4-Compléments d'algèbre linéaire

Ex 1 : Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, avec :

1. $f_n : x \mapsto \cos^n(x)$, pour $n \in \mathbb{N}$;
2. $f_n : x \mapsto |x-n|$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex 2 : Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Soient $u_1, ..., u_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(u_1, ..., u_p)$ est de dimension k. On voit les u_i comme vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Que peut-on dire de la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par $(u_1, ..., u_p)$?

Ex 3 : Soient E un de dimension finie et F et G des sous-espaces vectoriels de E de même dimension. On note F' (respectivement G') un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (respectivement G).

1. Montrer que : $F + G = F \cap G \oplus F' \oplus G'$.
2. Montrer que si $(f_1, ..., f_p)$ est une base de F' et $(g_1, ..., g_p)$ est une base de G', alors $F + G = F + K$, avec $K = \mathrm{Vect}(f_1 + g_1, ..., f_p + g_p)$.
3. Montrer que $F \cap K = \{0\}$ et que $(f_1 + g_1, ..., f_p + g_p)$ est libre.
4. Montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G de E ont un supplémentaire commun si et seulement s'ils ont la même dimension.

Ex 4 : Soient $a_0, a_1, ..., a_n$, $(n+1)$ points distincts appartenant à l'intervalle $[0,1]$. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(c_0, ..., c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt = \sum_{k=0}^{n} c_k P(a_k)$.

Ex 5 : Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que P est dans $\mathbb{Q}[X]$ (on pourra penser aux polynômes interpolateurs de Lagrange).

Ex 6 : Soient $E_1, \ldots, E_n$ et $F_1, \ldots, F_n$ sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $E_i \subset F_i$ et : $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Montrer que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ E_i = F_i$.

Ex 7 : Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$ et on pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$,
$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(X) = P(-X)\}$ et
$K = \{P \in \mathbb{R}_5[X],\ P(3) = P'(3) = P''(3) = P'''(3) = 0\}$. Montrer que tous ces ensembles sont des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}_5[X]$, puis montrer que : $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}_3[X]$, puis $F \oplus G \oplus H \oplus K = \mathbb{R}_5[X]$.

Ex 8 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\Gamma_k(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A^k M = A^{k-1} M\}$ pour k dans $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\Gamma_k(A)$ est un sous-espace vecoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\Gamma_k(A) = \Gamma_{k+1}(A)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.
3. Montrer que si $\Gamma_k(A) = \Gamma_{k+1}(A)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, alors A est inversible.
4. Soit $u_k = \dim \Gamma_k(A)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   a. Montrer que la suite (u_k) est croissante. Montrer l'existence de $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = u_{k+1}\}$.
   b. Montrer que : $\forall k \geq p,\ \Gamma_k(A) = \Gamma_{k+1}(A)$.

Ex 9 : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \text{Vect}\{(1,1,0),(2,0,-1)\}$ et $G = \text{Vect}\{(1,-1,0),(1,0,-2)\}$.

1. Justifier sans calculs que $F \cap G \neq \{0\}$, puis expliciter $F \cap G$.

2. Trouver un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.

Ex 10 : (*) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et u dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on pose $\Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Pour tout p de $\mathbb{N}$, déterminer $\text{Ker}\,(\Delta^p)$.

2. Pour tout p de $\mathbb{N}$ et u dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, expliciter $\Delta^p(u)$.

Ex 11 : Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et on pose $w = v \circ u$. Montrer que les proposition suivantes sont équivalentes :

1. w est un isomorphisme de E dans G.
2. u est injective, v est surjective et $F = \text{Ker}\, v \oplus \text{Im}\, u$.

Ex 12 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) = 0\}$ et f, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$, par
$f : P \mapsto (X-1)\big(P'(X) - P'(1)\big) - 2\big(P(X) - P(1)\big)$.

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer sa dimension.

2. Déterminer $A \cap \text{Vect}(1,(X-1)^k)$, pour $k \in [\![1,n]\!]$.

3. Donner une base de A.

4. Déterminer le noyau et l'image de f.

Ex 13 : Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soient $a, b \in \mathcal{L}(V)$ tels que les seuls sous-espace vectoriels stables à la fois par a et par b soient $\{0\}$ et V. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul qui commute avec a et b. Montrer que u est bijectif.

Ex 14 : (*) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AMB = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en calculer la dimension.

Ex 15 : Montrer l'existence et l'unicité d'une famille de polynômes $(B_n)_{n\geq 0}$ telle que, pour tout n, $X^n = B_n(X) - B_n(X-1)$ et $B_n(0) = 0$. Vérifier que $B_n'(X) = B_n'(0) + nB_{n-1}(X)$.

Ex 16 : (*) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$. Montrer que $\text{rg}\,(u) + \text{rg}\,(u^2) \leq n$ et

Montrer que $2\text{rg}\,(u^2) \leq \text{rg}\,(u)$.

Ex 17 : **(CCP 62)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $f^2 - f - 2Id = 0$.

1. Montrer rapidement que : $\text{Ker}\,(f + Id) \oplus \text{Ker}\,(f - 2Id) = E$.

2. On suppose E de dimension finie. Montrer que : $\text{Im}\,(f + Id) = \text{Ker}\,(f - 2Id)$.

Ex 18 : (*) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension quelconque, $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que $E = H_1 \oplus H_2$ et que H_2 et $\text{Ker}\,(u)$ sont de dimension finie. Montrer que :
$\dim(\text{Ker}\,(u)) = \dim(H_1 \cap \text{Ker}\,(u)) + \dim(H_2 \cap \text{Ker}\,(u)) + \dim(u(H_1) \cap u(H_2))$.

Ex 19 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, avec $n \geq 2$.
Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, on pose $G_i = \mathrm{Vect}(e_k,\ k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\})$ et $H_i = \{f \in \mathcal{L}(E),\ G_i \subset \mathrm{Ker}\, f\}$.

1. Expliquer pourquoi les H_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que la somme des H_i est directe.

Ex 20 : Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $p_1, \ldots, p_n$ des endomorphismes non nuls vérifiant $\forall i, j \in [\![1, n]\!], p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$, où δ est le symbole de Kronecker.

1. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\,(p_i)$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$, sont en somme directe.
2. Montrer que les p_i sont de rang 1 .

Ex 21 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux symétries de E telles que
$\mathrm{Ker}\,(f - id_E) = \mathrm{Ker}\,(g - id_E)$. On pose $h = g \circ f - id_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f + id_E) = \mathrm{Ker}\,(g - id_E)$.
2. Montrer que h peut s'exprimer comme combinaison linéaire de f et g.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir : $g \circ f = f \circ g$.

Ex 22 : Soit E un espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im} p \cap \mathrm{Im} q = \{0_E\}$.
2. Soit $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Ex 23 : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $p, q, r \in \mathcal{L}(E)$ des projecteurs. On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est un projecteur. Montrer que : $q = r = 0$.

Ex 24 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et V et W deux sous-espaces vectoriels de E tels que : $V \oplus W = E$. Soit p la projection sur V parallèlement à W.

1. Donner les caractéristiques remarquables de l'endomorphisme $q = id_E - p$.
2. Soit $f = ap + bq$, avec a et b dans $\mathbb{K}$ distincts. Montrer qu'un sous-espace vectoriel A de E est stable par f si et seulement si on a : $A = A \cap V + A \cap W$.
3. Soit s la symétrie par rapport à V parallèlement à W. Déterminer les sous-espaces stables de s.

Ex 25 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = g(x)v$.

Ex 26 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et p un projecteur de E. On pose
$\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{L}(E),\ u \circ p = p \circ u\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que : $u \in \mathcal{F} \Leftrightarrow [u(\mathrm{Im}\, p) \subset \mathrm{Im}\, p$ et $u(\mathrm{Ker}\, p) \subset \mathrm{Ker}\, p]$. En déduire $\dim(\mathcal{F})$.

Ex 27 : Soit $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ et $u_3 = (-1, 1, 1)$. On pose $F = vect(u_1, u_2)$ et $G = vect(u_3)$. Quelle est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p sur F parallèlement à G ?

Ex 28 : Montrer que toute forme linéaire sur $\mathbb{C}_n[X]$ est de la forme $P \mapsto \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P^{(i)}(0)$, avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

Ex 29 : (*) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et A un sous-espace de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. On suppose que $\bigcap_{l\in A} \operatorname{Ker}(l) = \{0\}$. Montrer que $A = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.

Ex 30 : Soit $n \geq 4$ et on définit $\Phi : P \mapsto XP'' + (X-4)P' - 3P$ sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer une base du noyau de Φ.
3. Quel est le rang et la trace de Φ.

Ex 31 : Soient $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < ... < x_n < y_n$ des réels et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1. On suppose que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\int_{x_i}^{y_i} P(t)dt = 0$. Montrer que $P = 0$.
2. Montrer que l'on peut trouver $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\int_{x_i}^{y_i} P(t)dt = 0$.

Ex 32 : ***1.*** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note Φ_A la forme linéaire $M \mapsto Tr(AM)$. Montrer que l'application $\Phi : A \mapsto \Phi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Montrer que $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible. Calculer $Tr(J_rC)$, avec $J_r = diag(\underbrace{1,...,1}_{r \text{ fois}}, 0, ..., 0)$.

3. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Ex 33 : Soit n un entier naturel donné avec $n \geq 2$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. On appelle f_n l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E,\ f_n(P) = (X^2-1)P'' + 2XP' - n(n+1)P$.

1. Soit $P \in E$. Montrer que $d^\circ(f_n(P)) = d^\circ P$ si on a $d^\circ P \leq n-1$ et $d^\circ(f_n(P)) < d^\circ P$ sinon . Puis en déduire $\operatorname{Im} f_n$ et montrer que $\operatorname{Ker} f_n$ est une droite vectorielle.
2. Soit S l'endomorphisme $P \mapsto P(-X)$.
   - ***a.*** Quelle est la nature de S ? Montrer que S et f_n commutent. En déduire que $\operatorname{Ker} f_n$ est stable par S.
   - ***b.*** Soit P un élément non nul de $\operatorname{Ker} f_n$. Que vaut $d^\circ P$? Montrer que $P(-X) = (-1)^n P$.
3. On pose $H = (X^2-1)^n$ et $L = H^{(n)}$.
   - ***a.*** En observant que $(X^2-1)H' - 2nXH = 0$, montrer que L est dans $\operatorname{Ker} f_n$ et en déduire $\operatorname{Ker} f_n$.
   - ***b.*** Montrer par récurrence que la famille $\left((X+1)^k(X-1)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E et donner la décomposition de L dans cette base.

Ex 34 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \diagup & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout n dans $\mathbb{N}$. A est -elle inversible et si oui déterminer son inverse.

Ex 35 : On dit qu'un matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est stochastique si tous ses coefficients sont positifs et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice stochastique. Montrer que $A - I_n$ n'est pas inversible.

Ex 36 : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$; calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex 37 : Soit f une application allant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ et non constante. On suppose que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(AB) = f(A)f(B)$.

1. Calculer $f(I_n)$.
2. Montrer que $f(0) = 0$.
3. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$, alors $f(A) = 0$.
4. Montrer que si A est inversible, alors $f(A)$ est non nulle.
5. Montrer que si A et B sont semblables, alors : $f(A) = f(B)$.
6. Soit $r \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose A de rang r.
   a. Montrer si $f(A) \neq 0$, alors pour toute matrice B de rang r, on a $f(B) \neq 0$.
   b. Montrer si $f(A) \neq 0$, alors pour toute matrice B de rang entre 1 et r, on a $f(B) \neq 0$.
7. Prouver la réciproque de la deuxième question.

Ex 38 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que M ne soit pas colinéaire à I_n. Montrer que M est semblable à une matrice dont la première colonne est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ex 39 : Soit $n \geqslant 2$ entier. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_n$ et $A \neq \pm I_n$.
Montrer que $\operatorname{Tr} A \equiv n \quad [2]$ et que $\operatorname{Tr} A \leqslant n - 2$.

Ex 40 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$. Montrer que l'endomorphisme $\phi : M \mapsto AM + MA$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a une trace égale à $2n\mathrm{rg}\,(A)$.

Ex 41 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque non réduit à $\{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

1. Justifier qu'il existe $u \in E \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{K}u$.
2. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ tel que : $\forall x \in E\ ,\ f(x) = \varphi(x)u$.
3. φ est-elle unique ?
4. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \alpha f$.
5. Montrer que si $\alpha \neq 1$, alors $f - Id_E$ est un isomorphisme.

Ex 42 : Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geq 2$. Résoudre les équations d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

1. $X + \mathrm{tr}(X)A = B$;

2. $X + X^T = \mathrm{tr}(X)A$, lorsque $tr(A)$ est non nulle ;

3. $X + tr(X)X^T = \dfrac{2}{n}I_n$.

Ex 43 : Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

1. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

5. A et A^T, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex 44 : (*) Soit E un espace vectoriel de dimension $3n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathrm{rg}\,(f) = 2n$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

2. Quelle est la dimension de $\{g \in \mathcal{L}(E),\ fg = gf\}$?

Ex 45 : Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ non nulle telle que : $A^2 = 0$.

1. Montrer que $rg(A)$ vaut 1 ou 2.

2. Montrer que si $\mathrm{rg}\,(A) = 2$, alors $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(A)$ puis que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Si $rg(A) = 1$, montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 46 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que sa matrice dans la base canonique soit $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que le plan d'équation $x + 2z = 0$ est stable par f.

Ex 47 : Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients non nuls.

1. Quel est le rang de A ?

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.

3. On revient au cas général. On pose $B = 2A - \mathrm{tr}\,(A)I_n$. Calculer B^2, puis en déduire que B est inversible et déterminer B^{-1}.

Ex 48 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer que : $\exists (B, C) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}) \times \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K}),\ A = BC$.

Ex 49 : On veut résoudre l'équation $X^2 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec X dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit ϕ (respectivement a) l'endomorphisme canoniquement associé à X (respectivement à A).

1. Montrer que : $\phi \circ a = a \circ \phi$ et $\phi \circ (a - id_{R^3}) = (a - id_{R^3}) \circ \phi$.

2. En déduire que X est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \alpha & \lambda_2 & 0 \\ \beta & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, avec $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \alpha, \beta$ dans $\mathbb{R}$, puis conclure.

Ex 50 : On note S l'espace vectoriel des suites complexes. On considère l'endomorphisme (de décalage) de S défini par $L\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Trouver le noyau de $L - \lambda$ id et celui de $(L - \lambda\text{id})^2$.

2. On note F le sous-espace vectoriel de S des suites (u_n) vérifiant :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = \frac{1}{2}u_{n+3} + 3u_{n+2} - \frac{7}{2}u_{n+1} + u_n$.
Montrer que $F = \text{Ker}(2L - \text{id}) \oplus \text{Ker}(L + 2\text{id}) \oplus \text{Ker}(L - \text{id})^2$.

3. Déterminer la dimension de F et une base de F.

Ex 51 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient F, G deux sous-espaces de E supplémentaires stables par u. On note π_u le polynôme minimal de u, π_F le polynôme minimal de $u_{|F}$ et π_G le polynôme minimal de $u_{|G}$. Démontrer que $\pi_u = \text{ppcm}(\pi_F, \pi_G)$.

Ex 52 : Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer qu'on a alors $\text{Im}\,(f) \oplus \text{Ker}\,(f) = E$.

Ex 53 : $X^2 + 1$ est-il le polynôme minimal d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Même question pour $X^2 + X + 1$ et $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.

Ex 54 : Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1. Quel est le polynôme minimal de $3I_n + J$?

Ex 55 : (*) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Montrer que le degré du polynôme minimal μ_u est majoré par $1 + \text{rg}\,(u)$.

Ex 56 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}\, f \oplus \text{Ker}\,(f^2 + \text{Id})$ et $\text{Ker}\,(f^2 + \text{Id}) \neq \{0\}$.

2. Montrer que $\text{Im}\,(f) \subset \text{Ker}\,(f^2 + id_E)$ et $\text{Im}\,(f^2 + id_E) \subset \text{Ker}\,(f)$.

3. Donner l'expression de p la projection sur $\text{Ker}\,(f)$ parallèlement à $\text{Ker}\,(f^2 + id_E)$.

4. Soit $x \in \text{Ker}\,(f^2 + \text{Id})$, $x \neq 0$. Montrer que $(x, f(x))$ est libre.

5. Quelles sont les dimensions de $\text{Ker}\,(f^2 + \text{Id})$ et de $\text{Ker}\, f$.

6. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Montrer que $\left\{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3),\ f \circ g = g \circ f\right\} = \text{Vect}\,(\text{Id}, f, f^2)$.

8. Résoudre $u^2 = f$.

Ex 57 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $(AB)^n = 0$. Montrer que $(BA)^n = 0$.

Ex 58 : Soit $A = diag(1, 2, ..., n)$ on pose $g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(g)$ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

2. Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $tr(M) = 0$. Montrer que : $\exists B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M = BC - CB$.

4. Si U est nilpotente, montrer que $h : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto UM - MU$ est nilpotente.

Ex 59 : Soient f, g, h trois endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E. On suppose $f \circ g - g \circ f = h$ et $\mathrm{rg}\,(h) = 1$.

1. Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E telle que $\mathrm{Ker}\,(h) = \mathrm{Vect}\big((e_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]}\big)$.

2. Quelle est la trace de h ?

3. Montrer que h est nilpotente.

Ex 60 : (*) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ telle que $tr(f(I_2)) = 0$ et $f(N) = 0$ pour toute matrice N nilpotente. Montrer que $f^2 = 0$.

Ex 61 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres sont négatifs et tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0$, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

1. Montrer que A est inversible.

2. Montrer que les coefficients de A^{-1} sont positifs.

Ex 62 : Soit $(M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $\forall i, j, k, l \in [\![1, n]\!],\ M_{i,j}M_{k,l} = \delta_{j,k}M_{i,l}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(M_{i,j})$ est indépendante de j. On la notera F_i.

2. Montrer que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

3. En déduire $\dim(F_i)$.

4. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ M_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$, avec $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5. Expliciter les automorphismes d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (morphismes d'algèbre bijectifs).

Ex 63 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice inversible et B la matrice obtenue en échangeant les colonnes i et j. Montrer que B est aussi inversible. Comment passe-t-on de A^{-1} à B^{-1} ?

Ex 64 : Inverser si possible les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & (0) & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex 65 : (*) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M = [(i+j+\alpha)^2]_{1\leq i,j\leq n}$. Déterminer le rang de M.

Ex 66 : Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(e_1 - x, ..., e_n - x)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

Ex 67 : Déterminer le rang, la trace et le déterminant des endomorphismes suivants :

1. k l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ k(P)(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}P(t)dt$, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$;
2. l l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $k(P) = P(aX+b)$, avec a, b dans $\mathbb{R}$.

Ex 68 : Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Calculer pour tout x de $\mathbb{K}$: $\begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & \cdots & P(x+n) \\ P(x+1) & P(x+2) & \cdots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & \cdots & P(x+2n) \end{vmatrix}$.

Ex 69 : **1.** Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \overline{\det(M)} = \det(\overline{M})$.
2. En déduire que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$.

Ex 70 : Soit $A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}$, avec B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À quelles conditions A est-elle inversible ? Calculer son inverse lorsque celui-ci existe.

Ex 71 : **1.** On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ de $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ et un vecteur colonne $B = (b_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. $X = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ l'unique solution de $AX = B$. Montrer alors l'égalité $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la colonne i de A par B.
2. On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. On considère un élément $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On se donne des entiers $b_1, \ldots, b_n$ strictement positifs et tous distincts. On suppose qu'il existe un polynôme P tel que $(1-X)^n P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^{b_k}$. Exprimer $P(1)$ en fonction des b_k seulement.

Ex 72 : Soit $n \geq 2$. Calculer le déterminant de l'endomorphisme $\Phi : A \mapsto A^T$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex 73 : (*) Soient A, B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) = \det(B) = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \det(xA+B) = 0$.

Ex 74 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note P la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par : $P = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$. Déterminer la valeur de $\det(P)$.

Ex 75 : Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Soit J_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale ayant r coefficients égaux à 1, puis uniquement des coefficients nuls sur la diagonale.

1. Si $r > 0$ trouver $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\det(X + J_r) \neq \det(X)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(A+X) = \det(X)$. Montrer que $A = 0$.

Ex 76 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}, a_{i,j} \in \{1,-1\}$. Montrer que : $2^{n-1} \mid \det A$.

Ex 77 : Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$ et $r_1,...,r_n$ des nombres complexes. On pose $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $a_{ij} = r_i$ si $i = j$, $\;a_{ij} = b$ si $i > j$ et $a_{ij} = a$ si $i < j$. Pour $x \in \mathbb{C}$, on pose $D(x)$ le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à tous les coefficients de A .

1. Calculer $D(-a)$ et $D(-b)$.
2. Montrer que $D(x)$ est un polynôme de degré au plus un et en déduire $D(x)$.
3. En déduire $\det(A)$.

Ex 78 : Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 0 & a_2 & & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & 0 & & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & a_n \\ a_1 & a_2 & & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & n & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \alpha \\ \alpha & 0 & & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & & (0) & & n-1 \\ & 1 & & & n-2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & (0) & & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ex 79 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ inversible. Montrer que M^{-1} est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det(M)| = 1$.

Ex 80 : (*) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Q_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & x^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p}{p-1} & x^p \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{p-1} & x^{p+1} \end{vmatrix}.$

1. Calculer $Q_p(x+1) - Q_p(x)$.
2. Montrer que $Q_p(n+1) = (p+1)! \sum_{k=1}^{n} k^p$.

Ex 81 : Soit $n \geq 2$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles.

1. Montrer que $com(comA) = (\det A)^{n-2}A$.
2. Montrer que : $com(AB) = com(B)com(A)$

Ex 82 : Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre intègre de dimension finie $n \geq 2$ et $a \in \mathcal{A}$.

1. Montrer que $x \mapsto ax$ est linéaire.
2. Montrer que a est inversible si et seulement si $a \neq 0$. Qu'en déduire ?
3. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $P(a) = 0$.
4. Que dire de $I = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(a) = 0\}$?
5. Soient $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $UV \in I$. Montrer que U ou V est dans I.
6. (*) On suppose $\mathcal{A}$ commutative.
   a. Soit $a \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{R}.1$. Montrer que $(1, a)$ est libre et $(1, a, a^2)$ est liée.
   b. Montrer l'existence de $i \in \mathcal{A}$ tel que $i^2 = -1$, puis que $\mathcal{A}$ est isomorphe (en tant qu'algèbre) à $\mathbb{C}$.