et (E',N') deux espaces vectoriels normés. Soit $d \in \mathbb{N}$.
Pour $P = p_0 + p_1X + ... + p_dX^d \in \mathbb{R}_d[X]$, on pose $\|P\| = \max(|p_0|, ..., |p_d|)$.

1. Vérifier que $\|\ .\ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.
2. (a) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, convergeant vers $\ell \in E$. Montrer que l'ensemble $Y = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

   (b) Soit $f : E \to E'$ continue telle que pour tout compact K de E', $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que si F est un fermé de E, alors $f(F)$ est un fermé de E'.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ est une racine de P telle que $|x| > 1$, alors : $|x| \leq \|P\| + 1$.

4. En déduire que l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de $\mathbb{R}_d[X]$ est fermé dans $\mathbb{R}_d[X]$.

Ex 79 : [Centrale]

1. Rappeler la règle de d'Alembert pour une série à termes positifs.
2. On considère une suite croissante $(q_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
   (a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{z^n}{q_1 \ldots q_n}$?
   (b) Montrer que si la suite (q_n) est stationnaire, alors le réel $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 \ldots q_n}$ est dans $\mathbb{Q}\cap[0,1]$.
   (c) On admet réciproquement que si (q_n) tend vers $+\infty$, alors : $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que les réels e, $\operatorname{ch}(\sqrt{2})$ et $e^{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.
3. Montrer la réciproque admise ci-dessus.

Ex 80 : [Mines] Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que : $\forall x \in E, \exists y \in F,\ d(x,F) = \|y - x\|$.
2. On suppose $F \neq E$. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u,F) = \|u\| = 1$.
3. En déduire que $\overline{B}(0,1)$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Ex 81 : [Mines] On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\ .\ \|_\infty$. Pour $f \in E$, on pose
$u(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k f\left(\frac{1}{k}\right)$.

1. Montrer que u est bien définie sur E.
2. Montrer que u est continue sur E et déterminer sa norme subordonnée.

Ex 82 : [Mines] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image de tout ouvert par f est un ouvert.

Ex 83 : [Mines] On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, pour $A \in E$, $\|A\| = \displaystyle\sup_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$.

1. Montrer que $\|\ .\ \|$ est une norme d'algèbre.
2. Soit $E \in A$. Étudier la convergence de la série $\sum A^k$, si $\|A\| < 1$.
   Cette condition est-elle nécessaire pour que la série soit convergente ?
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_k = \left(I_n + \dfrac{A}{k}\right)^k$. Étudier la convergence et la limite de la suite (U_k).

Ex 84 : [Mines] Pour $n \geq 2$, on considère l'équation $\sin(x) = \dfrac{x}{n}$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution sur $]0,\pi[$ que l'on notera x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ converge. Quelle est sa limite ?
3. Donner un développement asymptotique de (x_n) à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.