<u>Ex 1</u> : Trouver toutes les fonctions ϕ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x(\phi(x))^2 = 2\phi(x) - \dfrac{x}{x^2+1}$.

<u>Ex 2</u> : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a^n$.
2. On suppose f strictement décroissante. Montrer que le réel a du ***1*** est unique.
   On note a_n cet unique réel. Montrer que la suite (a_n) converge puis trouver sa limite.

<u>Ex 3</u> : Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.
Si $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que l'équation $f(x + \dfrac{1}{n}) = f(x)$ a au moins une racine x dans $[0; 1 - \dfrac{1}{n}]$. (On pourra introduire $g(x) = f(x + \dfrac{1}{n}) - f(x)$ et calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\tfrac{k}{n}\right)$).

<u>Ex 4</u> : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique et continue et $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+t) = f(x)$.

<u>Ex 5</u> : On définit, pour x réel, $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

1. Discuter la continuité de f.
2. On définit la suite (x_n) par $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Étudier la monotonie et la convergence de (x_n).

<u>Ex 6</u> : Résoudre les équations : ***1.*** $\operatorname{Arcsin} \dfrac{2x}{1+x^2} = \operatorname{Arctan} x$; ***2.*** $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \pi/2$.

<u>Ex 7</u> : Domaines de définition et simplification de : ***1.*** $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$; ***2.*** $\tan \operatorname{Arcsin} x$; ***3.*** $\left|\operatorname{Arctan} \operatorname{sh} x\right| - \operatorname{Arccos} \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

<u>Ex 8</u> : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto \ln(1 + \sqrt{1+x^n})$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et calculer ses dérivées successives en 0.

<u>Ex 9</u> : (*) Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f'' - 5f' + 6f \geq 0$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Montrer que :
$f(x) \geq 3\exp(2x) - 2\exp(3x)$ pour tout x positif.

<u>Ex 10</u> : Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = g(x^2)$.

<u>Ex 11</u> : (*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable telle que $ff^{(3)} = 0$.

1. Montrer que, si f' est strictement monotone sur un intervalle I, alors f prend une même valeur au plus deux fois sur I.
2. On pose $\Gamma = \{x \in I,\ f''(x) = 0\}$. Montrer que, si Γ est non vide, alors Γ n'est ni majoré, ni minoré.
3. Montrer que Γ est un intervalle et en déduire f.

<u>Ex 12</u> : Trouver les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.
Montrer que l'ensemble des solutions ne change pas si on ne suppose que f continue.

<u>Ex 13</u> : Soit $f \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, avec $0 < a < b$. On suppose de plus que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en c passe par 0.

<u>Ex 14</u> : (*) Soit $g \in \mathscr{C}^4([0;1], \mathbb{R})$ telle que $g(0) = g(1) = g'(0) = g'(1) = 0$.
Montrer que : $\forall x \in [0;1],\ \exists\, \xi \in]0;1[,\ g(x) = \dfrac{g^{(4)}(\xi)}{24} x^2(1-x)^2$.

Ex 15 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable ayant des limites finies égales en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Ex 16 : Soit $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) / \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = 0,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f'(x) - 1) = 0,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f''(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f^{(3)}(x) = 0\}$. Montrer que $(\mathcal{F}, \circ)$ a une structure de groupe.

Ex 17 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ avec I un intervalle ouvert non vide. On suppose que $a \in I$ est tel que $f(a) = a$ et $\left|f'(a)\right| < 1$.

1. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ et $k \in]0,1[$ tels que $]a-\eta; a+\eta[\subset I$ et $\left|f'(x)\right| \leqslant k$ pour tout $x \in]a-\eta; a+\eta[$.

2. En déduire que $|x-a| < \eta \Rightarrow \left|f(x) - a\right| \leqslant k|x-a|$.

3. Conclure que pour $u_0 \in]a-\eta; a+\eta[$, la suite de premier terme u_0 et satisfaisant à la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie et converge vers a.

Ex 18 : (*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, avec $k \in [0, 1[$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe.

2. Montrer que cela est faux lorsque l'on suppose seulement que :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x-y|$.

Ex 19 : On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Montrer que f est convexe.

En déduire que si les a_i et b_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont positifs alors : $\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k} + \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} b_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k + b_k)}$. (On pourra commencer par le cas où tous les a_i sont égaux à 1.)

Ex 20 : Soit f une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}_+^*$, croissante, mais non constante. Montrer que : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Ex 21 : Soit $f : [a; b] \to [c; d]$ croissante, convexe et bijective.
On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $a \leqslant u_0 \leqslant v_0 \leqslant b$ et les relations de récurrences (pour $n \in \mathbb{N}$) :
$u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = f^{-1}\left(\dfrac{f(u_n) + f(v_n)}{2}\right)$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Ex 22 : Soit f une fonction dérivable et concave sur $\mathbb{R}$ telle que f' soit strictement positive sur I. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a) = 0$. Soit $u_0 \in I$ tel que $u_0 \leq a$. On définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. Montrer que la suite (u_n) est majoré par a, puis montrer qu'elle converge vers a.

Ex 23 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a \in I$ qui n'est pas une borne de I.
Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en a.
En déduire que f est continue sauf éventuellement aux bornes de I.

Ex 24 : *1.* Pour $x, y, a, b > 0$, montrer que : $x \ln \dfrac{x}{a} + y \ln \dfrac{y}{b} \geqslant (x+y) \ln \dfrac{x+y}{a+b}$. *2.* Pour $a, b \geq 0$, avec $a + b = 1$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1 + x^a x^b \leq (1+x)^a (1+x)^b$.

Ex 25 : (*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ convexe. Montrer que : $0 \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \int_0^n f \leq \frac{1}{8}(f'(n) - f'(0))$.

Ex 26 : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on suppose que $D^2 f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, calculer $D^2 f(x)$.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a < b < c$ tels que $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Montrer qu'il existe $x \in]a, c[$ tel que $D^2 f(x) \leq 0$.

3. On suppose maintenant que : $\forall x \in \mathbb{R},\ D^2 f(x) \geq 0$.

   a. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a < b < c$ et P dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui coïncide avec f en a, b, c. Montrer que $P'' \geq 0$.

   b. Calculer P'' en fonction de $a, b, c, f(a), f(b)$ et $f(c)$. En déduire que f est convexe.