**3-Séries numériques**

**Ex 1 :** ($x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$) Déterminer les limites (quand elles existent) quand $n$ tend vers $+\infty$ de

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor,\ \sqrt[n]{a^n+b^n},\ \frac{5n^2+\sin n}{3n^2\cos(n\pi/5)},\ \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1},\ e^{-n}\operatorname{ch}\sqrt[4]{n^4+1},\ n^{\frac{1}{n}}-1.$$

---

**Ex 2 :** Montrer que toute suite convergente à termes dans $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

---

**Ex 3 :** Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites définies par leurs premiers termes $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et par les relations de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} &= \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \end{cases}$.

***a.*** Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont bien définies et que $v_n \leq u_n$ pour $n \geq 1$.

***b.*** Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent. Que dire de leurs limites ?

---

**Ex 4 :** ***1.*** Soit $u_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$ : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$, où $\alpha \in ]-\pi;\pi[$. Simplifier $u_n$ et en déduire la limite de $(u_n)$.

***2.*** Soit $z_0 = re^{i\alpha} \in \mathbb{C}^\star$, avec $r > 0$ et $\alpha \in ]-\pi,\pi]$.
On définit la suite complexe $(z_n)$ par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad z_{n+1} = \dfrac{z_n+|z_n|}{2}$.
Calculer $z_n$ en fonction de $n$ et en déduire la limite de $(z_n)$.

---

**Ex 5 :** Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$.

***1.*** Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|1+\tfrac{z}{n}\right|^n = e^x$.

***2.*** Montrer que pour tout entier $n$ assez grand $1+\frac{z}{n} \neq 0$ et $\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) \equiv \operatorname{Arctan}\frac{y}{n+x}\ [2\pi]$.

***3.*** En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\tfrac{z}{n}\right)^n = e^z$.

---

**Ex 6 :** Soit $(x_n)$ définie par $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \sqrt{n+x_{n-1}} \quad \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$.
Montrer successivement que $\sqrt{n} \leqslant x_n \leqslant n$, $\sqrt{n} \leqslant x_n \leqslant \sqrt{2n-1}$, $x_n \sim \sqrt{n}$ et pour finir un développement asymptotique à deux termes de $(x_n)$.

---

**Ex 7 :** Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-x_n\sin(t)}dt$. On pourra montrer que $f : x \mapsto e^{-x}$ est 1-lipschitzienne.

---

**Ex 8 :** Montrer que l'équation $x^3+nx = 1$ admet une unique solution pour $n \in \mathbb{N}$. On la note $x_n$.
Déterminer la limite de la suite $(x_n)$ puis un développement asymtpotique à deux termes.

**Ex 9 :** Étude de la converge de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2+u_n^2}$, $u_0 \geqslant 0$.

---

**Ex 10 :** (*) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(\sqrt{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1,1]$. On pourra remarquer que pour tout $x$ de $[-1,1]$, on a : $x = \sin\sqrt{t_k}$, avec $t_k = (2k\pi + \operatorname{Arcsin}(x))^2$, pour $k$ dans $\mathbb{N}$.

---

**Ex 11 :** (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$. Montrer l'existence de $l \in \mathbb{R}$, que l'on déterminera, tel que $x_n = l + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

---

**Ex 12 :** Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $n\exp(-\sqrt{n})$;
2. $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$;
3. $x^{\ln n}$ où $x>0$, puis $x^{\lfloor \ln n\rfloor}$;
4. $\dfrac{1}{\sqrt{n}(\cos^2(n))}$;
5. $\dfrac{4^n - n}{5^n + 2n^4}$;
6. $\dfrac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}$;
7. $\dfrac{1}{n^\alpha + \operatorname{Arctan}(n)}, \alpha \in \mathbb{R}$;
8. $\dfrac{1}{(n^2+\ln^7(n))(\ln(n^4+2n))^5}$;
9. $\dfrac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}}$;
10. $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$;
11. $n\sin(1/n)$;
12. $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$;
13. $\left(b+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}, b \geq 0$;
14. $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{n^2}{n^2+2}\right)$.
15. $n^{an^b}, a, b \in \mathbb{R}$;
16. $\ln\left(\dfrac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right)$;
17. $\sin\left(\dfrac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n}}\right)$;
18. $\dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
19. $\dfrac{2^n}{n^n}$;
20. $\ln(1+x^{2^n}), x \in \mathbb{R}_+$;
21. $\dfrac{\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - \lfloor n^{3/2}\rfloor + n}$;
22. $\dfrac{\ln(n)}{3n^4 - n}$;
23. $(-1)^n n^2$;
24. $\dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor\, e^{\cos(n)}}{n^3 - n}$;
25. $\dfrac{\lambda^n}{1+\lambda^{2n}},\ \lambda \in \mathbb{R}$;
26. $\dfrac{1}{\binom{n+p}{n}^\alpha},\ p \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$;
27. $\dfrac{(-1)^n}{\binom{n+p}{n}^\alpha},\ p \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$;
28. $\dfrac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)}$;
29. (*) $\dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}}$;
30. $\sum \cos\left(n^2\pi\ln(1-\dfrac{1}{n})\right)$;
31. $(-1)^n\left(e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$;
32. $\dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}+\sin(n)}$;
33. $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \dfrac{\pi}{6}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$;
34. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(x)}{n^2+\sin^2(x)}$;
35. $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right),\ \alpha \in \mathbb{R}^*$; puis la valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$;
36. $\dfrac{a^{2^n}}{\prod_{k=1}^{n}(1+a^{2^k})}, a \in \mathbb{R}_+^*$;
37. $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^n}$;
38. $\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$;
39. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$;
40. $\dfrac{(3n)!}{\alpha^{3n}(n!)^3}, \alpha > 0$;
41. $\dfrac{1}{n^\beta}\left(\dfrac{2\cdot 4 \ldots (2n)}{3\cdot \ldots (2n+3)}\right)^\alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
42. $\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an},\ a \in \mathbb{R}$.

---

**Ex 13 :** Soit $(u_n)$ une suite à termes positifs tels que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.

---

**Ex 14 :** Déterminer la nature puis la somme de la série de terme général :

1. $\dfrac{n^2}{n!}$;
2. $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$;
3. $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ $(n \geq 2)$;
4. $\sum \ln\left(\dfrac{(2n+1)n}{(2n-1)(n+1)}\right)$;
5. $\dfrac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, $x \in ]-1,1[$;
6. $\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}$;
7. $(3+(-1)^n)^{-n}$;
8. $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$;
9. $\dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$;
10. $\dfrac{\mathrm{ch}\,(n)}{4^n}$;
11. $\dfrac{n}{(n+1)!}$;
12. $\ln(1+x^{2^n}), x \in \mathbb{R}_+$;
13. $\dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$, $p \in \mathbb{N}$;
14. $\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$;
15. $(n+1)3^{-n}$;
16. $\ln\left(1+\dfrac{2}{(n+3)n}\right)$;
17. $\dfrac{1}{4n^2-1}$
18. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2}$;

---

**Ex 15 :** (*) Convergence et somme de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k}$.

---

**Ex 16 :** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Étudier la convergence de $(u_n)$ selon la valeur de $u_0$.
2. (*) On suppose que $u_0 > 0$.
   a. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^{-n}\ln(u_n)$. Montrer que $(v_n)$ converge vers un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$.
   b. Montrer que $u_n \sim \exp(2^n a)$.
   c. Montrer que $v_{n+1} - v_n \sim \dfrac{1}{2^{n+1}u_n}$. En déduire que $u_n = \exp(2^n a) - \dfrac{1}{2} + o(1)$.

---

**Ex 17 :** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ dérivable, telle que $f(0) = 1$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq f(x) < 1$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n f(u_n)$.

1. Étudier la suite $(u_n)$.
2. On suppose que $f'(0) \neq 0$. Quelle est la nature de $\sum u_n^2$ ?
3. On suppose toujours que $f'(0) \neq 0$. On pose $x_n = \ln(f(u_n))$, pour $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la nature de $(x_n)$ ? Nature de $\sum x_n$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.
4. Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $v_{n+1} = \ln(1+v_n)$. Étudier les suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

---

**Ex 18 :** Étude de la convergence des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2-e^{1/k})$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{a(a+1)...(a+n-1)}{n!}$.

---

**Ex 19 :** Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$.
2. Montrer que la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge puis que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$.

---

**Ex 20 :** Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ .

---

**Ex 21 :** (*) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n S_n = 1$.

*1.* Montrer que $\sum a_k^2$ diverge.

*2.* Donner un équivalent de $a_n$. On pourra étudier $S_{n+1}^\alpha - S_n^\alpha$ pour un $\alpha$ bien choisi.

---

**Ex 22 :** Soit $\sum u_n$ séries à termes positifs. On suppose que $\sqrt[n]{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+$.

*a.* Montrer que si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ est divergente.

*b.* Montrer que si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ est convergente.

*c.* Observer que, lorsque $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

*d.* En déduire la nature de la série de terme général $\left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

---

**Ex 23 :** Soit $(a_n)_{n\geq 2}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série de terme général $a_n$ est convergente. On pose, pour $n \geq 2$, $b_n = -\dfrac{a_n \ln(a_n)}{\ln(n)}$.

*1.* Par une étude de $x \mapsto -x\ln(x)$, montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que tout entier $k$ tel que $k \geq k_0$, on a l'implication : $a_k \leq \dfrac{1}{k^3} \Rightarrow b_k \leq \dfrac{3}{k^3}$.

*2.* Montrer que la série de terme général $b_n$ converge.

*3.* Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ une suite à valeurs dans $]0,1[$ et telle que la série $\sum \dfrac{u_n}{\ln(u_n)}$ converge. Montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{\ln(n)}$ converge.

---

**Ex 24 :** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$.

Pour quelles valeurs de $\alpha$ la suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

---

**Ex 25 :** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n!}{x^n} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

*1.* Étudier la suite $\left(\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

*2.* Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) - \alpha\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ converge.

*3.* En déduire un équivalent de $u_n$.

---

**Ex 26 :** *1.* Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, le réel $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier.

*2.* En déduire la nature de la série $\sum \sin\left((2+\sqrt{3})^n\right)$.

---

**Ex 27 :** Soit $k \in ]1,+\infty[$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite définie par $u_1 > 0$ et pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$ : $u_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{kn}\right) u_n$.

*1.* La suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

*2.* Étudier la convergence de $\sum (v_{n+1} - v_n)$ avec $v_n = \ln(n^{1/k} u_n)$.

*3.* Étudier la convergence de la suite $(v_n)$.

*4.* En déduire un équivalent simple de $(u_n)$.

*5.* Étudier la convergence des séries de termes généraux $u_n$, $\dfrac{u_n}{n}$ et $(-1)^n u_n$.

*6.* Montrer que la suite $(w_n)$ avec $w_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$ vérifie les conditions de l'introduction.

---

**Ex 28 :** (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k}$. Montrer l'existence de $R_n$, puis en donner un équivalent simple et enfin un développement asymptotique à deux termes.

---

**Ex 29 :** *1.* Trouver un équivalent de : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+\sqrt{k}}\right)$

*2.* Montrer qu'il existe une constante $C$ telle que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2+\sqrt{k}}\right) = C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

---

**Ex 30 :** Soient $\alpha > 0, u_1 > 0$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

*1.* Jusitifier l'existence de $\ln(S_{n+1})$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, et l'exprimer à l'aide de $\ln(S_n)$.

*2.* Donner un développement asymptotique à deux termes de $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

*3.* En déduire que la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1/2$.

*4.* Pour $\alpha \leq 1/2$, déterminer la limite de $(\ln(S_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$, puis la nature de la série $\sum u_n$.

---

**Ex 31 :** Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$ est un réel négatif.

---

**Ex 32 :** *1.*Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ converge et calculer sa somme $S$.

*2.* Proposer un encadrement de $S$ avec ses sommes partielles.

*3.* Montrer que $e$ est irrationnel.

---

**Ex 33 :** *1.* Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (on exprimera les sommes partielles sous forme d'intégrale).

*2.* On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer que la série de terme général $R_n$ converge et déterminer sa somme.

**Ex 34 :** En étudiant des paquets de deux termes consécutifs, déterminer la nature de $\sum \frac{(-1)^n \cos(\ln(n))}{n}$.

**Ex 35 :** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Donner un équivalent de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$ ?

**Ex 36 :** On pose $a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\sqrt{k}$.

*1.* Montrer que la suite $\left(a_n + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$ admet une limite réelle $\ell$.

*2.* Montrer que $\ell$ est dans $\mathbb{R}_+^*$.

*3.* Quelle est la nature de $\sum 1/a_n$ ?

**Ex 37 :** Soit, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{\sin(\ln(x))}{x}$.

*1.* Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on a : $\int_n^{n+1} f(x)dx - f(x) = \int_n^{n+1} (n+1-x)f'(x)dx$.

*2.* Montrer que la série $\sum \frac{\sin(\ln(n))}{n}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(x))}{x}dx$ sont de même nature.

**Ex 38 :** Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = o(u_n)$. Montrer que $\sum u_n$ est absolument convergente et que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim u_n$.

En déduire la nature de la série de terme général $n! \left[\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) - 1\right]$.

**Ex 39 :** Soit $z = x + iy$, avec $x$ et $y$ réels. On suppose que $z$ n'est pas dans $\mathbb{Z}_-^*$. Pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \frac{n!}{(z+1)(z+2)...(z+n)}$.

*1.* Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si $x > 1$ (on pourra étudier $\sum_{k=2}^{n} \ln\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right|$ et en déduire un équivalent simple de $|u_n|$).

*2.* On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que : $\forall n \geq 2,\ (n+z)u_n + (z-1)S_{n-1} = 1$.

En déduire que la convergence de la série $\sum u_n$ équivaut à son absolue convergence. Lorsque la série converge, quelle est sa somme ?

**Ex 40 :** Pour $a > 0$, étudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$.

**Ex 41 :** On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)$ converge vers 0.
2. Montrer que $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature.
   En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.
3. Montrer que $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et $\sum u_n^3$ sont de même nature.
   En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

---

**Ex 42 :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

***a.*** Montrer l'existence de $R_n$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

***b.*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

***c.*** En déduire un équivalent de $R_n$.

***d.*** Quelle est la nature de $\sum R_n$.

---

**Ex 43 :** ***1.*** Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} u_k$, avec $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{k} + k\sqrt{k}}$.

***2.*** On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leq R_n \leq 2\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

***3.*** Montrer que $R_n - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

---

**Ex 44 :** (*) Déterminer $\left\lfloor \displaystyle\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} \right\rfloor$.

---

**Ex 45 :** Donner un équivalent des suites $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

---

**Ex 46 :** (*) ***1.*** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = (\ln(2))(\ln(n)) + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + o(1)$.

***2.*** En déduire la somme de la série $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$. (On pourra transformer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ et on rappelle qu'il existe une constante $\gamma$ telle que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma + o(1)$).

***3.*** Donner un équivalent du reste $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

**Ex 47 :** (*) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^\alpha}$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$). Même question avec la série de terme général $(-1)^n u_n$.

---

**Ex 48 :** (*) Montrer que : $\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

---

**Ex 49 :** ***1.*** Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3\sin(t)}{1+t^4}dt$.

***2.*** Donner un équivalent de $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t^3\sin(t)}{1+t^4}dt$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

***3.*** Donner un équivalent de $\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{t^3\sin(t)}{1+t^4}dt$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

---

**Ex 50 :** Nature et somme de :

***1.*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$, $|z|<1$ ;

***2.*** $\displaystyle\sum_{p,q\geq 2} \frac{(-1)^p}{q^p}$ ;

***3.*** $(r^{|n|}e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$, avec $(r,\theta)$ dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ;

***4.*** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1)$, avec $\zeta(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^n}$.

---

**Ex 51 :** (*) Soit $\sigma$ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(\sigma(n))^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sigma(n)}$ ?

---

**Ex 52 :** (*) Soient $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_n$ deux séries absolument convergentes. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $c_n = \displaystyle\sum_{d|n} a_d b_{\frac{n}{d}}$ (somme étendue sur tous les diviseurs de $n$) et $N(n)$ le nombre de diviseurs de $n$.

On pose $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ et on note $\varphi$ l'indicatrice d'Euler.

***1.*** Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} c_n$ converge absolument et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right)$.

***2.*** Montrer que la série de terme général $N(n)/n^\alpha$ converge pour $\alpha > 1$ et déterminer sa somme.

***3.*** Montrer que pour $\alpha > 2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ converge et déterminer sa somme.

---

**Ex 53 :** Étudier la finitude des sommes suivantes :

***1.*** $\displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{i^\alpha + j^\alpha}$;

***2.*** $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}\frac{1}{x^2}$;

***3.*** $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\frac{1}{a^p+b^q}$, $a>1,\ b>1$.

---

**Ex 54 :** Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{pq}{p+q}$.

En examinant $S_n - S_{n-1}$, montrer que $S_n \sim \dfrac{2}{3}(1-\ln(2))n^3$.