CCINP MP 2023

Ex 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang un.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f^2 = \lambda f$.
2. A-t-on : $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f)$?
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   i. Il existe un scalaire c non nul tel que cf soit un projecteur ;
   ii. $f \circ f \neq 0$;
   iii. $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f)$.

Ex 2 : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si et seulement s'il existe deux nombres complexes a, b tels que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\bar{z}$.
2. Montrer l'unicité du couple (a, b).
3. Montrer que f est un projecteur si et seulement si $a^2 + |b|^2 = a$ et $b(a + \bar{a}) = b$.
4. Montrer que f est un projecteur différent de l'endomorphisme nul et de l'identité si et seulement si $\mathrm{Re}(a) = \dfrac{1}{2}$ et $|a| = |b|$.

Ex 3 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si u est nilpotent, alors $u^n = 0$.
2. On suppose que u est d'indice de nilpotence n. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :
$$A = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & (0) & \vdots \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Déterminer les matrices X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X^2 = A$.

Ex 4 : On pose $A = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & \mathrm{I}_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal et le rang de A
2. Soit u un endomorphisme, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) \leq 2\dim(\mathrm{Ker}(u))$
3. Soit $B \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(B) = 2n$
   i. Montrer que $\mathrm{Im}(B^2) \subset \mathrm{Ker}(B)$
   ii. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(B^2)$

iii. Soit $(E_1;...;E_m)$ une base d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(B^2)$.
Montrer que $(B^2E_1;...;B^2E_m;BE_1;...;BE_m;E_1;...;E_m)$ est une famille libre

iv. Montrer que A et B sont semblables.

<u>Ex 5</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A de multiplicité $p \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\bar{\omega}$ est une valeur propre de A de multiplicité p.
2. i. Montrer que le polynôme $X^3 - 3X - 4$ admet une unique racine réelle.
   ii. On suppose que $A^3 - 3A - 4\mathrm{I}_n = 0$. Montrer que $\det(A) \geq 0$.
3. On suppose que $A^2 + A + \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que n est pair.

<u>Ex 6</u> : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Donner les conditions de diagonalisabilité concernant les polynômes annulateurs et caractéritstiques.
2. Montrer que pour $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie $B^2 = A$, alors B est diagonalisable.
3. Trouver toutes les matrices B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $B^2 = A$.

<u>Ex 7</u> :

1. Localiser les racines réelles de $X^3 - X - 1$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\chi_A(0)$, $\lim\limits_{+\infty} \chi_A$ et $\lim\limits_{-\infty} \chi_A$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

<u>Ex 8</u> : Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$.
   i. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2, puis un polynôme annulateur de M de degré 4.
   ii. Montrer que M est diagonalisable, et préciser les valeurs possibles de son spectre.
   iii. Donner les différentes formes possibles de M.

<u>Ex 9</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 + A^T = I_n$.

1. Justifier que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}\, M = \mathrm{Sp}\, M^T$.
2. Montrer que A est inversible si et seulement si $1 \notin \mathrm{Sp}\, A$.
3. Montrer que le polynôme $X^4 - 2X^2 + X$ est annulateur de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

<u>Ex 10</u> : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^{*2}$, $(M, A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ telles que $A + B = I_n$, $M = \lambda A + \mu B$, $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

1. Déterminer $M^2-(\lambda+\mu)M+2\lambda\mu I_n$.
2. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
3. Montrer que A et B sont des matrices de projecteurs.
4. La matrice M est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

<u>Ex 11</u> : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

<u>Ex 12</u> : Soit a, b, c, d, e, f des réels et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 & e \\ 0 & f & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est trigonalisable.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit diagonalisable.
3. Dans ce cas, trouver une base de vecteur propres

<u>Ex 13</u> :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $ab > 0$ ou $a = b = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ pair et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   i. Déterminer un espace de dimension deux stable par A.
   ii. Montrer que A soit diagonalisable si et seulement si :
   $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i = a_{n+1-i} = 0$ ou $a_i a_{n+1-i} > 0$.

<u>Ex 14</u> : Soit $E = \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Soit $P \in E$ et on pose $f(P) = Q$, avec $Q = (X^2-1)P'(X)-(2n+1)XP(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f (on pourra résoudre une équation différentielle).
3. Montrer que f est diagonalisable.

<u>Ex 15</u> : Soit f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même donnée par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Redéfinir la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Écrire la matrice de f dans cette base.
3. Donner les éléments propres de f.
4. L'application f est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, exprimer la matrice de f dans la base canonique en fonction d'une matrice diagonale.
5. Pour n dans $\mathbb{N}$, exprimer f^n.

Ex 16 : Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$. On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel stable par u non réduit à $\{0\}$.

1. Que dire du spectre de u ?
2. Montrer que, pour tout vecteur $x \neq 0_E$, $\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ est une base de E. Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?
3. Montrer que cette matrice ne dépend pas du vecteur x choisi.

Ex 17 : Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \operatorname{tr}(M) I_n$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. Trouver une base des sous-espaces propres de ϕ.
4. Déterminer $\operatorname{tr}\phi$ et $\det\phi$.
5. L'endomorphisme ϕ est-il inversible ? Si oui, déterminer ϕ^{-1}.

Ex 18 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et N_n l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i. A est diagonalisable ;
ii. $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A) \in N_n \Leftrightarrow P(A) = 0$.

Ex 19 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que deux endomorphismes u et v de E. On suppose que u et v commutent et u diagonalisable avec n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que tous les vecteurs propres de u sont également vecteurs propres de v.
2. Montrer que v est diagonalisable dans une même base que u.
3. Montrer qu'il existe $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$ telle que $v = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$.

Ex 20 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $a_{1,i} = a_{i,1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, les autres coefficients étant nuls. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Quel est le rang de A ?
2. Trouver les valeurs propres et sous-espaces propres de A.
3. Donner la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur l'image de f pour la structure euclidienne canonique.

Ex 21 : On note $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
2. Trouver a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \,\mathrm{d}t$ soit minimal :
   - en construisant une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$;
   - en recherchant a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$.

Ex 22 : On définit trois fonctions sur le segment $[0,1]$: $f_0 : t \mapsto 1, f_1 : t \mapsto t$ et $f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^t$, et on note $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(f_0, f_1, f_2\right)$.

1. Montrer que $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Trouver une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}\left(f_0, f_1\right)$.
3. Trouver a et b tels que la distance de f_2 à $t \mapsto at + b$ soit minimale.

Ex 23 : Soient $(E, \langle\ .\ ,.\ \rangle)$, un espace euclidien, $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \|v(x)\| \leqslant \|x\|$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) = E$.
   Ind. Considérer l'application $t \mapsto \|x + ty\|^2 - \|v(x + ty)\|^2$.
2. Soit, pour $x \in E$ et $p \in \mathbb{N}, w_p(x) = \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{p} v^k(x)$.

   Montrer que, pour tout $x \in E$, la suite $(w_p(x))$ converge. Déterminer sa limite.

Ex 24 : Soient u et v deux endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien $(E, \langle\rangle,)$.

1. Montrer que u et v commutent si et seulement si $u \circ v$ est autoadjoint.
2. Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe une base orthonormée de vecteurs propres communs à u et v.
3. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan $x + y + z = 0$. Caractériser les symétries orthogonales de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec s.

Ex 25 : Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $S(E)$ l'ensemble des endomorhpismes autoadjoints de E.

1. Soit $v \in S(E)$ tel que : $\forall x \in E,\ (v(x)|x) = 0$. Montrer que $v = 0$.
2. i. Montrer qu'un projecteur orthogonal de E est autoadjoint.
   ii. Montrer qu'un projecteur de $S(E)$ est un projecteur orthogonal.
3. Soient $u_1, ..., u_p \in S(E)$ tels que $rg(u_1) + ... + rg(u_p) = n$ et :

   $\forall x \in E,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(u_i(x)|x) = (x|x)$.

   i. Montrer que $u_1 + ... + u_p = Id_E$.
   ii. Montrer que $\mathrm{Im}\left(u_1\right) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\left(u_p\right) = E$.

iii. Montrer que pour tout i de $[\![1,p]\!]$, u_i est la projection sur $\operatorname{Im}(u_i)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u_1)\oplus ...\oplus \operatorname{Im}(u_{i-1})\oplus \operatorname{Im}(u_{i+1})\oplus ...\oplus \operatorname{Im}(u_p)$.

iv. Montrer que les $\operatorname{Im}(u_i)$ sont orthogonaux entre eux deux à deux.

Ex 26 : Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$,

1. Soient $\lambda \in \operatorname{sp} u$ et x un vecteur propre associé. Montrer que $\|u^*(x)\|^2 = \lambda^2\|x\|^2$. Montrer que u et u^* ont les mêmes espaces propres.
2. Montrer que u et u^* ont les mêmes espaces propres.
3. Montrer que les espaces propres de u sont orthogonaux.
4. Montrer que, si u est diagonalisable, alors u est symérique.

Ex 27 : Soient $(E, \langle\ .\ ,.\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2, f$ un endomorphisme autoadjoint de E, a sa plus petite valeur propre et b sa plus grande valeur propre.

1. Montrer que, pour tout $x \in E, a\|x\|^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \leqslant b\|x\|^2$,
2. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = k$ si $i = j, a_{i,j} = 1$ si $|i-j| = 1$, les autres coefficients étant nuls.

   Montrer que la plus grande valeur propre b de A vérifie $k + 2 \geqslant b$,

---

Ex 28 : Soient E un espace euclidien, a et b deux vecteurs linéairement indépendants.
Soit $u : x \mapsto \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$.

1. Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint.
2. Déterminer son noyau.
3. Déterminer les éléments propres de u, lorsque a et b sont unitaires.

Ex 29 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint.

1. Montrer que :
   i. $f \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \operatorname{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.
   ii. $f \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \operatorname{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.
2. Soit f symétrique positive, montrer qu'il existe un endomorphisme g autoadjoint et positif tel que $f = g^2$. Que dire si f est défini positif ?
3. Soit f défini positif et g positif, montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

Ex 30 : Soit $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^T A$.
2. Sans utiliser χ_A, trouver les valeurs propres de A et les multiplicités associées.
3. Calculer π_A et χ_A.
4. Trouver $P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que $P^T AP$ soit diagonale.

5. Trouver le commutant de A.

Ex 31 : $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni d'une norme sous-multiplicative $\|.\|$, ie :
$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

1. Soit $H \in E$, $\|H\| < 1$, montrer que $I_n - H$ est inversible, d'inverse $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} H^n$
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans E
3. Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^{-1} \end{array} \right.$.
   i. Montrer que f est différentiable en I_n et que $df(I_n)(H) = -H$
   ii. Montrer que f est différentiable en tout point de $GL_n(\mathbb{R})$
   (on remarquera que $(M+H)^{-1} = (M(I_n + M^{-1}H))^{-1}$).

Ex 32 : On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln(k))^2$

1. Montrer que $\sum u_n$ diverge.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$\int_1^n (\ln(t))^2 \mathrm{d}t \leq u_n \leq \int_2^{n+1} (\ln(t))^2 \mathrm{d}t$$

3. Pour $x \geq 1$, calculer $\displaystyle\int_1^x (\ln(t))^2 \mathrm{d}t$ et en trouver un équivalent en $+\infty$ en fonction de $x \mapsto x(\ln(x))^2$.
4. Déterminer un équivalent de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geq 2}$ et en déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{u_n}$.

Ex 33 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}$.

1. Montrer que : $u_{2n} = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\ell} + \sqrt{2\ell - 1}}$.
2. En déduire que $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2n}}{2}$.
3. Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n + u_{n+1}$. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (v_{n+1} - v_n)$ est convergente de somme strictement négative.
5. Trouver la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{u_n}$.

Ex 34 :

1. Soit $M > 0$ et $u : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que : $\forall x \in [1, +\infty[, \ |u(x)| \leqslant M$.
   Montrer que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{u'(t)}{t} dt$ converge.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ et $\displaystyle\int_1^\infty \sin(t^2) dt$ convergent.
3. Montrer que $\displaystyle\int_1^\infty \sin(t^3) dt$ converge.

Ex 35 : On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{t^2+1} \, dt$.

1. Montrer que I converge.
2. On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t \, |\sin(t)|}{t^2+1} \, \mathrm{d}t$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J(n\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{(u+k\pi)\sin(u)}{(u+k\pi)^2+1} \, \mathrm{d}u$.
3. I converge-t-elle absolument ?

Ex 36 : Soit, pour n un entier naturel non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^4)^n} \, dt$.

1. Monter que I_n est défini, puis que la suite $(I_n)_{n>0}$ converge vers une limite à déterminer.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}. En déduire une seconde façon de déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n>0}$.

Ex 37 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$.

1. Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \geqslant 1$.
2. Montrer que $I_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right) I_n$.
3. On pose $u_n = n^{1/3} I_n$. étudier la convergence de la suite (u_n). Ind. Poser $v_n = \ln(u_n)$.
4. Étudier la convergence de la série $\sum I_n$.

Ex 38 : On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$, $g_n(t) = e^t \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$.

1. Montrer que : $\forall (t,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}^*$, $|g_n'(t)| \leqslant \dfrac{e^t}{n}$.
2. Montrer que : $\forall (t,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}^*$, $\left| e^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \right| \leqslant \dfrac{t}{n}$.
3. Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $G_n : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^x g_n(t) \mathrm{d}t$.

Ex 39 : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $v_n(x) = n^x e^{-nx}$.

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$.

1. Donner l'ensemble de définition de S.
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Donner la limite de S en $+\infty$ à l'aide du théorème de la double limite.
4. $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?
5. S est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?

Ex 40 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 + n^2}$·.

1. Justifier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$. On note S la fonction somme :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$
2. Justifier la continuité de S sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que : $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \pi$

   (on pourra considérer, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{2x}{x^2+t^2}$).

Ex 41 : Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0 , Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $u_n(t) = a_n(1 - t)t^n$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge normalement.
3. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Ex 42 : On pose $f_n(t) = \dfrac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n + 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'intervalle de convergence de $\sum u_n$, noté D.
2. Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ pour $t \in D$.
3. Étudier la convergence normale sur $[0, 1]$ de $\sum f_n$
4. Convergence uniforme ?
5. Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n + 1}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\sum u_n$ converge.
6. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Ex 43 : Pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on pose $f_n(x)=\dfrac{1-x^{2n+2}}{1+x}$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n).
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur son intervalle de convergence simple.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.
4. Montrer que : $\forall(n,x)\in\mathbb{N}\times]-1,1[,\ f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^{2k}-\sum_{k=0}^{n}x^{2k+1}$.
5. Montrer que $\displaystyle\sum\frac{(-1)^k}{k+1}$ converge et calculer sa somme à l'aide des questions précédentes.

Ex 44 : On considère la suite définie pour tout n par : $u_n=\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ tend vers 0.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k=\int_0^1\frac{2}{3+t^2}dt$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{2}{3+t^2}dt$.

Ex 45 : On définit pour $n\geq 1$, $f_n : t\mapsto\dfrac{t^{n-1}\ln(t)}{n}$ sur $I=[0,1]$ avec la convention $f_n(0)=0$.

1. Déterminer $\|f_n\|_{\infty,I}$.
2. On pose $g : t\mapsto\dfrac{\ln(1-t)\ln(t)}{t}$ sur $J=]0,1[$.
   i. Montrer que g est intégrable sur J. Indication : on pourra rappeler la valeur de $\displaystyle\lim_{t\to1^-}\frac{\ln(t)}{t-1}$.
   ii. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$.

Ex 46 :

1. Justifier l'existence de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ex 47 : Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q}=\displaystyle\int_0^1 x^p\ln(x)^q\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer la convergence des intégrales $I_{p,q}$ et les calculer.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 e^{x\ln(x)}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}$.

Ex 48 : Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{(x\ln(x))^n}{n!}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa somme.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ converge et calculer cette intégrale.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^t dt$ converge et exprimer cette intégrale sous la forme d'une série.

Ex 49 : On définit la suite réelle (I_n) par : $I_0 = I_1 = 1$ et $\quad \forall n \geqslant 2 \quad I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$.
2. Donner une équation differentielle du premier ordre vérifiée par f.
3. Donner l'expression de f, le rayon de convergence, exprimer I_n.

Ex 50 : On pose, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. En déduire que le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$ est $\geqslant 1$.
2. Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, que $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.
3. Donner un équivalent simple de I_n.
4. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum I_n x^n$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$.

Ex 51 :

1. Étudier la convergence simple de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$. On note D l'ensemble de convergence et $S(x)$ la somme sur D. L'application S est-elle continue sur D ?
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (1-x)S(x)$.

Ex 52 : Soit $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-t^2 - \frac{x^2}{t^2})}\mathrm{d}t$

1. Montrer que $t \mapsto \dfrac{a}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2 - \frac{b}{t^2}}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ pour $a > 0$ et $b > 0$.
2. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $h'(x) = -2h(x)$, en déduire une expression de h en fonction de x et de $h(0)$.

Ex 53 : Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(xt) - \mathrm{Arctan}\,(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire l'expression de f' puis de f.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(at) - \mathrm{Arctan}\,(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$.

Ex 54 : On pose $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(x+t)}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que G est bien définie pour $x > 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_0^y \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(n+t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t - \int_y^{y+n} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right)$.
3. On pose $H(n) = nG(n)$. Montrer que la série de terme général $H(n+1) - H(n) - \dfrac{1}{2n}$ converge. En déduire un équivalent de $G(n)$.

Ex 55 : On pose : $\forall x \in [0, +\infty[,\ F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

1. Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et exprimer $F'(x)$.
2. Montrer que $G^2(x) = \dfrac{\pi}{4} - F(x)$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

Ex 56 : On recherche les fonctions $x, y, z, u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant le système $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x + 2y - 2z \\ y' & = & x - y + u \\ z' & = & x - z + u \\ u' & = & 2y - 2z + u \end{array}\right.$.

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f.
2. Justifier avec un minimum de calcul que f n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Résoudre le système différentiel.

Ex 57 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0,0) = 0$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) > \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|$.
On pose : $u : x \longmapsto f(x,x)$, $v : x \longmapsto f(x,-x)$ et $w_x : y \longmapsto f(x,y)$.

1. Calculer les dérivées de u, v *et* w_x.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y_x \in \mathbb{R}$ tel que $|y_x| \leqslant |x|$ et $w_x(y_x) = 0$.
3. On pose $\varphi : x \longmapsto y_x$ (on suppose que φ est dérivable). Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction des dérivées partielles de f en $(x, \varphi(x))$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Ex 58 : On note, pour tous réels x et y : $f(x,y) = y^2 \sin(x/y)$ si $y \neq 0$ et $f(x,0) = 0$.

1. On pose $X_0 = (x_0, 0)$ où $x_0 \in \mathbb{R}$.
   i. Montrer que f est continue en X_0.
   ii. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On considère $X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $y_1 \neq 0$.
   i. Calculer les dérivées partielles de f en X_1.
   ii. f est-elle différentiable en X_1 ? Si oui, donner la différentielle de f en X_1, puis en $(0,1)$.
3. Calculer les dérivées partielles de f en X_0. Si on suppose que f est différentiable en X_0, que vaut sa différentielle ?

Ex 59 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un univers probabilisé fini.
Soit X, Y deux variables aléatoires.
Soit $(i,j) \in \{1, \dots, n+1\}^2$.
On définit $a_{i,j} = P(X = i, Y = j) = \dfrac{1}{2n}$ si $|i + j - (n+2)| = 1$ et $a_{i,j} = P(X = i, Y = j) = 0$ sinon.

1. Montrer que $(a_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\dots,n+1\}^2}$ définit une loi de probabilité de couple.
2. Expliciter A, la matrice dont les coefficients sont les $a_{i,j}$, et montrer que A est diagonalisable.
3. Donner les lois marginales de X et Y.
4. On pose $b_{i,j} = P(X = i | Y = j)$ les coefficients de la matrice B.

   Exprimer B et montrer que $v = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \dots \\ P(X=n+1) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B.

Ex 60 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ puis X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$ dont la loi de couple est donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \ \mathrm{P}(X = i, Y = j) = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{4^n}$.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.
4. Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $b_{i,j} = \ \mathrm{P}(X = i, Y = j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$.
   i. Justifier que B est diagonalisable.
   ii. En calculant B^2, déterminer les valeurs propres de B et donner la dimension des sous-espace propres associés.

Ex 61 : Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit le taux de panne de X comme la suite (x_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \mathbb{P}(X = n | X \geq n)$. Soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}^\star$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. Montrer que la loi de Y est bien une loi de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$.
   i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(X \geq n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1 - x_k)$.
   ii. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction des x_k.
3. Déterminer les variables aléatoires réelles discrètes ayant un taux de panne constant.
4. Déterminer le taux de panne de Y.

Ex 62 : On dispose d'une urne contenant $n \in \mathbb{N}$ ($n \geqslant 2$) boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue des tirages successifs avec remise. Soit X_n la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la première boule différente de la première tirée.

1. Donner la loi de X_n.
2. Justifier que X_n admet une espérance finie et la calculer.
3. On note Y_n la variable aléatoire correspondant au rang où pour la première fois toutes les boules ont été tirées au moins une fois.
   (a) Donner la loi de Y_2.
   (b) Donner la loi de Y_3.

Ex 63 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant, $\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}(X = k, Y = \ell) = \dfrac{\alpha}{2^{k+\ell}}$.

1. Trouver α. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $G_X(t), \mathbf{E}(X), \mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{cov}(X, Y)$.
3. Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et retrouver $\mathbf{E}(X)$.
4. On pose $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de Z.
5. Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant Y)$.

Ex 64 : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$.
2. Montrer que si la famille $(P(X > k))_{k\geqslant 0}$ est sommable, alors X admet une espérance finie.
3. Étude de la réciproque : montrer que si X admet une espérance finie, alors la suite $(nP(X > n))_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 et que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.
4. Application : on considère une urne contenant N boules identiques numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise. On note X la variable aléatoire égale au plus grand nombre tiré au cours des n tirages.

(a) Calculer $P(X \leqslant k)$ et en déduire la loi de X.

(b) Montrer, à l'aide d'une somme de Riemann, que la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_{N\geqslant 1}$ admet une limite finie et la calculer.

(c) En déduire que $\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{E(X)}{N}=\frac{n}{n+1}$.

IMT 1 MP 2023

Ex 65 : Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$ tels que
$(X-1)^n Q(X)+X^n P(X)=1$.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'un couple $(P_0,Q_0)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ dans $\mathcal{S}$.
2. Déterminer $\mathcal{S}$.

Ex 66 : Soient E un espace vectoriel et u un endomorphisme nilpotent de E. Soit $x\in E$ et $k\in\mathbb{N}$ tels que $u^k(x)\neq 0$. Montrer que $\left(x,u(x),\ldots,u^k(x)\right)$ est libre.

Ex 67 : Soit $n\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}$.
Soit $A\in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $B\in M_{p,n}(\mathbb{R})$.
Montrer que : $p+\operatorname{rg}(I_n+AB)=n+\operatorname{rg}(I_p+BA)$.

Ex 68 :

1. Soient $n\in\mathbb{N}^*, u$ et v deux endomorphismes nilpotents non nuls de $\mathbb{R}^n$ tels que $u\circ v=v\circ u$. Montrer que $\operatorname{rg}(u\circ v)<\operatorname{rg}(v)$.
2. Montrer que la composée de n endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^n$ qui commutent deux à deux est nulle.

Ex 69 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que $\operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}\left(f^3\right)\geqslant 2\operatorname{rg}\left(f^2\right)$.
Ind. Utiliser le théorème du rang pour les restrictions de f à $\operatorname{Im}(f)$ puis $\operatorname{Im}\left(f^2\right)$.

Ex 70 : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f^2=-\operatorname{id}$,

1. Montrer que $\dim(E)$ est pair.
2. Montrer que, pour tout $x\in E$, $\operatorname{Vect}(x,f(x))$ est stable par f.
3. Montrer que, si $\dim(E)=2n$, il existe des vecteurs $e_1,\cdots,e_n$ de E tels que la famille $(e_1,f(e_1),\cdots,e_n,f($ soit une base de E. Donner la matrice de f dans cette base.

Ex 71 : Soit $A\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que AB est semblable à la matrice diagonale $\operatorname{diag}(0,9,9)$. Calculer le rang de BA et déterminer BA.

Ex 72 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{tr}\,(A)$. Montrer que A est la matrice d'une projection.

Ex 73 : Soit $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(M)A - M^T$.

1. L'application Φ est-elle un automorphisme ?
2. L'application Φ est elle diagonalisable ? Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

Ex 74 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $\Phi_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Quels sont les éléments propres de ϕ_u ?
2. Montrer que ϕ_u est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Ex 75 : Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pour laquelle qu'il existe $n \geqslant 1$ telle que $M^n = I_2$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

Ex 76 : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ \frac{a}{b} & 1 & \frac{c}{b} \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de M.

Ex 77 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, montrer que $\det A = 1$.

Ex 78 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Comparer le spectre de A et celui de M.
2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$.
3. Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante portant sur A quant à la diagonalisabilité de M.

Ex 79 :

1. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\det(AB - I_n) = \det(BA - I_n)$.
2. Généraliser le résultat avec A non inversible.
   On pourra considérer la suite $A_p = A - \dfrac{1}{p} I_n$.

Ex 80 : Soit $n \geq 3$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A contient que des 1 sur sa première ligne, première colonne, sur sa diagonale et que des 0 ailleurs.
Montrer que 1 est valeur propre, donner son sous-espace propre. En déduire les autres valeurs propres.

Ex 81 : On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit X tel que $X^2 = A$.

1. Montrer que X est triangulaire supérieure.
2. Donner tous les X.

Ex 82 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $4A^3 + 4A^2 + A = 0$.
Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Ex 83 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = A^3 + A + I_n$.

1. On suppose que A est diagonalisable, à valeurs propres réelles. Montrer que A est un polynôme en B.
2. Est-ce encore vrai si les valeurs propres de A sont complexes ?

Ex 84 :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

Ex 85 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et admet une unique valeur propre réelle a. Montrer que $a > 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(A)} \lambda^n$ est un entier.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin(\pi a^n)$ converge.

Ex 86 : Soit E l'espace des fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$. Soit $f \in E$, on définit T l'application telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{t} dt$. Montrer que T est un endomorphisme de E, puis déterminer ses éléments propres.

Ex 87 : Soit E un espace euclidien ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $u = f^* \circ f$.

1. Montrer que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} f^*$.

<u>Ex 88</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^{2023} = A^{2024}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \operatorname{rg}(A)$.
2. Le résultat reste-t-il vrai si A est seulement diagonalisable ?

<u>Ex 89</u> : On pose $E = \mathcal{C}^\infty([0;1])$ que l'on muni de $\|\,.\|_\infty$. On pose $\forall f \in E,\ u(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \inf(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que u est un endomorphisme continu de E et calculer $|||u|||$.

<u>Ex 90</u> : On note E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + f'\|_\infty$ et $N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

1. Montrer que N et N' sont des normes sur E.
2. Montrer que N et N' sont équivalentes. Ind. Exprimer f en fonction de $g = f + f'$.

<u>Ex 91</u> : Soit N définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $N\left(\displaystyle\sum_{i=0}^n a_i X^i\right) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$.

1. Montrer que N est une norme.
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(a)$. Pour quelles valeur de a, l'application ϕ est-elle continue pour la norme N ?

<u>Ex 92</u> : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & \sin\left(\frac{b}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{b}{n}\right) & \cos\left(\frac{a}{n}\right) \end{pmatrix}^n$.

<u>Ex 93</u> : Soient E un espace euclidien et $\mathcal{K}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E. Soit p un projecteur.

1. Montrer que : $p \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. Montrer que $\mathcal{K}$ est un compact.

<u>Ex 94</u> : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout vecteur $x \in E$, la suite $(\|x - u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Ex 95 : On définit, pour x réel, $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

1. Discuter la continuité de f.
2. Tracer le graphe de f.
3. On définit la suite (x_n) par $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Étudier la monotonie et la convergence de (x_n).

Ex 96 : On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que (u_n) converge vers 0 .
2. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\left(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha\right)$ converge vers une limite non nulle.
3. Déterminer un équivalent de u_n. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

Ex 97 : On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Ex 98 : On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

1. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{2} \ln^2 n$. On note v_n cette dernière quantité.
2. Donner un équivalent de $u_n - v_n$.

Ex 99 : Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - t \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\right) \mathrm{d}t$ puis calculer sa valeur.

Ex 100 : Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} \mathrm{d}t$.

1. Étude de la convergence de I.
2. Calcul de I.

Ex 101 : Calculer : $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$.

Ex 102 : Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+4k}$.

Ex 103 : $\displaystyle\int_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{x^n+(1-x)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}\frac{2^n}{n}$.

On pourra utiliser le changement de variable $x = \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{t}{n})$.

Ex 104 : On pose $u_n(x) = \operatorname{Arctan}(\sqrt{n+x}) - \operatorname{Arctan}(\sqrt{n})$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

i. Éudier la convergence simple, puis la convergence normale de S.
ii. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer S'.

Ex 105 : Soit, pour $n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n \,\mathrm{d}x$. Étudier la convergence de $\sum u_n$. Calculer sa somme.

Ex 106 : Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2} \,\mathrm{d}t$ et en donner la valeur.

Ex 107 : On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$.

1. Donner le rayon de convergence de f.
2. Calculer f.

Ex 108 : Soit $r > 0$. On note $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \begin{cases} r^{\sqrt{n}} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donner le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

Ex 109 : Soit $q \in]-1,1[$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction f continue en 0 telle que $f(0) = 1$ et :
$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \dfrac{1+x}{1-x} f(qx)$.
2. Cette fonction est-elle décomposable en série entière et si oui, quel est son rayon de convergence ?

Ex 110 : On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \ln t \,\mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Déterminer une équation différentielle dont F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, puis résoudre cette équation différentielle.

<u>Ex 111</u> : Soit $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}\,(xt)}{x\,(1+x^2)}\text{d}x$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, puis de classe $\mathcal{C}^1$. En déduire F.

<u>Ex 112</u> : Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^x \,\text{d}t$,

1. Montrer que F est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$.
2. Montrer que $F(n+2) = \dfrac{n+1}{n+2}F(n)$. Calculer $(n+1)F(n)F(n+1)$.
3. Donner un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

<u>Ex 113</u> : Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\ dt$$

<u>Ex 114</u> :

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f'(x) = e^{-x}$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Plus généralement, montrer que si $f(x) + f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

<u>Ex 115</u> : On se place dans $A = \{1,\dots,n\}$. On choisit F et G deux parties de A de manière équiprobable et indépendante. Soit $i \in A$.

1. Montrer que $P(i \in F) = \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que les événements $(i \in F)$ et $(j \in G)$ sont indépendants pour $j \neq i$.

<u>Ex 116</u> : Soit $a \in]1,+\infty[$ et on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{1}{\zeta(a)n^a}$.

1. Montrer que X définit bien une variable aléatoire discrète.
2. Est-ce que X admet une espérance ? Si oui, la calculer.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $A_k = \{kp,\ p \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $P(X \in A_k)$.
4. À quelle condition $(X \in A_i)$ et $(X \in A_j)$ sont indépendants, pour i, j dans $\mathbb{N}^*$?

<u>Ex 117</u> : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. On note $Z = \dfrac{X}{Y}$.

1. Montrer que $Z \leqslant X$. Montrer que Z admet une espérance et une variance. Calculer $\mathbf{E}(Z)$
2. Donner la loi de Z.

Ex 118 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{P}\left((X,Y) = (j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Ex 119 : On possède une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On réalise deux tirages successifs sans remise. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la première boule tirée et Y celle correspondant au numéro de la seconde.

1. Donner la loi de X.
2. Donner la loi de Y.
3. Calculer $V(X)$, $V(Y)$ et $V(X+Y)$.

Ex 120 :

1. On note l^2 l'ensemble des suites réells (p_i) telles que la série de terme générale p_i^2 converge. Montrer que l^2 est un espace vectoriel et que l'application :
   $\forall (p_i), (q_i) \in l^2,\ < p_i, q_i > = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p_i q_i$ est un produit scalaire.
2. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$, admettant un moment d'ordre 2. On note $\forall i \in \mathbb{N},\ p_i = P(X = i)$ et $p_{-1} = 0$.
   On note $I(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(p_i - p_{i-1})^2}{p_i}$
   i. Montrer que $I(X) \geq \dfrac{1}{V(X)}$
   ii. Enfin montrer que $I(X) = \dfrac{1}{V(X)}$

Ex 121 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ et $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$. Loi de $Z = X + Y$?

IMT 2 MP 2023

Ex 122 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $f \circ f = f$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$. Interpréter géométriquement.
2. Si E est de dimension finie, que dire de la matrice dans une base bien choisie ?

3. Donner un exemple d'un endomorphisme f de E tel que $\mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$.

Ex 123 : Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ telle que $f \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 2$.

Ex 124 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$.

1. Montrer que $A^n = 0$.
2. Calculer $\det(I_n + A)$.
3. Montrer que $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Soit $M \in C(A) \cap GL_n(\mathbb{C})$. Calculer $\det(A + M)$.
5. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire de cette preuve que le résultat de la question précédente reste vrai si on a seulement M dans $C(A)$.
6. Que permettent de dire les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ par rapport à l'exercice ?

Ex 125 : Soit E un espace vectoriel avec $\dim E = n \geq 1$.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent, montrer que : $u^n = 0$.
2. Trouver une base $\mathcal{B}$ de E tel que :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Chercher des X tels que : $A = X^2$

Ex 126 : Calculer $\Delta_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & & & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & & & -x & 1+x^2 \end{pmatrix}$.

Ex 127 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que : $A^2 = -I_n \implies \det A = 1$.

Ex 128 : La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ? Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Ex 129 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ avec les λ_k deux à deux distincts et

$$P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que u soit diagonalisable. Prouver le.
2. Existe-t-il dans $\mathbb{R}^7$ un endomorphisme u tel que $(X-1)(X^2+1)$ annule u et $tr(u) = 0$?
   Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ tel que $(X-1)(X^2+1)$ annule u. Déterminer $\det(u)$.

Ex 130 : Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On veut montrer qu'il n'existe pas de matrice B telle que $B^2 = A$. On suppose l'existence d'une telle matrice. Trouver un polynôme annulateur simple de B. Conclure.
3. Montrer que A est semblable à C.

Ex 131 : Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent.

1. Démontrer que les sous-espaces propres de u sont stables par v.
2. Soit $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme u. Combien y a-t-il de droites vectorielles stables par u ?

Ex 132 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes et $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres pour f. Montrer que les e_i sont aussi vecteurs propres de g.
   On note $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les valeurs propres associées.
3. Les μ_i sont-ils forcément deux à deux distincts ?
4. L'endomorphisme g est-il forcément diagonalisable ?

Ex 133 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(M) = \mathrm{Tr}(M)A + \mathrm{Tr}(A)M$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. f est-il diagonalisable ?

Ex 134 : Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteur propre.

1. Montrer que $\chi_u(u) = 0$ sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.
2. On écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Calculer $\det_e\big(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big)$.

Ex 135 :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A admet-elle toujours une valeur propre ?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2+A+I_n=0$. Que dire du spectre réel de A ? du spectre complexe ?

Ex 136 :

1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_i)$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur P pour que u soit diagonalisable et la démontrer.
2. Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^7\right)$. Est-il possible d'avoir simultanément $Q = (X-1)\left(X^2+1\right)$ annulateur de f et $\operatorname{Tr}(f) = 0$?
3. Soit $g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^7\right)$ tel que $Q(g) = 0$. Calculer $\det(g)$.

Ex 137 : Soit $A \in \mathbb{R}_n[X] \backslash \{0\}$.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par A est un projecteur. Donner son noyau et son image.
2. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur orthogonal.

Ex 138 : On considère le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+2y-3z=0$.
Trouver la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur ce plan.

Ex 139 :

1. Rappeler le théorème spectral.
2. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose que $(A+A^T)$ est nilpotente. Montrer que A est antisymétrique.

Ex 140 : On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour$(f,g) \in E^2$, on pose $\langle f, g\rangle = \int_0^1 (fg + f'g')$.

1. Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire.
   Soient $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f'' = f\}$.
2. Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels puis que $\left\{t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t}\right\}$ est une base de W.
3. Montrer que V et W sont orthogonaux.
4. Calculer $p_W(f)$ le projeté orthogonal de $f \in E$ sur W.
5. Montrer que V et W sont supplémentaires.

Ex 141 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.
2. Que dire si $A = A^T$?

Ex 142 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base orthonormale de diagonalisation de A.

Ex 143 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.

1. Trouver $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que $P(A) = 0$. Que dire sur A et $\mathrm{Sp}(A)$?
2. On suppose, pour cette question seulement, que $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $A - I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. On prend $n = 3$. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Ex 144 : Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Pour quels réels a la suite $(a^n A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers une limite non-nulle ?

Ex 145 : Soit E un espace de dimension finie.
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. Rappeler la définition de $\exp(\varphi)$ et montrer son existence.
2. On suppose que $\varphi^2 = Id_E$. Exprimer $\exp(\varphi)$.

Ex 146 : Montrer la convergence des suites $(x_n), (y_n), (z_n)$ définies par leurs premiers termes respectifs x_0, y_0, z_0 et les relations, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{y_n}{4} + \dfrac{z_n}{4}, y_{n+1} = \dfrac{x_n}{4} + \dfrac{y_n}{2} + \dfrac{z_n}{4}, z_{n+1} = \dfrac{x_n}{4} + \dfrac{y_n}{4} + \dfrac{z_n}{2}.$

Ex 147 : Étudier la convergence de $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}}$

Ex 148 : Nature de la série $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$?

Ex 149 : Nature de la série $\sum \cos\left(n^2\pi \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$?

Ex 150 :

1. Rappeler le théorème spécial des séries alternées. Que peut-on dire du reste ?
2. Étudier la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, avec α dans $\mathbb{R}$.
3. Comment peut-on donner une valeur à 10^{-3} près de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$?
4. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, avec α dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 151 : On pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, $v_n = (-1)^n u_n$, $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. Justifier l'existence de u_0 et w_0.
2. Déterminer les limites de (u_n) et de (w_n).
3. Nature de $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$?

Ex 152 : Soit $f : x \in \left[-1/3, +\infty\right[\mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$. Étudier f et donner son graphe.

Ex 153 : Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et exprimer sa dérivée.
2. Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$. Est-elle est dérivable en 1 ? Pourquoi ?
3. Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0 .

Ex 154 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{3+\cos^2 u}$. Calculer $\phi(x)$.
Ind. Utiliser le changement de variable $v = \tan u$.

Ex 155 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{n+x}}\mathrm{d}x$.

1. Justifier que l'intégrale généralisée I_n est convergente.
2. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et en déduire qu'elle converge.
3. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(n^\alpha I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle.
4. Préciser la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} I_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n I_n$.

Ex 156 : On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u_0 = \mathrm{id}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin \circ u_n + u_n$.

1. Étudier la convergence simple de (u_n).
2. La convergence est-elle uniforme ?

Ex 157 : Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\sin(x^3)}{x\sqrt{x}}$.

1. Montrer que f admet un prolongement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto f\left(\dfrac{n}{x}\right) f(xn)$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Ex 158 : Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que : $\forall x \in [0,1], 1 - \mathrm{e}^{-x} \geqslant \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) x$.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Quelle est sa limite en $+\infty$?
4. Dresser le tableau de variation de f.

Ex 159 : Soit $\alpha \in]-1;1[$; pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n(x) = \dfrac{\alpha^n}{n} \cos nx$. Soit $W : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$

1. Montrer que W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; exprimer W' à l'aide des fonctions usuelles.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos(x) + \alpha^2)\mathrm{d}x$.

Ex 160 : Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\sqrt{\ln(n)}}$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple D de
$$\sum_{n \geq 2} f_n(x).$$
   On note f sa somme et $\forall n \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$,
$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$
2. Montrer que $\forall n \geq 2$, $\forall x > 0$,
$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}} \frac{x}{e^x - 1}$$
3. Montrer que la fonction $\quad g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa limite en $+\infty$.
5. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. f est-elle dérivable en 0 ?

Ex 161 : Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}-e^{-x}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$

Ex 162 : On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{1+n^4t^3}\,\mathrm{d}t$ pour $n \geqslant 1$

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. Nature de la série $\sum I_n$?

Ex 163 : On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x)\mathrm{d}x$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+1}$.
2. Donner un équivalent simple de I_n.
3. Nature et somme éventuelle de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$?

Ex 164 : Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$ et calculer sa somme.

Ex 165 : Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(2-x)}$.

1. f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?
   Si oui, expliciter ce développement et donner son domaine d'existence.
2. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Ex 166 : Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(tx)\mathrm{d}t$ par deux méthodes :

i. à l'aide d'un développement en série entière de la fonction cosinus ;
ii. à l'aide d'une équation différentielle d'ordre 1.

Ex 167 : On considère $f : t \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

1. Donner l'ensemble de définition de f noté D.
2. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

3. Trouver une relation entre $f(t)$ et $f(t-2)$ en supposant que t et $t-2$ sont dans D.

<u>Ex 168</u> : Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\tanh(3x) - \tanh(2x)}{x} dx$ et $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\tanh(x) - \tanh(tx)}{x} dx$

1. Montrer que I est bien définie.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2, 3]$.

<u>Ex 169</u> : Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t - e^{-2t}}{t} \cos(xt)\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$
3. Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles.

<u>Ex 170</u> : On considère $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t}\ \mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. Exprimer f''.
4. En déduire des expressions de f' et f avec des fonctions usuelles.

<u>Ex 171</u> : On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sqrt{t}\ \mathrm{d}t$.

1. Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f.
2. Expliciter f.

<u>Ex 172</u> : Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}\ (t^2)}{t}\ \mathrm{d}t$

1. Montrer que I est bien définie.
2. Montrer que $I = -2\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{1+t^4}\ \mathrm{d}t$
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

<u>Ex 173</u> : On recherche les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (1) :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = 1 + x$.

1. Trouver toutes les solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0 .
2. Montrer que, si f vérifie (1), alors elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $(E) : y'' + y = 0$.
3. Résoudre (E).

4. Trouver toutes les solutions de (1).

Ex 174 : Soit (1) l'équation différentielle $xy' + y = \mathrm{e}^x$.

1. Trouver les solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0 .
2. Les solutions de (1) sur $]0, +\infty[$ sont-elles toutes développables en série entière au voisinage de 0 ?
3. Résoudre (1) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Discuter suivant I.
4. On ajoute à l'équation (1) la condition $y(x_0) = y_0$ (avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$) pour obtenir un problème numéroté (2). Que dit le théorème de Cauchy à propos du problème (2) si on travaille sur $]0, +\infty[$? Résoudre (2).
5. Représenter graphiquement la ou les solutions développables en série entière.

Ex 175 :

1. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer χ_A.
3. Calculer A^n.
4. Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' & = & x + y \\ y' & = & -2x + 4y \end{cases}$.

Ex 176 : Soit $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer les valeurs propres de A.
3. On pose l'application
$$W : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ t \mapsto W(t) \end{cases}$$
telle que $W' = AW$.
Exprimer W en fonction de t et de d'autres paramètres que l'on précisera.

Ex 177 : Soient X et Y deux variables aléatoires independantes suivant la meme loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$. Soient $I = \min(X, Y)$, $M = \max(X, Y)$ et $D = M - I$.

1. Montrer que $P(X = Y) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(X = k)^2$.
2. Montrer que I et D sont indépendantes.

Ex 178 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et X et Y deux variables aléatoires discrètes. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres n et p ; et que, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la loi de Y conditionnée à $X = i$

est la loi binomiale de paramètres $n-i$ et p.

Montrer que $Z=X+Y$ suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

Ex 179 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Calculer l'espérance de X de trois manières différentes :

1. directement à partir de la loi de X ;
2. en utilisant la fonction génératrice de X ;
3. sans calcul, en interprétant la loi de X.

Ex 180 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I admettant une espérance. On suppose que $f(X)$ admet une espérance. Montrer que l'on a $f(\mathbf{E}(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(X))$.

Ex 181 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On pose $S=X+Y$.

1. Donner G_S en fonction de G_X et de G_Y.
2. On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$. Loi de S ?
3. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. Loi de S ?

ENSEA MP 2023

Ex 182 : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$: $P = X^6+1$.

Ex 183 : Factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes X^2+X+1 et X^2-X+1.
Montrer que X^2-X+1 divise $(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$.

Ex 184 : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Soient $n,k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A^k = I_n$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Donner un exemple d'une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^4=I_3$ et qui ne soit pas diagonalisable sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Réduire cette matrice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
3. Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^k = I_n$ diagonalisables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Ex 185 : Déterminer les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Ex 186 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et on note $\varphi_n : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (X-1)^2 P' - nXP \end{array} \right.$

1. Montrer que φ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ_n.

Ex 187 : Soit E un espace euclidien de dimension $d > 0$. Soient a et b deux vecteurs unitaires et linéairement indépendants de E.
Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(x) = (a|x)a + (b|x)b$ pour tout x.

1. Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Ex 188 : Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $e^{\cos(x)}$.

Ex 189 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$.

1. Montrer que la suite (S_n) converge.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \circ(1)$, où γ est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.
3. Calculer la limite de (S_n).

Ex 190 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

1. Donner le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^n$.

On note f la somme de cette série entière

2. Donner l'expression de $f(x)$ pour x dans $]-1,1[$.
3. f est-elle définie en -1 ? Que dire alors de f sur $]-1,1[$?
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt$.
5. Calculer $f(1)$.

Ex 191 : Résoudre l'équation différentielle :

$$t\frac{d\theta}{dt} - (1+t)\theta = \frac{t^2}{\mathrm{ch}(t)}$$

Ex 192 : Étudier les extrema de la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl}]0;+\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x(y^2+\ln(x)^2) \end{array} \right.$$

Navale, Saint-Cyr MP 2023

Ex 193 : [St Cyr] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré 3 dont les racines z_1, z_2, z_3 sont les affixes de points M_1, M_2, M_3 d'un plan affine euclidien. Montrer que P' a une racine double si et seulement si le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Ex 194 : [St Cyr] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2$.
2. Programmer une fonction Python `puissance(n)` renvoyant A^n.
3. Déterminer α_n et β_n grâce à cette fonction.
4. Tracer $n \mapsto \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$. Conjecture ?
5. Prouver cette conjecture.

Ex 195 : [St Cyr] Soit $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ vérifiant :

i. $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$;

ii. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \phi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda$.

Montrer que $\phi = \det$.

Ex 196 : [St Cyr] Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 3$. On note U l'application qui à un polygone P constitué de n points $M_1, \ldots, M_n$ du plan complexe associe le polygone :
$\dfrac{M_1+M_2}{2}, \ldots, \dfrac{M_{n-1}+M_n}{2}, \dfrac{M_n+M_1}{2}$.

1. Écrire une fonction Python calculant $\mathrm{U}(P)$.
2. L'application U est visiblement linéaire. Donner sa matrice dans la base canonique. C'est une matrice stochastique que l'on notera M.
3. Montrer que les valeurs propres de M sont de module au plus égal à 1 .
4. Montrer que 1 est la seule valeur propre de M de module 1 .

Ex 197 : [Navale] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que ϕ soit diagonalisable.
2. Décrire les éléments propres de ϕ.

Ex 198 : [St Cyr] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $(f_1,\dots,f_n)$ une famille de vecteurs telle que :
$\forall k \in [\![1,n]\!], \|f_k - e_k\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $(f_1,\dots,f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que le résultat précédent serait en défaut en remplaçant l'inégalité stricte par une inégalité large.

Ex 199 : [St Cyr] Soient $(E, \langle\ .\ ,\ .\rangle)$ un espace euclidien et $x_1,\dots,x_n$ des éléments de E. On note $G = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Montrer que $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Montrer l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $G = A^T A$.
3. En déduire que le rang de G et égal à celui de la famille $(x_1,\dots,x_n)$.

Ex 200 : [Navale] Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$:

1. Montrer que si $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$, alors $u + u^*$est inversible.
2. Montrer la réciproque si $u \circ u = 0$.

Ex 201 : [Navale] On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \displaystyle\int_0^1 PQ$.

1. Montrer que l'application u définie sur E par : $u(P) = \displaystyle\int_0^1 (X+t)^n P(t)dt$ est un endomorphisme autoadjoint de E.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(P_0, ..., P_n)$ formée de vecteurs propres de u. On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres associées.
3. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) P_k(y)$. En déduire $tr(u)$.

Ex 202 : [St Cyr] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire $\langle\ .\ ,\ .\rangle$ défini par : $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique c'est-àdire telle que $\forall (x,t) \in [0,1]^2, K(x,t) = K(t,x)$. Soit u l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $u(f) : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^1 K(x,t)f(t)\mathrm{d}t$.
On admet le théorème de Fubini :
$\forall \phi \in \mathcal{C}^0\left([0,1]^2,\mathbb{R}\right), \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \phi(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^1 \phi(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Montrer que u est autoadjoint.
3. Montrer que u est continu.

Ex 203 : [St Cyr] Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M_t = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les matrices M_t sont diagonalisables et trouver une base de vecteurs propres indépendante de t.
2. Montrer que l'application $\theta : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par $\theta(t) = M_t$ est injective. Montrer que $\theta(t+t') = \theta(t)\theta(t')$.
3. Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{b}$ sa base canonique, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $q : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$. Montrer que, si $q \circ f = q$, alors $M = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{b}}(f)$ vérifie $(*) : M^T JM = J$. Montrer que les matrice M_t, avec $t \in \mathbb{R}$, vérifient $(*)$ et trouver toutes les matrices vérifiant $(*)$.

Ex 204 : [Navale]

1. Rappeler l'algorithme de Gram-Schmidt.
2. On note $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures, à coefficients diagonaux strictement positifs. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O,T) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OT$.

Ex 205 : [St Cyr] Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ non restreint à la fonction nulle. On note I l'ensemble des rapports $\dfrac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}$ quand f décrit F privé de la fonction nulle, où usuellement $\|f\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]} |f|$ et $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 f^2}$.

1. Que dire de I si F est de dimension 1 ?
2. Dans le cas général, montrer que I est un intervalle inclus dans $[1,+\infty[$.
3. On suppose F de dimension finie. Montrer que I est fermé.

Ex 206 : [Navale] Montrez que toute suite réelle admet une sous suite monotone.

Ex 207 : [St Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$.

1. Montrer que (E_n) a une solution unique dans $]0,+\infty[$. On la note x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante et majorée.
3. (Python) écrire un programme qui renvoie une valeur approchée de x_n à ε près obtenue par dichotomie.
4. (Python) Afficher les 100 premières valeurs de x_n et conjecturer la limite de la suite.
5. Démontrer la conjecture.

Ex 208 : [St Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = X^n + X^{n-1} + \cdots + X - 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P_n$ a une unique racine réelle positive que l'on notera a_n.
2. Écrire une fonction Python qui renvoie une valeur approchée de a_n.

3. Afficher un graphe représentant les 20 premières valeurs de la suite (a_n). Conjecturer la nature de (a_n).
4. Montrer la convergence de (a_n) et déterminer sa limite.

Ex 209 : [Navale]

1. Pour $m > 1$, montrer qu'il existe un unique $x_m \in]-1, -2[$ tel que $m \ln\left(1 + \dfrac{x_m}{m+1}\right) = x_m$.
2. Étudier la suite $(x_m)_{m>1}$,

Ex 210 : [St Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$.

1. Justifier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right) I_n$.
2. Programmer sur Python la méthode des trapèzes pour calculer une valeur approchée de I_1.
3. Programmer une fonction Python qui calcule les 20 premières sommes partielles des séries $\sum I_n^\alpha$ pour $\alpha = 1, 2, 3, 4$.
4. Soit $\sum x_n$ une série à termes strictement positifs et $\sum y_n$ une série absolument convergente. On suppose qu'il existe λ tel que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + y_n$.
   (a) Montrer que $\ln\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) = -\dfrac{\lambda}{n} + z_n$, où z_n est le terme général d'une série absolument convergente.
   (b) Montrer l'existence d'une constante C telle que $\ln(x_n) = -\lambda \ln n + C + o(1)$ quand $n \to +\infty$ et en déduire un équivalent de x_n.
   (c) Étudier la nature de la série $\sum I_n^\alpha$ en fonction de α.

Ex 211 : [St Cyr] Pour un entier n, on note r_n le reste de la division euclidienne de n par 5 .

1. Montrer que la série de terme général $\dfrac{r_n}{n(n+1)}$ converge.
2. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{k(k+1)}$. Déterminer S_{5n} en fonction de termes de la suite (H_p), où $H_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)}$.

Ex 212 : [St Cyr] Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$une fonction deux fois dérivable et majorée. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}^+, f''(t) \geqslant \alpha^2 f(t)$.

1. Montrer que f est convexe.

2. Montrer que f' est négative.
3. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$, déterminer sa valeur.
4. Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$, déterminer sa valeur.
5. Montrer que $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est négative.
6. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

Ex 213 : [St Cyr] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et concave.

1. Montrer que $\forall x \in [0,1], xf(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Ex 214 : [St Cyr] On définit une suite de fonctions $f_n : I = [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. La série converge-t-elle normalement sur I ? uniformément sur I ?
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Ex 215 : [St Cyr] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit une suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = f\left(x + \dfrac{x(1-x)}{n}\right)$ pour $n \geqslant 1$ et $f_0(x) = 0$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de (f_n).
2. Montrer que les résultats restent valides pour une fonction f seulement lipschitzienne.

Ex 216 : [Navale] Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions $\sum u_n$ et $\sum u_n'$ définies sur $\mathbb{R}^+$par $u_n(x) = \dfrac{x}{(1+n^2x)^2}$.

Ex 217 : [St Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n\left(1+n^2x^2\right)}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ -
2. Étudier la continuité de la somme $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
3. Donner un équivalent de f en 0^+.

Ex 218 : [Navale] Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Exprimer $G(x)$ en fonction en fonction de $F : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u$.

<u>Ex 219</u> : [St Cyr] On note (E) l'équation différentielle $t^2 y'' - 2y = 3t^2$.

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E) de la forme $t \mapsto t^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire une base de l'espace des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

<u>Ex 220</u> : [Navale] On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$. On note $L_1 = \sup\{n \in \mathbb{N}^*, X_1 = X_2 = \cdots = X_n\}$ la longueur de la première séquence et $L_2 = \sup\{n \in \mathbb{N}^*, X_{L_1+1} = \cdots = X_{L_1+n}\}$ la longueur de la seconde séquence. Montrer que $\mathrm{Cov}\,(L_1, L_2) = -\dfrac{(p-q)^2}{pq}$.

<u>Ex 221</u> : [Navale] Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. ayant une variance. On pose, pour $i \in [\![1,n]\!], Y_i = X_1 + \cdots + X_i$. On note $M = (\mathrm{Cov}\,(Y_i, Y_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Relier M à la matrice $A^T A$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Encadrer les valeurs propres de M.

<u>Ex 222</u> : [St Cyr] On considère une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès $p \in]0,1[$. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et X la variable aléatoire comptant le nombre de répétitions avant d'obtenir le r succès.

1. Écrire une fonction pascal (p, r) qui simule X et renvoie le nombre d'épreuves avant le r^{e} succès.
2. Écrire une fonction moyenne (p, r, k) qui renvoie une valeur moyenne pour k répétitions de la fonction précédente.
3. Calculer la loi de X.
4. Calculer l'espérance de X.

<u>Ex 223</u> : [St Cyr] On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules rouges. On tire simultanément dans l'urne n boules, avec $1 \leqslant n \leqslant N_1 + N_2$. On note X le nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer la loi de X,
2. Retrouver l'identité de Vandermonde : $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} N_1 \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 \\ n-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 + N_2 \\ n \end{pmatrix}$.
3. (Python) Définir une fonction `Hypergeom(N_{1}, N_{2}, n)` qui reproduit l'expérience et renvoie une valeur de X.

4. Exprimer l'espérance de X en fonction de N_1, N_2 et n,
5. (Python) Définir une fonction `Moyenne(N_{1}, N_{2}, n, k)` qui reproduit k expériences et renvoie la moyenne des valeurs de X obtenues.
6. On choisit $N_1 = 10, N_2 = 13, n = 5$, et $k = 100$. Comparer la moyenne empirique et l'espérance théorique.

Dauphine, ISUP MP 2023

<u>Ex 224</u> : [Dauphine] Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ non nuls tels que $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X^2 + a_iX + b_i)$ et

$Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X^2 + c_iX + d_i)$, avec les $X^2 + a_iX + b_i$ et $X^2 + c_iX + d_i$ irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

On suppose que $\dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{P(0)}{Q(0)}$.

1. Montrer que P et Q ont les mêmes racines complexes.
2. Montrer qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que : $\forall \in [\![1, n]\!],\ c_i = a_{\sigma(i)}$ et $d_i = b_{\sigma(i)}$.

<u>Ex 225</u> : [Dauphine]

1. Montrer que : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.
2. En déduire que toute valeur λ propre de $p \circ q$ vérifie : $|\lambda| \leq 1$.
3. Montrer que : $\forall x \in E,\ (x|p(x)) = \|p(x)\|^2$. En déduire que toute valeur λ propre de $p \circ q$ vérifie : $\lambda \geq 0$.
4. Soit $f = p \circ q \circ p$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint, puis que $\mathrm{Im}\,(p)$ est stable par f.
   (b) Soient G et H des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(G + H)^{\perp} = G^{\perp} \cap H^{\perp}$. En déduire $(\mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Ker}\,(q))^{\perp}$.
   (c) Soit $x \in [\mathrm{Ker}\,(q) + (\mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q))]$. Déterminer $pq(x)$.
   (d) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

<u>Ex 226</u> : [ISUP] Soit f une application continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \displaystyle\inf_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \int_{-1}^{1} (f(t) - P(t) - P(-t))^2 \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite (U_n) est bien définie.
2. Déterminer la monotonie de la suite (U_n).

<u>Ex 227</u> : [Dauphine] Trouver la limite de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{1}{k+n}\right)$.

<u>Ex 228</u> : [Dauphine] Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0 .

1. Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $x_n = \min(x_0, \ldots, x_n)$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $x_n = \max\{x_k, k \geqslant n\}$.

Ex 229 : [Dauphine] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Soit $R > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, toutes les racines complexes de P_n sont de module supérieur ou égal à R.

Ex 230 : [ISUP] Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset [a, b]$ avec $0 < a < b$.

1. Majorer la variance $V(X)$. Cette valeur peut-elle être atteinte ?
2. Dans quel cas $V(X)$ est-elle maximale ? Quelle est sa valeur ?

CCINP MP 2022

Ex 231 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note $P_i = (X - a)^i$.

1. Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $f : P \mapsto (X - a)(P'(X) - P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Trouver son noyau et son image.

Ex 232 : Soient E et F deux espaces de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\,(u + v) \leq \dim(\mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(v)) + \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v))$

Ex 233 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(f + g) = \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \iff \begin{cases} \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\} \\ \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g = E \end{cases}.$$

Ex 234 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit p un projecteur (p linéaire et $p^2 = p$). Montrer que $\mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p = E$ et que p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ de direction $\mathrm{Ker}\, p$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \mathrm{GL}(E)$ si et seulement si $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Ex 235 : On note f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f : M \mapsto aM + bM^T$ où a et b sont des réels.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme directe de l'espace S des matrices symétriques et de l'espace A des matrices antisymétriques.
2. Exprimer f en fonction de p et q, avec p la projection sur S parallélement à A et q la projection sur A parallélement à S.
3. Exprimer f^2 en fonction de f et Id.

4. Donner une CNS sur a et b pour que f soit un automorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f et Id.

Ex 236 : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Donner un exemple d'endomorphisme pour lequel le noyau et l'image ne sont pas supplémentaires.
2. Montrer que si f est diagonalisable, alors $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(f)$ sont supplémentaires. Que dire de la réciproque ?
3. (a) Montrer que la suite $(\dim \mathrm{Ker}\,(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall k > k_0,\ \mathrm{Ker}\,(f^k) = \mathrm{Ker}\,(f^{k_0})$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f^{k_0})$ et $\mathrm{Im}\,(f^{k_0})$ sont supplémentaires dans E.

Ex 237 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E vérifiant : $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que f n'admet pas de valeur propre réelle et montrer que f est bijectif.
2. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Soit u un vecteur non nul. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, f(u))$ est stable par f.
4. On prend $n = 4$. Montrer l'existence de deux vecteurs u, v tels que $(u, f(u), v, f(v))$ soit une base de E.
5. Généraliser ce résultat.

Ex 238 : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer que dans une certain base $\mathcal{B}$ de E, on a $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 239 : Soit $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Cas $n = 2$: Calculer les éléments propres de A.
3. Cas $n \neq 2$:
   (a) Montrer que 1 est une valeur propre de A.
   (b) Montrer que si λ est une valeur propre de A autre que 1, alors $(\lambda - 1)^2 = n - 1$. Expliciter les éléments propres de A.
   (c) Calculer le déterminant de A en fonction de n.

Ex 240 : Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer MM^T. En déduire $\det(M)$.
2. Si $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$, montrer que : $\text{rg}\,(M) = 4$.
   Si $a^2+b^2+c^2+d^2 = 0$, montrer que : $\text{rg}\,(M) = 2$.
3. On pose $w \in \mathbb{C}$ tel que : $w^2 = b^2+c^2+d^2$. Quelles sont les valeurs propres de M ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Ex 241 : On note E l'ensemble $C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et on définit l'application u telle que pour tout $f \in E$, $u(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ si $x > 0$ et $u(f)(0) = f(0)$.

1. (a) Montrer que pour tout $f \in E$, $u(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$
   (b) Pour tout $f \in E$, déterminer $u(f)'$
2. (a) Montrer que $u \in L(E)$
   (b) Montrer que u est injective
   (c) u est-elle surjective ?
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de u

---

Ex 242 : Soit $n > 1$. On considère la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$

1. Déterminer χ_A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Calculer $\det A$.

Ex 243 : Soient $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On pose $A = UV^T$ et $a = tr(A)$.

1. Que vaut le rang de A ?
2. Calculer V^TU et A^2.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?
4. On suppose $a \neq 0$. Déterminer les sous-espaces propres de A.

Ex 244 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $ab > 0$ ou $a = b = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ pair et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer un espace de dimension deux stable par A. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_1, ..., a_n)$ pour que A soit diagonalisable.

Ex 245 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & (X-a)(X-b)P' - nXP \end{array}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Prouver que u est diagonalisable et trouver ses sous-espaces propres.

Ex 246 : Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$, et $tr(A) = 8$.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Ex 247 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant n valeurs propres distinctes.

1. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $v \circ u = u \circ v$ si et seulement si u et v admettent une base commune de vecteurs propres.
2. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Discuter du nombre de solutions de l'équation $X^2 = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 248 : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. On suppose que f est diagonalisable.
   Montrer que f^2 est diagonalisable et que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
2. On suppose que f^2 est diagonalisable et que f est inversible.
   (a) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f^2.
   Montrer que le polynôme $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X^2 - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur de f.
   (b) En déduire que f est diagonalisable.
3. On suppose que f^2 est diagonalisable et que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   Montrer que f est diagonalisable.
4. Montrer que si f^2 est diagonalisable, alors f n'est pas nécessairement diagonalisable.

Ex 249 : Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n et u l'endomorphisme de E qui à $P(X)$ associe $P(1-X)$.

1. Calculer $u \circ u$. En déduire les valeurs propres de u. Que peut-on dire de u ?
2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Que peut-on dire sur le graphe de f si $f(1-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?
3. En déduire les espaces propres de u. Est-ce que u est diagonalisable ?

Ex 250 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$.

2. (a) Énoncer des propriétés polynomiales de diagonalisation de matrices.

   (b) On suppose que B est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable, puis montrer que $A = 0$.

3. Trouver une CNS sur A pour avoir : A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

Ex 251 : Soit E un espace euclidien, $p \in \mathbb{N}$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de E telle que :
$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \langle e_i, e_j \rangle < 0$.

1. Comparer $\lambda_i \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle$ et $|\lambda_i|.|\lambda_j| \langle e_i, e_j \rangle$.
2. Comparer $\left\| \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k| e_k \right\|^2$ et $\left\| \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k \right\|^2$.
3. Montrer que $(e_1, ..., e_{p-1})$ est libre.

Ex 252 : Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ la base $\mathcal{B}$ orthonormalisée selon le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

1. Rappeler le procédé de Schmidt ainsi que l'expression des ε_i en fonction des e_i.
2. On note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$.

   Prouver que $\det \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \prod_{i=1}^{n} (e_i \mid \varepsilon_i)$.
3. Montrer que pour toute base $\mathcal{B}''$ orthonormale de E, on a :

   $|\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}))| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|e_i\| \quad (*)$
4. Prouver que : $(*)$ devient une égalité si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B})$ est diagonale .

Ex 253 : On note $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et φ définie sur E^2 par $\varphi(f, g) = \int_{-1}^{1} fg$. On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires.

1. Montrez $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$.
2. Montrez que φ est un produit scalaire sur E.
3. Montrez $\mathcal{P}^\perp = \mathcal{I}$.
4. Exprimez $\hat{f}$ l'image de $f \in E$ par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Ex 254 : Soit E un espace euclidien de dimension non nulle.

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors p est un endomorphisme autoadjoint.
2. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.

   (a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme autoadjoint.

   (b) Montrer que $(\operatorname{Ker} q + \operatorname{Im} p)^\perp = \operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$.

   (c) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Ex 255 : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour $P = \sum_{i=0}^{2} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=1}^{2} b_i X^i$, on pose $(P|Q) = \sum_{i=1}^{2} a_i b_i$. On admet que $(.|.)$ définit un produit scalaire sur E.
On pose $F = \{P \in E,\ P(1) = 0\}$.

1. F est-il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, donner une base de F.
2. Soit $P = X$. Déterminer $d(P, F)$ (on pourra chercher une base orthonormée de F).

Ex 256 : On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $]0,1[$ telles que $t \mapsto (tf(t))^2$ soit intégrable sur $]0,1[$.

1. Montrer que $(f, g) \mapsto \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$ définit une produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$.
2. On pose $f_0 : t \mapsto 1, f_1 : t \mapsto t$ et $F = vect(f_0, f_1)$. Donner une base orthonormée de F.
3. Déterminer pour quels réels a, b l'intégrale $\int_0^1 t^2(\ln(t) - at - b)^2 dt$ est minimale.

Ex 257 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
On définit le produit scalaire : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (A|B) = tr(A^T B)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$.
3. On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
4. Soit $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr(M)} = 0\}$.
   (a) Montrer que H est un espace vectoriel de dimension à déterminer.
   (b) On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 1. Calculer la distance de J à H.

Ex 258 : Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = tr(A^T B)$.

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire.
2. Trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire.
3. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |tr(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
4. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $G = \mathrm{Vect}(I_n)$. Déterminer $G^\perp$ et $d(M, G)$.

Ex 259 : Soit E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et p le projecteur orthogonal sur F.

1. (a) Montrer que $F = \{x \in E,\ \|p(x)\| = \|x\|\}$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.
   (c) Montrer que : $\forall x, y \in E,\ (x|p(y)) = (p(x)|y)$. Que signifie ce résultat ?

2. On considère p_F et p_G deux projecteurs orthogonaux sur deux sous-espaces vectoriels F et G respectivement. On suppose que H est un sous-espace vectoriel tel que $p_F \circ p_G$ est le projecteur orthogonal sur H.
   (a) Montrer que $F \cap G = H$.
   (b) Montrer que $p_G \circ p_F = p_F \circ p_G$.
   (c) On suppose réciproquement que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.
   Montrer qu'il existe H sous-espace vectoriel de E tel que $p_H = p_F \circ p_G$.

<u>Ex 260</u> :

1. Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
   En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
2. Soit p un projecteur orthogonal de rang r, montrer que $\mathrm{tr}\, p = r$.
3. Montrer que pour tout vecteur x, $\langle x, p(x)\rangle = \langle p(x), p(x)\rangle$.

<u>Ex 261</u> : Soit E un espace euclidien et F le sous-espace vectoriel de E engendré par u, où $u \in E$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Soit p la projection orthogonale sur F.

1. (a) Soit $x \in E$, montrer que $p(x) = \dfrac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}.u$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \dfrac{UU^T}{U^T.U}$ où $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
2. Soit $A = UU^T$.
   (a) Montrer que A est diagonnalisable.
   (b) Déterminer les sous-espaces propres de A.
3. En posant $M = I_n - UU^T$ et par observation de la matrice, déterminer des caractéristiques sur M.

<u>Ex 262</u> : Soit E un espac euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que u possède deux valeurs propres réelles non nulles de signes opposés. Montrer qu'il existe $z \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(z)$ et z soient orthogonaux.
2. On suppose u autoadjoint de trace nulle. Montrer qu'il existe $z \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(z)$ et z soient orthogonaux.
3. On suppose que u est simplement de trace nulle, montrer que la conclusion précédente demeure. On pourra introduire la matrice A canoniquement associée à u et l'endomorphisme v canoniquement associé à $B = A + A^T$.

<u>Ex 263</u> : Soit $U_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Sans calculer aucun déterminant, déterminer les valeurs propres de U_n et leur multiplicité.

2. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   On pose : $\forall i \in [\![2,n]\!],\ f_i = \dfrac{1}{i-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} e_k - e_i$.

   Montrer que $(f_i)_{2\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthogonale de l'espace propre associé à 0 de U_n.
3. (a) Déterminer une base orthonormale de cet espace propre.

   (b) Donner la formule de diagonalisation de U_n.

Ex 264 : Soient $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E,\ \langle f(x),y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$. Un tel endomorphisme est dit antisymétrique.

1. Que dire de f^2 ? Montrer que : $\forall x \in E,\ \langle f(x),x\rangle = 0$ et $\left\langle f^2(x),x\right\rangle \leq 0$.
2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Que peut-on dire de $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$?
3. Déterminer une relation entre $\det(A)$ et $\det(A^T)$. Montrer que si f est bijective, alors la dimension de E est paire.
4. Montrer que f^2 est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_-$.

Ex 265 : Une matrice $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs et : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. On considère la norme infinie $\|.\|_\infty$ standard sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que : $\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.
3. En déduire que pour toute valeur propre complexe λ de A, on a : $|\lambda| \leq 1$.
4. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convexe et stable par produit matriciel.

Ex 266 : Soient $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_0 \in E$ tels que $B(x_0,r) \subset F$. Montrer que :
   $\forall y \in E, \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}^*,\ \alpha x_0 + \beta y \in B(x_0,r)$. En déduire que $F = E$.
3. On suppose ici que $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathcal{N}$ est un fermé de E. Montrer que $vect(\mathcal{N})$ est d'intérieur vide (on pourra considérer I_n), puis que $\mathcal{N}$ est aussi d'intérieur vide.

Ex 267 : Soit E un espace vectoriel normé.

1. Montrer que E est connexe par arcs.
2. Soit F un autre espace vectoriel normé, et $f : E \to F$ une fonction continue. Montrer que $f(A)$ est connexe par arcs pour tout connexe par arcs A de E.
3. Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs. En déduire qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Soit U une partie de E. Montrer que la fonction $\mathbf{1}_U$ est continue sur E si U est à la fois ouvert et fermé dans E. En déduire les parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermée dans E.

Ex 268 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé aussi. Pour cela :

1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. Si a est une racine d'ordre k de P, quel est son ordre dans P' ?
3. Montrer le résultat voulu.

Ex 269 : Soient $\alpha > 0, u_1 > 0$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Jusitifier l'existence de $\ln(S_{n+1})$ pour tout n de $\mathbb{N}$, et l'exprimer à l'aide de $\ln(S_n)$.
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.
3. En déduire que la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1/2$.
4. Pour $\alpha \leq 1/2$, déterminer la limite de $(\ln(S_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$; conclure sur la nature de la série $\sum u_n$.

Ex 270 : Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, déterminer la nature de la série $\sum (u_n)^k$.

Ex 271 : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$.

1. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
2. Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.
3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
   (b) Trouver d'une autre manière la limite de (I_n).

Ex 272 :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ converge.
2. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2) dt$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(t)}{t+\cos(t)} dt$ converge.

Ex 273 :

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t) dt$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

3. On pose $I_p = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^p(t)dt$ et $u_p = (p+1)I_pI_{p+1}$, pour $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est constante et que $I_p \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2p}}$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Ex 274 :

1. Donner le développement en série de Taylor de l'exponentielle sur $[0;1]$.
2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$. Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge et qu'elle est de limite nulle.
3. Donner un équivalent de I_n en partant d'une intégration par parties
4. (a) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ en fonction de I_n
   (b) Montrer la convergence de la suite $u_n = n\sin(2\pi n!e)$

Ex 275 : Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I existe.
2. On considère : $\forall x \in \mathbb{R},\ J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t|\sin t|}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J(n\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} (u+k\pi)\frac{\sin u}{(u+k\pi)^2+1}du$.
3. I est-elle absolument convergente ?

Ex 276 : On définit pour tout $t > 0$, $f(t) = \dfrac{\ln t}{(1+t)^2}$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$, puis sur $[1,+\infty[$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ex 277 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,\pi/2]$.
2. (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,\pi/2]$? (on pourra considérer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f_n$).
3. Soient $0 < a < b$. (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,\pi/2]$? Et sur $[a,b] \subset [0,\pi/2]$?
4. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,\pi/2],\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(t)g(t)dt = g(0)$.

Ex 278 : Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2n^2}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de S ?
2. Montrer la continuité de S sur celui-ci (on pourra travailler sur un segment).
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.
4. (a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}dt$, pour x dans $\mathbb{R}_+^*$ (on rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$).
   (b) Donner un équivalent de S en 0.

Ex 279 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{(1+x)^n}$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$.

1. Jusitifer l'existence de J_n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
2. Calculer f_n'. Trouver une relation entre J_n et J_{n+1}. En déduire un équivalent de J_n.
3. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum J_n x^n$.
4. Exprimer sa somme sous forme d'intégrale.

Ex 280 : Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$. On note f la somme de cette série de fonctions.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et en déduire, pour $x > 0$, une expression explicite de $f'(x)$.
5. Déterminer f puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Ex 281 : On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour tout $x > 0$.

1. Justifier l'existence et le caractère $\mathcal{C}^1$ de S, puis donner une expression de $S'(x)$.
2. En déduire la monotonie de S.
3. Montrer que $S(x+1) + S(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et en déduire un équivalent simple de S en 0^+.

Ex 282 : Soient $p, n \in \mathbb{N}$ et on pose $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} \mathrm{e}^{-nx} dx$.

1. Montrer que S_n existe.
2. Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et $T_{a,b} = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-bx} dx$. Montrer que $T_{a,b}$ existe et en donner une expression (on montrera que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$).

3. Montrer que $S_0 = (p+1)! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + S_n$.
4. En déduire que (S_n) converge.
5. Montrer que $(p+1)! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} dx$.

Ex 283 : Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (\ln(x))^q dx$.

1. (a) Étudier la convergence de cette intégrale.
   (b) Calculer cette intégrale.
2. Calculer $\int_0^1 \exp(x \ln(x)) dx$.

Ex 284 :

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0,1]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{2n} \ln^2(x)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer son intégrale.
3. On note $I = \int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x^2} dx$. Écrire I comme somme d'une série.
4. Comment calculer I à 10^{-N} près ? Donner le résultat pour $N = 3$.

Ex 285 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

1. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$?
2. Calculer la somme de cette série.

Ex 286 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{1}{(2+t^2)^{n+1}} dt$.

1. Montrer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut au moins 2.
2. Soit $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Pour $x \in]-2, 2[$, montrer que la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
3. En déduire la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ et montrer que $R = 2$.

Ex 287 : Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$, sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ex 288 : Donner les rayons de convergence et calculer les sommes des séries entière $\sum nx^n$, $\sum 2nx^{2n}$ et $\sum n^{(-1)^n}x^n$.

Ex 289 :

1. Soit $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\, x^n$.
   Pour quels x la quantité $f(x)$ est-elle définie ? On note I le domaine de définition de f.
2. Soit $g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$ avec $a_1=-1$ et : $\forall n\geqslant 2,\ a_n=-\ln(1-\dfrac{1}{n})-\dfrac{1}{n}$.
   Pour quels x la quantité $g(x)$ est-elle définie ? On note J le domaine de définition de g.
3. (a) Montrer que $g(x)=(1-x)f(x)+\ln(1-x)$.
   (b) Montrer que $f(x)\sim-\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ quand $x\to 1^-$.
   (c) Déterminer un équivalent de f en $(-1)^+$.

Ex 290 : On considère la suite définie par $u_0=3$ et : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_ku_{n-k}$.

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq 4^nn!$.
2. Soit $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$. Montrer que f est définie sur un intervalle à préciser. Montrer que f est solution de $y'=y^2$.
3. Déterminer f.
4. En déduire explicitement l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex 291 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et on pose $f_n:x\mapsto\dfrac{e^{i2^nx}}{n^n}$. Soit $S:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$.

1. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{2^{k^2}}{k!k^k}x^k$.
   (b) Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor de S en 0 ?
3. Rappeler la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale.
   Montrer que : $\forall z\in\mathbb{C},\ e^z=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$.

Ex 292 :

1. Calculer $I_{2n}=\displaystyle\int_0^\pi\sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{1-u}}=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}u^n$ pour tout $u\in\left]-1,1\right[$.

3. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}}\, \mathrm{d}t$.
   Justifier que f est développable en série entière pour $x \in \left]-1, 1\right[$, et exprimer ce développement.

Ex 293 :

1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{Arctan} u| \leqslant |u|$.
2. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\, \mathrm{d}t$.
   (a) Domaine de définition de F ?
   (b) Domaine de continuité de F ?
   (c) Domaine de dérivabilité de F ?
   (d) Déterminer F'.
   (e) En déduire F.

Ex 294 : Soit $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2+i} du$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2 u^2} du$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ F'(t) = -\sqrt{\pi} e^{-it^2}$.
   En déduire que F est dérivable en 0 et que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} F(t)$.
5. Montrer que $F(0) = \sqrt{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-it^2} dt$.
6. En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

Ex 295 : Soit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donner Γ'.
3. Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[$, $\forall \lambda \in \left]-1, 1\right[$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}}{1 - \lambda \mathrm{e}^{-t}}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \Gamma(x)}{(n+1)^x}$.

Ex 296 : On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer F' sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 297 : On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $z(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}}dt$ quand l'intégrale existe.

1. Justifier l'existence de $z(0)$ et montrer que $z(0) = \sqrt{\pi}$.
2. Montrer que z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = -\frac{1}{2(x+i)}z(x)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la partie réelle et imaginaire de $-\frac{1}{2(x+i)}$. En déduire $z(x)$.

Ex 298 : On considère l'équation différentielle : $4xy'' + 2y' - y = 0 \quad (E)$. Trouver l'unique solution développable en série entière à l'origine respectant la condition $y(0) = 1$.

Ex 299 : Soit le système suivant : $\begin{cases} x' = z + \cos t \\ y' = y + \mathrm{e}^{3t} \\ z' = x + \sin t \end{cases}$.

1. Résoudre.
2. Trouver la solution telle que x et z soient bornées sur $\mathbb{R}_+$ et que $x(0) = z(0)$.

Ex 300 : Soit l'équation différentielle $(*)$: $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$.

1. Déterminer les solutions de $(*)$ de la forme $t \mapsto t^r$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Écrire $(*)$ sous forme d'un système différentiel linéaire.
3. Soit l'équation différentielle $(**)$: $t^2y'' + 4ty' + 2y = e^t$. À l'aide de la méthode de la variation des constantes, donner les solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. On propose une autre méthode de résolution. Vérifier qu'il existe une solution particulière de $(**)$ de la forme $y : t \mapsto \frac{z(t)}{t}$, avec z une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   En déduire l'ensemble des solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 301 : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ & & 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Prouver que $f \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
2. On pose $\overrightarrow{u_\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$. Trouver les θ tels que la dérivée partielle de f en $(0,0)$ selon $\overrightarrow{u_\theta}$ existe.
3. Existent-ils des dérivées partielles de f en $(0,0)$?
4. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ avec $(x,y) \neq (0,0)$.
5. Est-ce qu'ils existent des dérivées partielles d'ordre 2 de f sur $\mathbb{R}^2$?

Ex 302 : $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$

$$\text{Soit } \Phi : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (x,y) & \longmapsto & (xy, \dfrac{x}{y}) \end{array}$$

1. Montrer que Φ est bijective et déterminer Φ^{-1}.
2. On pose $(u,v) = \Phi(x,y)$ et $f(x,y) = F(u,v)$.
   Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ en fonction des dérivées partielles de F.
3. Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2f(x,y) + 2 = 0$
4. Résoudre $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$.

Ex 303 : On a la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$x $\mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = x((\ln(x))^2 + y^2)$ et Σ la surface représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les points critiques de f.
   f admet-elle un extremum global ?
2. Soit (a,b) un point critique de f, déterminer l'équation du plan tangent à Σ en $(a,b,f(a,b))$
3. Exprimer l'équation du plan tangent en $(1,1,1)$
4. Exprimer la différentielle de f en $(1,1)$ puis g telle que $g(x,y) = (f(x,y), f(x,y))$

Ex 304 : Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner $P(X \leq n)$ et $P(X \geq n)$.
2. Donner $P(U = n)$ et $P(V = n)$.
3. Que peut-on dire des événements $(X = n) \cap (Y = n)$ et $(U = n) \cap (V = n)$? Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
4. Donner l'espérance de U et de V.

Ex 305 : Soient A_1, A_2 et A_3 trois personnes venant dans cet ordre déposer une lettre à la poste dans laquelle il y a deux guichets. A_3 doit donc attendre que A_1 et A_2 aient fini. Soient X_1, X_2 et X_3 les temps d'attente respectifs au guichet des visiteurs et elles suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.
Soit Y le temps d'attente de A_3 avant d'accéder à un guichet.
Soit Z le temps total passé par A_3 (temps d'attente pour accéder à un guichet attendre le guichet et temps passé au guichet).

1. Déterminer la loi de Y (calculer $P(Y > k)$ d'abord).
2. Écrire Z en fonction de Y et X_3 puis déterminer la loi de Z.
3. Temps moyen passé par A_3 à la poste.

IMT 1 MP 2022

Ex 306 : Soit $n \in \mathbb{N}^*,\ a_0 \in \mathbb{R}_+^*,\ (a_1, ..., a_{n-1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n-1},\ P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

1. Montrer que dans $\mathbb{R}_+^*$, P admet un unique zéro, noté ρ.
2. Montrer que tout zéro de P est de module inférieur ou égal à ρ.
3. Montrer que : $\rho \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)$.
4. Montrer que : $\rho < 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} a_k$.

Ex 307 : Quels sont les polynômes complexes P tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ (en notant $\mathbb{U}$ le cercle unité) ?

Ex 308 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.

1. A-t-on nécessairement $BA = 0$?
2. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ tr\left((A+B)^p\right) = tr(A^p) + tr(B^p)$.
3. Déterminer une relation entre $\mathrm{rg}\,(A)$ et $\mathrm{rg}\,(B)$.

Ex 309 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $M^2 + M + I_n = 0$.

1. Montrer que n est pair.
2. Déterminer $\mathrm{tr}\,(M), \mathrm{rg}\,(M)$ et $\det(M)$.
3. Donner un exemple pour $n = 2$, puis déterminer toutes les solutions.

Ex 310 : Soit D l'opérateur de dérivation dans $\mathbb{R}_n[X],\ n \geqslant 1$.

1. Trouver son polynôme caractéristique.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'application f telle que $f^2 = D$.

Ex 311 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + I_n = 0$. Montrer que $\mathrm{tr}(A)$ est un entier.

Ex 312 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Montrer que A est diagonalisable.

Ex 313 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 3$.

Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé. Déterminer les autres valeurs propres et vecteurs propres.

Ex 314 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner une expression de $P(B)$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

Ex 315 : Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $N^n = NM = 0$. On suppose de plus que M est trigonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M + N$ est trigonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 316 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ ayant des valeurs propres positives. Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $tr(AU) \leq tr(A)$.

Ex 317 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, avec $k \in [0, 1[$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Montrer que cela est faux lorsque l'on suppose seulement que :
   $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$.

Ex 318 : On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^n}$.

1. Montrer que la suite (a_n) converge et donner sa limite.
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n.

Ex 319 : On pose $u_n = \displaystyle\int_n^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}$ u_n est-elle correctement définie ?
2. Nature de $\sum u_n$?

Ex 320 : On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} t^n}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que u_n est bien définie.
2. Calculer u_n.

Ex 321 : Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{n^\alpha}{a(1+a)...(1+a^n)}$.

Ex 322 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}}$. Nature de la série $\sum u_n$ (on pourra sommer par paquet).

Ex 323 : Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

Ex 324 : Pour $(n, x) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^3}{n+x}$.

1. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_+$ et sur $[0, 1]$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Ex 325 :

1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+n^2 ix}$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g n'est pas DSE au voisinage de 0.

Ex 326 : Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Ex 327 : On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner un équivalent de f en 1, sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-v)}{\sqrt{v}}\, \mathrm{d}v = \sqrt{\pi}$.

Ex 328 : Soit la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$ et f sa somme.

1. Rayon de convergence de cette série ?
2. Lien entre f et $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sqrt{x} sin(t)} dt$?

Ex 329 : On pose $f : z \in \mathbb{U}_n \to z^2 \in \mathbb{U}_n$ où $\mathbb{U}_n$ est le groupe des racines n-ièmes de l'unité.

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est-elle bijective ?
2. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ $f \circ f = Id$?

Ex 330 : Soit n un entier naturel supérieur à 2. On définit une probabilité uniforme sur l'ensemble $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Pour un entier p divisant n, on introduit l'événement $D_p = \{1 \leqslant k \leqslant n,\ p \text{ divise } k\}$.

1. Calculer $P(D_p)$.
2. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times ... \times p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de n en facteurs premiers. Les événements $D_{p_1}, \ldots, D_{p_r}$ sont-ils mutuellement indépendants ?
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et φ l'indicatrice d'Euler (le nombre d'eléments de Ω premiers avec n). Montrer que $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Ex 331 : Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $T_r = \min\left(\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_1 + \cdots + X_n = r\} \cup \{+\infty\}\right)$.

1. Reconnaître la loi de T_1.
2. Calculer $P(T_r = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que l'événement $(T_r = +\infty)$ est négligeable.

IMT 2 MP 2022

Ex 332 : On pose pour $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_n = (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} - X^n + 1$.

1. Déterminer n tel que $X^3 - X^2 + X - 1$ divise P_n.
2. Dans les cas où P_n n'est pas divisé, calculer le reste de la division euclidienne

---

Ex 333 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

1. Déterminer f sur $\mathbb{Z}$, puis sur $\mathbb{Q}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}_+$.
3. Étudier la monotonie de f.
4. Déterminer entièrement f.

Ex 334 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. A est-elle inversible ? Si oui, donner A^n, pour $n \in \mathbb{Z}$.

Ex 335 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre p.

1. f est-elle injective ? Surjective ?
2. On suppose que $\dim(E) = n$ et $p = n$.
   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

(b) Quelle est la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$? On appelle A cette matrice.

(c) A est-elle diagonalisable ?

3. $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Donner un exemple de f dans $\mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre n, et d'une base telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice A.

4. (a) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(t(I_n + A))$.

(b) Résoudre : $\begin{cases} X'(t) & = & X(t) + AX(t) \\ X(0) & = & \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \end{cases}$.

Ex 336 :

1. Donner la définition de la somme directe de n espaces vectoriels ($n \geqslant 2$).
2. Soit f un endomorphisme, λ, μ deux valeurs propres distinctes.
Démontrer que E_λ, E_μ sont en somme directe. Que dire si le nombre de sous espaces propres augmente ?
3. Soit E un espace muni d'une structure euclidienne. Démontrer qu'une partie et son orthogonal sont en somme directe.
4. Soit f un endomorphisme et A sa matrice associée, dans une base $\mathcal{B}$ de E, avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Que dire des sous-espaces stables en observant la matrice ?

Ex 337 : Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Soit F l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont X est un vecteur propre. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; quelle est sa dimension ?
2. Même question avec X quelconque.

Ex 338 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $[0,1]$, telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. Soit λ une valeur propre de A.
Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$ et que pour $\omega > 0$, $|\lambda - \omega| \leqslant 1 - \omega$.

Ex 339 : Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels non tous nuls. On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Quel est le rang de A ? Que peut-on en déduire sur son spectre ?
3. Calculer A^2. En déduire le spectre et le polynôme caractéristique de A.

<u>Ex 340</u> : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

<u>Ex 341</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $\operatorname{rg} A = \operatorname{Tr} A$. Montrer que A est la matrice d'un projecteur.

<u>Ex 342</u> : Soit l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & X^n \times P(\dfrac{1}{X}) \end{array}$.

1. Montrer que l'application u est un endomorphisme.
2. Montrer que u est diagonalisable et exprimer son polynôme minimal.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de u.

<u>Ex 343</u> : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

<u>Ex 344</u> : Pour $n \geq 2$, on pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et l'on définit φ qui à $P \in E$ associe
$\varphi(P) = (X^2 + X)P(1) + (X^2 - X)P(-1)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E. Déterminer l'image et le noyau de φ.
2. Déterminer les éléments propres de φ. Est-il diagonalisable ?

<u>Ex 345</u> : On pose E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs réelles. On pose $\phi : f \longrightarrow F$ avec $F(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ pour x différent de 0 et $F(0) = f(0)$

1. Montrer que ϕ est un endomorphismes de E
2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de ϕ.

<u>Ex 346</u> : Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $a \in E$ un vecteur normé.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha \langle a, x \rangle a$, endomorphisme de E.
Monter que : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.

1. Déterminer les α tels que f_α soit bijectif.
2. Trouver les valeurs propres de f_α.

<u>Ex 347</u> : Dans tout l'exercice, on considère A une matrice antisymétrique.

1. Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top AX = 0$.
2. Qu'en déduire des valeurs propres réelles de A ? À quelle condition A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. On pose : $M = A + I_n$, montrer que M est inversible, est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que $K = M^{-1}M^\top$ est orthogonale.
5. Soit B une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictements positives, montrer que $A + B$ est inversible.

<u>Ex 348</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $XX^TX = -\mathrm{I}_n$.

<u>Ex 349</u> : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soit (a, b) une famille libre de E et $f : x \mapsto (a|x)a + (b|x)b$ définie sur E.

1. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E.
2. Trouver les éléments propres de f.

<u>Ex 350</u> : On pose pour tout l'exercice $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

1. Donner les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E.
2. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
3. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$ converge au sens de $\|\cdot\|_\infty$, alors elle converge au sens de $\|\cdot\|_1$.
4. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

<u>Ex 351</u> : Exprimer $\sin 3x$ comme polynôme de $\sin x$. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est irrationnel.

<u>Ex 352</u> : On pose la suite$(u_n)_n$ telle que $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

1. Étudier la suite $(u_n)_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_n$.

<u>Ex 353</u> :

1. Montrer que pour n dans $\mathbb{N}^*$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\cos x = nx$.
2. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite ainsi trouvée. Montrer une éventuelle monotonie et une éventuelle limite de cette suite.

Ex 354 : On pose pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, $S_p(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i^p$.

1. Calculer $S_1(n)$ et $S_2(n)$ et en donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$.
2. Donner un équivalent de $S_p(n)$ quand n tend vers $+\infty$, pour p quelconque fixé.

Ex 355 : Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum \ln\left(\frac{(2n+1)n}{(2n-1)(n+1)}\right)$

Ex 356 :

1. Si f est continue sur $[a,b]$, que représente $S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$?

   Illustrer graphiquement et énoncer le théorème relatif à $S_n(f)$.
2. Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2(n^3+k^3)^{1/3}}$.

Ex 357 : Déterminer la nature de $\sum u_n$, avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)}$.

Ex 358 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto \min\left(n, \frac{x^2}{n}\right)$, définie sur $\mathbb{R}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) sur des ensembles à préciser.

Ex 359 :

1. Définition de la convergence uniforme de (f_n) vers f sur I.
2. Démontrer le théorème de la continuité pour la convergence uniforme (on remarquera que : $f(x) - f(a) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)$).
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f_n : x \mapsto \frac{1-x^n}{1+x^n}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Étudier la convergence simple, puis uniforme de (f_n).

Ex 360 : On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur son domaine.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Donner le tableau de variation de f.
5. Donner la limite de f en $+\infty$.

Ex 361 : Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n(x) = \displaystyle\int_0^x g_{n-1}(1-t)dt$, avec $g_0 = 1$.

1. Montrer que la suite (g_n) est bien définie sur $[0,1]$.
2. Montrer que la suite (g_n) est bornée et que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|g_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{2}\|g_{n-1}\|_\infty$.
3. Montrer que la série $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
4. Identifier la somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$.

Ex 362 : Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n(1-\sqrt{x})$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

Ex 363 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto \dfrac{n}{\sqrt{t}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{nt}\right)$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n$.

1. Montrer que l'intégrale I_n converge.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Ex 364 : Pour $x \in [0,+\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(1+\frac{x}{n})$.
Montrer que f est définie, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Ex 365 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n \mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite de la suite (a_n).
2. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation entre a_{n+2} et a_n.
3. On considère $fx \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Déterminer le domaine de définition de f.
4. Calculer f.

Ex 366 : Soit $(a_n)_n$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon R_1. Montrer que la série entière $\sum a_n^2 x^n$ a pour rayon de convergence $R_2 = R_1^2$.

Ex 367 :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $u_x : t \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\cos(xt)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On posera $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_x$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{x}{4+x^2} - \dfrac{x}{1+x^2}$.
4. Montrer l'existence de $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt$. En déduire $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \int_a^{2a} \frac{e^{-t}}{t}dt$.
5. Calculer $f(x)$.

Ex 368 : On définit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-xt}dt$ quand l'intégrale existe. Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre sur un intervalle à préciser. Résoudre celle-ci.

Ex 369 : Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$ si l'intégrale converge.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $f'(x)$ sous forme d'intégrale.
4. Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent de f en 0^+.

Ex 370 : Soit $(E)\ :\ y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Montrer que les solutions de E ont une limite finie en 0^+.

Ex 371 :

1. Soit X suivant une loi géométrique. Rappeler de quelle loi il s'agit, donner un exemple concret d'utilisation (justifier).
2. Rappeler la définition d'une fonction génératrice, puis donner celle de X.
3. Rappeler comment on obtient l'espérance et la varianace à l'aide de la fonction génératrice et faire le calcul pour X.

Ex 372 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi gémoétrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Que vaut $P(X \geq k)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$?
2. Yves et Zak disposent chacun d'une pièce ayant la probabilité p de tomber sur pile. Yves lance la pièce jusqu'à l'obtention de pile, puis Zak fait de même. Quelle est la probabilité quiil faille deux fois plus de lancers à Zak d'obtenir pile que Yves n'en a eu besoin ?

ENSEA MP 2022

Ex 373 : On note $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constiués respectivement des matrices symétriques et antisymétriques.

1. Quelle est la dimension de $S_n(\mathbb{K})$?
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = A_n(\mathbb{K}) \oplus S_n(\mathbb{K})$.
3. On pose $\varphi : M \mapsto M^T$. Déterminer $\det(\varphi)$.

Ex 374 : Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme n'ayant que $\mathbb{E}$ et $\{0\}$ pour seuls espaces stables.

1. Montrer que u ne possède pas de valeur propre.
2. En déduire $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, la famille $(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est une base de $\mathbb{E}$.
4. Comment est la matrice de u dans cette base ?

Ex 375 : Trouver l'enemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$ telles que : $A^3 + A = 2I_n$.

Ex 376 : On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par : $\forall P \in E,\ f(P) = (X-3)(X+1)P' - XP$. Donner les valeurs propres et vecteurs propres de f.

Ex 377 : Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\int_0^1 t^i P(t) dt \right) X^i$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Soit $P \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Montrer que :$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt = 0$. En déduire que $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$.
3. Quelle est la matrice de f dans la base canonique ? Est-elle inversible ? diagonalisable ?
4. En fonction de n, déterminer un développement asymptotique à deux termes de $tr(f)$.

Ex 378 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation : $(E_n) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ qu'il existe une unique solution x_n de (E_n) sur $\mathbb{R}_+$ et que $x_n \in [\dfrac{1}{2}, 1]$.
2. Montrer la convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to \infty} x_n$.

Ex 379 : Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$, avec P_n un polynôme réel donc on précisera le degré et le coefficient dominant.
2. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on pose $I_{m,n} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(t)P_n(t)e^{-t^2}dt$. Calculer $I_{m,n}$, sachant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

Ex 380 : Soit $h \in \mathcal{C}^0([0, \pi/2], \mathbb{R})$ et $f_n : x \mapsto h(x)\sin^n(x)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étude de la convergence simple de (f_n).
2. Étude de la convergence uniforme de (f_n).

Ex 381 : Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}dt$.

1. Montrer l'existence de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite

Ex 382 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \frac{dt}{(1+t^2)(1+n^2t^2)}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.
2. Calculer le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.
3. Étudier la limite de la somme en R et $-R$.

Ex 383 : Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt^2)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Donner pour tout $k \in \mathbb{N}, F^{(k)}(0)$ puis donner, si possible, le développement en série entière de F.