## 15-Calcul Différentiel

**Ex 1 :** Dans chacun des cas suivants, la fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}^2$, est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$ ?

***a.*** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}(xy) - \cos(xy)}{x^2y^2} & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

***b.*** $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

***c.*** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

***d.*** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

***e.*** $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}} & \text{si } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$

***f.*** $f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| > y \\ y^2 & \text{si } |x| \leqslant y \end{cases}$

***g.*** $f(x,y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)dt,\ \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

***h.*** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^x - x - \cos(y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1/2 & \text{sinon} \end{cases}$

***i.*** $f(x,y) = \min(x, y^2)$.

***j.*** ***(CCP 52)*** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

---

**Ex 2 :** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ |f(x) - f(y)| \ \leq \ \|x-y\|^2$. Montrer que $f$ est constante.

---

**Ex 3 :** Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = x(1-y)$ si $x \leq y$ et $f(x,y) = y(1-x)$ sinon.

***1.*** Étudier la continuité.

***2.*** Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y\}$. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.

***3.*** Montrer que $f$ n'admet pas de dérivées partielles en $(a,a) \in \Delta$.

***4.*** Montrer que $f$ admet un maximum et un minimum sur $[0,1]^2$ et les déterminer.

---

**Ex 4 :** Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(ny)}{\sqrt{n}}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$.

---

**Ex 5 :** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}^*,\ f(tx) = tf(x)$. Montrer que $f$ est linéaire.

---

**Ex 6 :** Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 (P(t))^3 dt \end{cases}$ est différentiable et donner sa différentielle.

(*) Même question avec $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \sin(tP(t))dt \end{cases}$.

---

**Ex 7 :** (*) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $d^\circ \mu_M = n$. On pose $f(M) = (tr(M), ..., tr(M^n))$.

***1.*** Montrer que $f$ est différentiable et calculer sa différentielle.

***2.*** Montre que $df(M)$ n'est inclus dans aucun hyperplan de $\mathbb{R}^n$. En déduire $\operatorname{rg}(df(M))$.

---

**Ex 8 :** (*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $g : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t,y)dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Ex 9 :** Soient $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > |y|\}$ et $f : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x + y\cos(t))dt$.

***a.*** Montrer que $f$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$, puis déterminer $\nabla f$ en tout point de $\Omega$.

***b.*** Calculer $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

---

**Ex 10 :** Soit $E$ un espace euclidien et $u$ un endomorphisme autoadjoint de $E$. On pose $f : x \mapsto \dfrac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$ définie sur $E \setminus \{0\}$.

***1.*** Calculer $f(\alpha x)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in E \setminus \{0\}$.

***2.*** Montrer que $f$ est bornée et atteint ses bornes.

***3.*** Montrer que $f$ est différentiable et déterminer sa différentielle.

***4.*** En déduire que $u$ admet au moins une valeur propre.

***5.*** En déduire un démonstration du théorème spectral.

---

**Ex 11 :** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que : $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \geq 1$.

Montrer que $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

---

**Ex 12 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $f : x \mapsto \langle a, x\rangle \langle b, x\rangle$ définie sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.

***1.*** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et déterminer sa matrice hessienne en tout point.

***2.*** Montrer qu'il existe $H \in S_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^T Hx$.

---

**Ex 13 :** (*) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $f$ définie par : $\forall (x,y) \in D(0,R),\ f(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+iy)^n$. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

---

**Ex 14 :** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$.

***a.*** Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

***b.*** Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$. $f$ est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ ?

---

**Ex 15 :** Montrer que les fonctions $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ : $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ sont de la forme $f(x,y) = g\left(\dfrac{x}{1+y^2}\right)$, avec $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

---

**Ex 16 :** Trouver toutes les fonctions $f$ de classe $\mathscr{C}^1$, définies sur un domaine $D$ solutions de

***a.*** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 + y^3 + x^2$ et $D = \mathbb{R}^2$ ;

***b.*** $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = x$ et $D = \mathbb{R}^2$ ;

***c.*** $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$ et $D = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ ;

***d.*** $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$ et $D = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ ;

***e.*** $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$ et $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ;

***f.*** $x^2 + y^2 + \left(x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)f = 0$ et $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ;

**g.** $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{x}$ et $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (poser $f(x,y) = g\left(x, \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right)$) ;

**h.** $\dfrac{\partial f}{\partial x} - xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ et $D = \mathbb{R}^2$ ($u = x$, $v = ye^{x^2/2}$).

---

**Ex 17 :** Trouver toutes les fonctions $f$ de classe $\mathscr{C}^2$, définies sur $D$, solutions de

**a.** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + x$ et $D = \mathbb{R}^2$ ;

**b.** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f$ et $D = \mathbb{R}^2$ (poser $f(x,y) = e^{-y}g(x,y)$) ;

**c.** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ et $D = \mathbb{R}^2$ (poser $u = x + y$ et $v = 2x + y$) ;

**d.** $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ et $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$ (poser $u = xy$ et $v = x/y$) ;

---

**Ex 18 :** $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$. Soit $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (x,y) & \longmapsto & (xy, \dfrac{x}{y}) \end{array} \right.$ .

*1.* Montrer que $\Phi$ est bijective et déterminer $\Phi^{-1}$.

*2.* Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2f(x,y) + 2 = 0$, à l'aide du changement de variable $\Phi$.

*3.* Résoudre $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$, à l'aide du changement de variable $\Phi$.

---

**Ex 19 :** Étude des extrema locaux de $f$ sur $\mathbb{R}^2$ quand $f(x,y) =$

**a.** $x^2 + xy + y^2 - 5x - y$ ;

**b.** $2x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 6xy^2$ ;

**c.** $(x-y)^2 + (x+y)^3$ ;

**d.** $xe^y + ye^x$ ;

**e.** $x^4 + y^4 + y^3$ ;

**f.** $x^2y^2(1 + x + 2y)$ ;

**g.** $x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$ ;

**h.** $(x^2-1)^2 + (x^2 - e^y)^2$ ;

**i.** $\dfrac{x+y+1}{3} - \sqrt[3]{xy}$, sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

---

**Ex 20 :** Étude des extrema de $f$ sur $D$ quand $f(x,y) =$

*1.* $(y-x)^3 + 6xy$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ ;

*2.* $y^3x^4 + \ln(1+y^4)$ et $D = [-1,1]^2$ ;

*3.* $x^3 - 3x(1+y^2)$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$ ;

*4.* $(x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ et $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leqslant 1/2 \text{ et } |x-y| \leqslant 1/2\big\}$ ;

---

**Ex 21 :** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\Delta(f) = 0$. On pose : $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

*1.* Montrer que $g$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que : $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial g}{\partial r}\right)(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0$, pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

*2.* Montrer que $r \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))d\theta$ est constante sur $r$.

---

**Ex 22 :** Soient $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et $\varphi$ une forme linéaire non nulle sur $E$. Déterminer les extrema sur $E$ de $f : x \mapsto \varphi(x)e^{-\|x\|^2}$.

---

**Ex 23 :** Déterminer le maximum du produit $xyz$ lorsque $(x,y,z)$ varie avec $\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \\ x + y + z = a \ \ (a > 0) \end{array} \right.$

**Ex 24 :** (*) Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $M = \max(f, g)$.
On note $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = g(x, y)\}$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) > g(x, y)\}$ et $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) < g(x, y)\}$. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ un point en lequel $M$ réalise un minimum.

1. Donner un condition nécessaire et suffisante pour que $M$ soit différentiable en $b \in \mathbb{R}^2$.
2. Que dire si $a$ est dans $U$ ou $V$ ?
3. On suppose que $a$ est dans $F$. Montrer que $((\nabla f)(a), (\nabla g)(a))$ est liée.

---

**Ex 25 :** Soit $U$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe $(\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1],\ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y))$ et différentiable en $a \in U$.

1. Si $U$ est un intervelle ouvert de $\mathbb{R}$, montrer que si $f'(a) = 0$, alors $f$ admet un minimum absolu en $a$.
2. Si $df(a) = 0$, montrer que $f$ admet un minimum absolu en $a$.
3. On suppose maintenant $f$ de classe $\mathcal{C}^2$.
   - **a.** Soient $h \in \mathbb{R}^p$ et $\varphi : t \mapsto f(a + th)$. Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$ (avec $r > 0$) et que : $\forall t \in ]-r, r[,\ \varphi''(t) = h^T H_f(a + th)h$.
   - **b.** Montrer que $f$ est convexe si et seulement si : $\forall a \in U,\ H_f(a) \in S_p^+(\mathbb{R})$.

---

**Ex 26 :** Trouver, dans les cas suivants, les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que : $\Delta(g) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$,

- **a.** avec $I = ]-1; 1[$ et $g(x, y) = f\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times ]0; +\infty[$ ;
- **b.** avec $I = \mathbb{R}$ et $g(x, y) = f(y/x)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$.

---

**Ex 27 :** Soient $f \in \mathcal{C}^2$ et $F : (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, ..., 0)\} \mapsto f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f$ pour que $\Delta F = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$.

---

**Ex 28 :** (*) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $J_f$ soit à valeurs dans $O_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $X$ un ensemble et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application antisymétrique par rapport aux deux premières variables et symétrique par rapport aux deux dernières. Montrer que : $g = 0$.
2. Montrer que $J_f$ est constante.
3. En application la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral à $\varphi : t \mapsto f(tx)$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = f(0) + J_f(0)$.

---

**Ex 29 :** Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x((\ln(x))^2 + y^2)$ et $\Sigma$ la surface associée.

1. Déterminer les points critiques de $f$. $f$ admet-elle un extremum global ?
2. Soit $(a, b)$ un point critique de $f$, déterminer l'équation du plan tangent à $\Sigma$ en $(a, b, f(a, b))$
3. Exprimer l'équation du plan tangent en $(1, 1, 1)$
4. Exprimer la différentielle de $f$ en $(1, 1)$ puis $g$ telle que $g(x, y) = (f(x, y), f(x, y))$.

---

**Ex 30 :** Montrer que $f : (x_1, ..., x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$ a un maximum global que l'on explicitera sur $\Gamma = \{(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. En déduire : $\forall (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \leq \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$.