1-Intégration

Ex 1 : Étudier la convergence des intégrales suivantes puis les calculer.

1. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}t}{1+\sqrt{t}}$;
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x-x^3}$;
4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{t}{t^4-1}\,\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t$;
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/t)}{t^2\cos(1/t)}\,\mathrm{d}t$;
7. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}\,\mathrm{d}t$;
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1-t\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$;
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$;
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t)\sin t\,\mathrm{d}t$;
11. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t^2}}$;
12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t}$;
13. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t}$;
14. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x+2\sin x+3}$
15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$;
16. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t}}$;
17. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$;
18. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(2-t^2)\sqrt{1-t^2}}$;
19. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\operatorname{Arctan}(t)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$; (poser $y=1/t$)
20. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ (poser $t=\operatorname{ch}(u)$) ;
21. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(2-t^2)\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$;
22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+it)}$;
23. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)\ln(\ln(t))}$;
24. $\displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^n dt.$

Ex 2 : Étudier si les intégrales impropres suivantes convergent.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t+t^2e^{-t}}$;
3. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(\ln(t))}$;
4. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$;
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{(t-1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(e^{-2t}-e^{-t})\sin(t)}{(1-\cos(t))\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t+1)}{1+t^2}\,\mathrm{d}x$;
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right)\mathrm{d}t$;
10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;
11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$;
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(|t^2-t|)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$;
13. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\ln\left|\frac{1+t^2}{1-t^2}\right|\mathrm{d}t$;
14. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)^{\ln(t)}}$;
15. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^4+t+1)\,\mathrm{d}t$;
16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$;
17. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{t-t^2}\,\mathrm{d}t$;
18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$;
19. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;
20. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(e^t)}{t}\,\mathrm{d}t$;
21. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}\,\mathrm{d}t.$

Ex 3 : Soit $f\in\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}$. Montrer que f a un point fixe (x_0 est un point fixe de f si $f(x_0)=x_0$).

Ex 4 : Déterminer $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{3\varepsilon} \frac{\sin(t)}{t^2}dt.$

Ex 5 : Étudier si les intégrales impropres suivantes convergent en fonction des paramètres.

1. $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t,\ \alpha\in\mathbb{R}\,;$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}}-a-\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x,\ a,b\in\mathbb{R}\,;$

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^a}{1+x^b}\,\mathrm{d}x,\ \ a,b\in\mathbb{R}\,;$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^a)}{x^b},\ \ a,b\in\mathbb{R}\,;$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(z+t)\sqrt{1+t}},\ z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-\,;$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(e^{\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}}-1\right)\,\mathrm{d}t,\ \alpha\in\mathbb{R}_+^*\,;$

7. (*) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)dt,\ \ \alpha\in\mathbb{R}\,;$

8. (*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}\,\mathrm{d}t,\ (n,z)\in\mathbb{N}\times\mathbb{C}\,;$

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha\ln(x+e^{\alpha x})\,\mathrm{d}x,\ \alpha\in\mathbb{R}$

10. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta-1}\,\mathrm{d}t,\ \ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\,;$

11. $\displaystyle\int_0^{1/e}\frac{1}{t}\left(-\ln(t)\right)^\beta\,\mathrm{d}t,\ \ \beta\in\mathbb{R}\,;$

12. $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln\sin(\pi t)}{t^\alpha(1-t)^\beta}\,\mathrm{d}t\,;$

13. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha(1-e^{-1/\sqrt{t}})\,\mathrm{d}t,\ \alpha\in\mathbb{R}\,;$

14. (*) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\ln\left(\operatorname{sh}(t^\alpha)\right)-2\operatorname{sh}\left(\ln\left(1+t^\alpha\right)\right)\right)\,\mathrm{d}t,$ $\alpha\in\mathbb{R}.$

Ex 6 : Soit $f:[a,b[\to\mathbb{R}_+$ continue et croissante. On pose $\displaystyle S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$

1. Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_a^b f.$

2. Si $\displaystyle\int_a^b f$ diverge, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty.$

Ex 7 : Soient $E=\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, $f\in E$ et $\displaystyle g:x\mapsto\int_0^1\inf(x,t)\,f(t)dt.$ définie sur $[0\,;1]$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et exprimer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour x dans $[0,1]$.

Ex 8 : **1.** Soit $M>0$ et $u:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que : $\forall x\in[1,+\infty[,\ |u(x)|\leqslant M$.
Montrer que $\displaystyle\int_1^\infty\frac{u'(t)}{t}dt$ converge.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\sin t}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^\infty\sin(t^2)dt$ convergent.
3. Montrer que $\displaystyle\int_1^\infty\sin(t^3)dt$ converge.

Ex 9 : Soient $\ell\in\mathbb{R}$ et $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue, intégrable sur $[0,+\infty[$ et ayant pour limite ℓ en $-\infty$. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$; pour $u\in\mathbb{R}$, on pose $\displaystyle I(u)=\int_u^{+\infty}\left[f(a+x)-f(b+x)\right]dx.$

1. Montrer que, pour tout $u\in\mathbb{R}$, $I(u)$ est bien définie et vaut $\displaystyle\int_{a+u}^{b+u}f(t)\,dt.$

2. Calculer $\displaystyle\lim_{u\to-\infty}I(u)$ si l'on suppose $\ell=0$, et en déduire $\displaystyle\lim_{u\to-\infty}I(u)$ dans le cas ℓ quelconque.

Ex 10 : (*) Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle x\mapsto f\left(\left|x-\frac{a^2}{x}\right|\right)$ est encore intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer son intégrale en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty}f.$

Ex 11 : (*) Soient f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ et F sa primitive s'annulant en 0. Comparer les natures de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{\operatorname{ch}(t)}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)\operatorname{sh}(t)}{(\operatorname{ch}(t))^2}\, dt$ et, le cas échéant, leurs valeurs.

Ex 12 : (*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ telle que f' est bornée et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.
Montrer que : $\displaystyle\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$.

Ex 13 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n} dt$ et $g_n : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^n} dt$.

1. Montrer que f_n et g_n sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = x^{n-1} e^x g_n(x)$.

3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un équivalent de $g_n(x)$ quand x tend vers 0^+.

5. Montrer que $g_n(x) \sim e^{-x}/x^n$, quand x tend vers $+\infty$.

6. Donner une équation différentielle linéaire d'ordre un vérifiée par f_n.

Ex 14 : Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^{2p+1}(t)}$.

1. Justifier l'existence de I_p et calculer I_0.

2. Trouver une relation entre I_{p+1} et I_p, puis en déduire I_p.

Ex 15 : Soit $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} (\operatorname{sh}(t))^n dt$.

1. Résoudre l'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$.

2. Déterminer la limite de la suite (I_n).

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.

4. À l'aide d'un encadrement, déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Ex 16 : ***1.*** Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt = \int_x^{ax} \frac{e^{-t}}{t} dt$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt = \ln a$.

3. Montrer que $f(t) = \dfrac{1}{1-e^{-t}} - \dfrac{1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 et bornée.

4. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-t} - e^{-nt}) f(t) dt$.

5. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Ex 17 : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$.

1. On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'on pose $F_1(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, dt$. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction f/F_1^α est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

2. On suppose f non intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'on pose $F_2(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction f/F_2^α est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Ex 18 : Soient $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^{x+1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f et que f y est décroissante. Calculer $f(1)$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$. En déduire que $f(x) \sim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(2)}{x}$.

Ex 19 : (*) Soit $f : x \mapsto e^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Étudier la monotonie de f.

2. Déterminer la limite et un équivalent de f en chacune des bornes de son domaine de définition.

Ex 20 : On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^x)^{1/x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Montrer que : $\forall x > 1,\ 1 \leq f(x) \leq \dfrac{x}{x-1}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Ex 21 : *1.* Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\ln(u)du$ converge.

2. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt \underset{x\to 0^+}{=} -\ln(x) + \int_0^{+\infty} e^{-u}\ln(u)du + O(1).$

Ex 22 : (*) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $D_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n\, dt$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale D_n converge.

2. Montrer que $D_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt$, puis en déduire D_1.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}du$.

4. En déduire que $D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!$.

Ex 23 : (*) *1.* Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)-\cos(nx)}{\cos(t)-\cos(x)}dt$, avec $x \in \mathbb{R}$.

2. Trouver une relation de récurrence d'ordre deux vérifiée par (I_n).

3. Calculer I_n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex 24 : Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2 dx \leq 4\int_0^1 x^2(f'(x))^2 dx$. Déterminer le cas d'égalité.