6-Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ex 1 : Diagonaliser sur $\mathbb{C}$, lorsque cela est possible, les matrices suivantes, avec a dans $\mathbb{C}^*$ et b, c, d, m et z dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 1 & 1/a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 & e \\ 0 & f & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ex 2 : Les matrices suivantes sont-elles diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{R}$?.

$$(*) \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}, \textbf{(CCP 69)} \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Ex 3 : Soit $a, b, a_1, ., ., a_n \in \mathbb{C}$. Diagonalisabilité et le spectre de : $[ij]_{1 \leq i,j \leq n}$, $[a+i+j]_{1 \leq i,j \leq n}$, $(a^{i+j-2})_{1 \leq i,j \leq n}$,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & (0) & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & \cdots & b & a \\ \vdots & \iddots & a & b \\ b & \iddots & \iddots & \vdots \\ a & b & \cdots & b \end{pmatrix}.$$

Ex 4 : Déterminer les polynômes minimaux des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ex 5 : Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Calculer $\det A$.

Ex 6 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et donner ses éléments propres.

2. Soit $D = diag(1, 2, -1)$. Déterminer l'ensemble des matrices N commutant avec D.

3. En déduire $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ MA = AM\}$, puis que $C(A) = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$.

Ex 7 : ***1.*** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Exprimer $tr(M)$ et $tr(M^2)$ en fonction des valeurs propres de M.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont $a_{ij} = 1$ si $i + j$ est pair, 0 sinon.

2. Montrer que A est diagonalisable.

3. On suppose n pair supérieur à 4. Montrer que A admet exactement deux valeurs propres distinctes que l'on déterminera.

4. Déterminer χ_A.

Ex 8 : **(CCP 70)** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$. Déterminer les éléments propres de B.

Ex 9 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. Diagonaliser A (donner $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$).

2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La matrice $\alpha A + \beta I_3$ est-elle diagonalisable ? Inversible ?

3. ***a.*** Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tel que $X^2 = A$. Montrer que $AX = XA$

b. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: $X^2 = A$ et $X^2 + X = A$. Même question dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 + X = A$.

Ex 10 : Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $(A - 2I_2)(A - 3I_2)^2 = 0$.

Ex 11 : *1.* Pour $A \in GL_n(\mathbb{C})$, donner une relation entre χ_A et $\chi_{A^{-1}}$.

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donner une relation entre χ_A et χ_{A^2} et χ_{-A}.

Ex 12 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $X^p \chi_{AB} = X^n \chi_{BA}$ (écrire $A = PJ_rQ$).

Ex 13 : Soit $M_n = [m_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ telle que : $\forall i, j$, $m_{i,j} = i$ si $i = j$, 1 sinon et $P_n = \chi_{M_n}$.

1. Montrer que pour $n \geq 2$, $P_{n+1} = (X - n)P_n - X(X-1)...(X-(n-1))$. On pourra effectuer les opérations $L_j \leftarrow L_j - L_{j-1}$, pour $j \geq 2$.

2. Par récurrence sur n, montrer que $\forall n \geq 2$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $(-1)^{n-k} P_n(k) > 0$.

3. Montrer que M_n admet exactement une valeur propre dans chaque intervalle $]1, 2[$, $]2, 3[$, ..., $]n-1, +\infty[$.

Ex 14 : (*) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $n \geqslant 1$ telle que $M^n = I_2$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

Ex 15 : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ distincts et $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, telles que $I_p = A + B$, $M = \lambda A + \mu B$, $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

1. Montrer que M est inversible et calculer son inverse (on pourra calculer M^2).

2. Exprimer A en fonction de M et I_p. Montrer que A et B sont des matrices de projecteur.

3. M est-elle diagonalisable ? Que dire de ses sous-espaces propres ?

Ex 16 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 + A^T = I_n$.

1. Justifier que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\operatorname{Sp} M = \operatorname{Sp} M^T$.

2. Montrer que A est inversible si et seulement si $1 \notin \operatorname{Sp} A$.

3. Montrer que $X^4 - 2X^2 + X$ annule A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Ex 17 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $P(M)$ soit inversible.

Ex 18 : Soit $A = \begin{pmatrix} (0) & & \alpha_{2n} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \alpha_1 & & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On note $(e_1, ..., e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $P_i = \text{Vect}(e_i, e_{2n-i+1})$. Montrer que f induit un endomorphisme sur P_i.

2. On note f_i l'endomorphisme induit sur P_i par f. Déterminer les éléments propres de f_i.

3. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Ex 19 : On note T l'espace vectoriel des matrices triangulaires inférieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Quelles sont les matrices de T qui sont diagonalisables ?

2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont des matrices diagonalisables. Déterminer l'intersection $F \cap T$. En déduire l'inégalité : $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. Prouver que le cas d'égalité peut être réalisé.

4. Montrer que toute matrice diagonalisable appartient à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n+1)/2$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.

Ex 20 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et (E) l'équation $AM = MB$.

1. On suppose que (E) admet une solution $M \neq 0$. Montrer que :
$\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)M = MP(B)$. puis que $Sp(A) \cap Sp(B) \neq \emptyset$.

2. Établir la réciproque.

Ex 21 : (*) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec B diagonalisable. On suppose que $AB^3 = B^3A$. Montrer que A et B commutent. Pour quels p, peut-on généraliser le résultat avec $AB^p = B^pA$?

Ex 22 : Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de B, puis déterminer si B est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres ainsi que leurs multiplicités.

Ex 23 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix}$. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$, puis que M est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Ex 24 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$.

a. Donner une relation entre χ_A et χ_B.

b. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$, $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(B)$ sont isomorphes.

c. Montrer que $\text{rg}\,(B - I_{2n}) = n$.

d. En déduire que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $A - I_n$ est inversible.

Ex 25 : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} aI_n & I_n \\ 0 & bI_n \end{pmatrix}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que M soit diagonalisable.

Ex 26 : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, un entier $n \geqslant 3$ et $A = \begin{pmatrix} & & & c \\ & (0) & & \vdots \\ & & & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{rg}(f) = 2$.
2. On suppose que $\mathrm{rg}(f) = 2$.
   a. Montrer que : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - a\lambda - (n-1)bc = 0$.
   b. Donner les expressions des valeurs propres de A.
   c. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Ex 27 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 - 3A + 4I_n = 0$. Déterminer le signe de $\det A$.

Ex 28 : Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit $A \otimes B \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ par blocs par : $A \otimes B = [a_{i,j}B]_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Soient $A, B, A', B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $(A \otimes B).(A' \otimes B') = (A.A') \otimes (B.B')$.
2. En déduire que $A \otimes B$ est inversible si et seulement si A et B le sont.
3. Déterminer $Sp(A \otimes B)$. En déduire $\chi_{A \otimes B}, tr(A \otimes B), \det(A \otimes B)$.
4. Soit X un vecteur propre de A et Y un vecteur propre de B. Construire un vecteur propre de Z de $A \otimes B$. Montrer que si A et B sont diagonalisables, alors $A \otimes B$ aussi.

Ex 29 : Soit $n \geq 2$. On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-2} & a_{n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_3 & a_4 & a_5 & . & . & . & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & . & . & . & a_n & a_1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^p pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.
2. Écrire A comme combinaison linéaire de $(J^p)_{0 \leq p \leq n-1}$.
3. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ non nul, on a : $Q(J) \neq 0$.
4. Quel est le degré du polynôme minimal Π_J de J ?
5. Calculer Π_J et χ_J.
6. Montrer que A est diagonalisable.

Ex 30 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, $x_0 \in E$ non nul et $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ non nulle. On définit u sur E par : $\forall x \in E,\ u(x) = x + \phi(x)x_0$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de u et déterminer le sous-espace propre associé.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable. Déterminer son spectre et ses valeurs propres.

Ex 31 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $a = (1, -1, 1)$. Calculer $f(a)$. Sans calculs, en déduire les éléments propres de f.
2. Déterminer les $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $f^3 = g^3$.

Ex 32 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $P(M) = A$.

Ex 33 : Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$. On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel stable par u non réduit à $\{0\}$.

1. Que dire du spectre de u ?

2. Montrer que, pour tout vecteur $x \neq 0_E$, $\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ est une base de E. Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?

Ex 34 : (*) On note $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient F, G deux polynômes de degrés $n+1$ et G est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. On considère f l'application de E dans E qui à P associe le reste de la division euclidienne de FP par G. Montrer que f est un endomorphisme diagonalisable.

Ex 35 : (*) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie autre que Id_E et $-Id_E$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par : $\varphi : f \mapsto \dfrac{1}{2}(f \circ s + s \circ f)$. Déterminer les éléments propres de φ.

Ex 36 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\Phi \ : \ P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \mapsto X(X+1)P' - \mu XP$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ si et seulement si $\mu = 2n$.

2. Dans ce cas, déterminer les valeurs propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ? Déterminer les espaces propres de Φ

3. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_k unitaire de degré k tel que $\Phi(P_k) = kP_k$.

4. Trouver les endomorphismes f tels que $f^2 = \Phi$.

Ex 37 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in GL(E)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang un. Montrer que $f + u$ est bijective si et seulement si $tr(u \circ f^{-1}) \neq -1$.

Ex 38 : *1.* Montrer qu'il existe $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P(X+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) \text{ (introduire } P \mapsto P(X+1)).$$

2. Soit $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$. Montrer que Δ est nilpotente.

3. En déduire $a_0, ..., a_{n-1}$.

Ex 39 : (*) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

a. $(Id_E, f, ..., f^{n-1})$ est une famille libre.

b. f possède n valeurs propres distinctes.

c. Il existe $v \in E$ tel que $(v, f(v), ..., f^{n-1}(v))$ soit une base de E.

Ex 40 : Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Soit $f \in E$ et on pose $\Phi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$ et $\Phi(f)(0) = f(0)$. Montrer que Φ est un endomorphisme de E et donner ses éléments propres.

Ex 41 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si : $\forall P \in \mathbb{C}[X], (P(A))^n = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$.

Ex 42 : Soit u un endomorphisme diagonalisable de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On appelle commutant de u, noté $\mathcal{C}(u)$, l'ensemble des endomorphismes v de E tels que $v \circ u = u \circ v$. Montrer que $\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} (\dim E_\lambda(u))^2$, puis que $\dim \mathcal{C}(u) \geq n$.

Ex 43 : (*) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(u)$ de multiplicité m. Montrer que $\dim(E_\lambda(u)) = m$ si et seulement si $E = E_\lambda(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u - \lambda Id_E)$.

Ex 44 : (*) Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $N^n = NM = 0$. On suppose de plus que M est trigonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M + N$ est trigonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 45 : (*) On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des suites bornées de $(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}}$.
On s'intéresse à l'endomorphisme T de $\mathbb{B}$ qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T.

2. Soit $S \subset \mathbb{B}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{B}$ de dimension finie stable par T. On note $\widetilde{T}$ l'endomorphisme induit par T sur S. Montrer que l'on dispose de $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ distincts tels que $S = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(\widetilde{T} - \lambda_i Id_S)$.

Ex 46 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u, d'ordre de multiplicité $m \geqslant 1$. On pose $v = u - \lambda \mathrm{id}_E$.

1. **a.** Montrer qu'il existe un polynôme P tel que : $E = \mathrm{Ker}(v^m) \oplus \mathrm{Ker}(P(u))$ et $E = \mathrm{Ker}(v^{m+1}) \oplus \mathrm{Ker}(P(u))$. En déduire que : $\mathrm{Ker}(v^m) = \mathrm{Ker}(v^{m+1})$.

b. Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(v^m) \oplus \mathrm{Im}\,(v^m)$.

2. On considère une autre valeur propre λ' de u, distincte de λ, d'ordre de multiplicité m'. On pose : $v' = (u - \lambda' \mathrm{id}_E)^{m'}$.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(v') \cap \mathrm{Ker}(v^m) = \{0_E\}$.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(v') \subset \mathrm{Im}\,(v^m)$.

Ex 47 : Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

2. Montrer que A est semblable à B.

3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ (résoudre d'abord $N^2 = B$).

Ex 48 : Factoriser (dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$) les polynômes :

1. $X^4 + X^2 + 1$;

2. $X^6 - 5X^4 + 19X^2 + 25$;

3. $X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$;

4. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$;

5. $\sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \sin(k\theta) X^k, \ \theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

Ex 49 : *1.* Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin((2n+1)\theta) = \sin(\theta) P_n(\sin^2(\theta))$.

2. Trouver les racines de P_n, puis montrer que $P_n = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{X}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)$.

Ex 50 : Factoriser $P = (1+X)^{2n} + (1-X)^{2n}$ et en déduire $\prod_{k=0}^{n-1} \tan^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{4n}\right)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \tan^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{4n}\right)$
