Ex 1 : Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ est dite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall p \geq N; \forall q \geq N : |x_p - x_q| \leq \varepsilon$.

1. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = \sup\{x_p,\ p \geq n\}$ et $b_n = \inf\{x_p,\ p \geq n\}$.
Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

3. En déduire que (x_n) converge vers un réel x.

Ex 2 : Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On pose $A+B = \{a+b \,|\, (a,b) \in A\times B\}$. Montrer que si A et B sont majorées, il en est de même de de $A+B$ et $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Ex 3 : Est-ce que les applications N définissent des normes sur les espaces suivants :

1. $N(x,y) = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; ***2.*** $N((x,y,z)) = \sqrt{2x^2+y^2+2z^2}$, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

3. (*) $N((x,y)) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty|$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (montrer que $N((x,y)) = \max\{|x|, |x+y|\}$) ;

4. $N(P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} |P(x)|e^{-x}dx$, pour $P \in \mathbb{K}[X]$ (montrer l'existence de N) ;

5. $N(f) = \sup\limits_{[0,1]} \left(\left| f'(t) + \dfrac{\sin(t^{2008})}{1+t^2} f(t) \right| \right)$, pour $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$;

6. $N(f) = \sup\limits_{g\in E, \|g\|_\infty = 1} |\displaystyle\int_0^1 fg|$, pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Ex 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ A \sup_{0\leq k\leq n} |P^{(k)}(0)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|P(x)|}{1+|x^n|} \leq B \sup_{0\leq k\leq n} |P^{(k)}(0)|.$$

Ex 5 : ***1.*** Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \|AB\| \ \leq \ k\|A\|\|B\|$.

2. Démontrer que, pour $n \geq 2$, il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|AB\| = \|BA\|$ pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Pour $n = 2$, constater que* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *sont semblables.*

Ex 6 : Soit E l'espace des fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et ϕ une forme linéaire positive non nulle ($f \geq 0 \Rightarrow \phi(f) \geq 0$). Soit $p_\phi :\ f \mapsto |\phi(f)| + \displaystyle\int_0^1 |f'|$. On note $p_0 : f \mapsto |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'|$.

1. Montrer que pour tout $f \in E$, on a : $|\phi(f)| \leqslant \phi(1) \cdot \|f\|_\infty$.

2. Montrer que p_0 et p_ϕ sont des normes et qu'elles sont équivalentes.

3. Montrer que ϕ est continue pour ces deux normes.

4. Déterminer $|||\phi|||$ pour la norme $\|.\|_\infty$

Ex 7 : (*) On note E l'ensemble des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E$, on pose $N_p(f) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |t^p e^{-|t|} f(t)|$.

1. Montrer que N_p est une norme.

2. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Étudier la continuité de $\Phi_c : f \mapsto f(c)$ définie sur E muni de la norme N_p.

3. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ distincts. Les normes N_p et N_q sont-elles équivalentes ?

Ex 8 : Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ s'annulant en 0. Pour f dans E, on pose $N(f) = \inf L(f)$, avec $L(f) = \{k \in \mathbb{R}_+;\ \forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|\}$.

1. Pour $f \in E$, montrer que $N(f) = \sup \left\{ \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y},\ x, y \in [0,1] \text{ et } x \neq y \right\}$.

2. Montrer que N existe bien et que c'est une norme sur E.

3. Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$. Montrer que : $\forall f \in F,\ \|f'\|_\infty = N(f)$.

Ex 9 : (*) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$. Existe-t-il une norme N telle que pour toute matrice B semblable à A, alors $N(A) = N(B)$.

Ex 10 : *1.* Soient (A_k) et (B_k) deux suites de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui convergent respectivement vers A et B. Montrer que (A_kB_k) converge vers AB.

2. Montrer que l'ensemble des matrices de projection est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ convergente, et l'on note L sa limite.

a. Montrer que L est une matrice de projection, qui commute avec A.

b. Si de plus A est antisymétrique, que dire de L ?

Ex 11 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $M^2 = 3M - 2I_N$ et M n'est pas une matrice d'homothétie.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \exists! \alpha_p, \beta_p \in \mathbb{K}\ M^p = \alpha_p M + \beta_p I_n$.

2. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \alpha_{p+2} = 3\alpha_{p+1} - 2\alpha_p$.

3. Exprimer M^p comme combinaison linéaire de M et I_n pour tout entier p.

4. En déduire $\exp(M)$.

Ex 12 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$. Montrer que si le degré du polynôme minimal de A vaut d, alors on peut choisir P dans $\mathbb{C}_{d-1}[X]$.

Ex 13 : Si $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,\ i \in [\![1, n]\!] \right\}$ et $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in Sp(A)\}$.

1. Montrer que $\|.\|$ est une norme.

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X = (x_1, ..., x_n)^T$ un vecteur propre associé. Montrer que $|\lambda||x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j|$ pour tout i. En déduire que $\rho(A) \leq \|A\|$.

3. *a.* Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul. Montrer que $\|XX^T\|$ est non nul.

b. Montrer que : $\rho(A) \leq \|A\|$.

4. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\rho(A^k) = (\rho(A))^k$.

5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Ex 14 : (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si e^A l'est. Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}$?

Ex 15 : Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
Résoudre l'équation $\exp(M) = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (on pourra réduire A au préalable).

Ex 16 : On note $\omega = e^{2i\pi/5}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & 1 & \omega \\ \omega^3 & \omega^4 & 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^4 & 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

Ex 17 : ***1.*** Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \det(M) = 1\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$. Montrer que : $\forall M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}),\ \|M\| \geqslant 1$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer $\exp\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Ex 18 : Soit $A = (a_0, \ldots, a_n)$ dans $\mathbb{N}^{n+1}$ avec $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$. On définit pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $\|P\|_A = \sum_{k=0}^{n} |P(a_k)|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_A$ est une norme.

2. Pour P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer qu'il existe une unique famille $(b_0, \ldots, b_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que $X^n + P = \sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{j \neq k} (X - a_j)$.

3. Calculer $\sum_{k=0}^{n} b_k$.

4. Montrer que $\prod_{j \neq k} |a_k - a_j| \geqslant \dfrac{n!}{\binom{n}{k}}$

5. En déduire $d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]) \geqslant \dfrac{n!}{2^n}$.

6. Calculer $d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X])$ dans le cas où $A = (0, 1, \ldots, n)$.

Ex 19 : Préciser la nature des sous–ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants (ouvert, fermé, ou aucun des deux). Dessiner ces sous–ensembles dans le plan. Déterminer leur frontière et adhérence.

1. $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$;
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 1\}$;
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 < y^2 + 7\}$;
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \leq 7 - 2y^2\}$;
5. $[0, 1[\times \mathbb{R}$;
6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq y + 1 > x^3\}$;
7. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq y + 7 > x^2\}$;
8. $\{(t, 1/t),\ t \in \mathbb{R}^*\}$;
9. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + 1) < 0\}$.

Ex 20 : Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant deux racines réelles distinctes est un ouvert de $\mathbb{R}_2[X]$.

Ex 21 : Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), U = \{f \in E \ / \ f(1) > 0\}$ et $F = \{f \in E \ / \ \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0\}$.

1. Montrer que U est ouvert pour $\|.\|_\infty$.

2. Montrer que F est fermé pour $\|\cdot\|_\infty$ puis pour $\|.\|_1$.

3. U est-il ouvert pour $\|\cdot\|_1$?

Ex 22 : (*) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées. On pose la norme $N_\infty(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

1. Soit $Z = \{u \in E / \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ u_n = 0\}$. Montrer que $\mathring{Z} = \emptyset$. Que vaut $\overline{Z}$?

2. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble des suites à valeurs strictement positives.

Ex 23 : On note A_n l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. On note B_n l'ensemble des matrices $M = [m_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est $\displaystyle\prod_{i=1}^n (X - m_{i,i})$.

1. ***a.*** Soit $P = a\displaystyle\prod_{i=1}^n (X - a_i)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $a_1 < .. < a_n$ des réels. Soit $b_0, ..., b_n$ des réels tels que $b_0 < a_1 < b_1 < a_2 ... < b_{n-1} < a_n < b_n$. Montrer que l'application $\psi : Q \mapsto (Q(b_0), ..., Q(b_n))$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ est continue.

b. Pour Q proche de P, montrer que $Q(b_0), ..., Q(b_n)$ et $P(b_0), ..., P(b_n)$ on respectivement le même signe.

c. En déduire que l'ensemble des polynômes scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

d. Montrer que A_n est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que B_n est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 24 : Soit E est un espace vectoriel normé et C une partie convexe de E. Montrer que $\mathring{C}$ est aussi convexe.

Ex 25 : Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé et $A + B = \{a + b, \ a \in A, b \in B\}$.

1. On suppose A ouverte. Montrer que $A + B$ est ouverte.

2. Si A et B sont fermées, a-t-on forcément $A + B$ fermée ?

Ex 26 : (*) Soit $E = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \ \exists n \in \mathbb{N}^*, \ A^n = I_2\}$ et $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \ Sp(A) \subset \mathbb{U}\}$.

1. Soit $M \in F$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $|\lambda| \neq 1$. Montrer que $|\chi_M(\lambda)| \geq ||\lambda| - 1|^2$.

2. En déduire que F est fermé.

3. Montrer que $E \subset F$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} = \alpha$. En déduire que : $F \subset \overline{E}$.

5. Montrer que E est dense dans F.

Ex 27 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. En précisant une norme sur $\mathcal{L}(E)$, montrer que l'ensemble des projecteurs de $\mathcal{L}(E)$ est un fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Ex 28 : **(CCP 44)** Soient E un espace vectoriel normé, et A, B des parties non vides de E.

1. Montrer que : $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
3. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ et que l'on a pas forcément $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Ex 29 : 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire (coefficient dominant qui vaut un) et de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |Im(z)|^n$.

2. Montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 30 : On suppose que les espaces vectoriels normés E et F sont de dimension finie, et on donne $f : E \to F$ continue. On considère le graphe de f, $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}$. Montrer que Γ est fermé dans $E \times F$.

Ex 31 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé E. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $A_p = \{u_n,\ n \geq p\}$.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\displaystyle\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$.
2. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fermé dans E.

Ex 32 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant \|x\|$ et $V_n \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$.

1. **a.** Soit $a \in E$, montrer que : $\dfrac{1}{n+1}\|u^{n+1}(a) - a\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   b. Exprimer $V_n \circ (u - \mathrm{Id}_E)$ en fonction de u^{n+1}.
   c. Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.
2. Si E est de dimension finie, montrer que : $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = E$.
3. Dans le cas général, on suppose $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ supplémentaires ; soit p le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$.
   Pour tout $x \in E$, exprimer $p(x)$ à l'aide des vecteurs $V_n(x)$.

Ex 33 : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et soient u, v deux vecteurs de E. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de E vérifiant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = u$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = v$ et telles que u_n est colinéaire à v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u et v sont colinéaires.

Ex 34 : Les fonctions suivantes ont-elles une limite lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$?

$$f_1(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2},\ f_2(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\ f_3(x,y) = \frac{\sin(x)\sin(y)(\sin(xy)}{x^2+y^2},\ f_4(x,y) = x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),$$

$$f_5(x,y) = \frac{\mathrm{sh}\,(x)\,\mathrm{sh}\,(y)}{x+y},\ f_6(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2},\ f_7(x,y) = \frac{x^4+y^2}{xy},\ f_8(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{y^2},\ f_9(x,y) = \frac{\sin(x)-\sin(y)}{\mathrm{sh}\,(x) - \mathrm{sh}\,(y)}.$$

Ex 35 : Dans chacun des cas suivants, la fonction f, est-elle continue sur son ensemble de définition ?

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1+x^2+y^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1+x^2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{2} - 1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ -1/2 & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

4. $f(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \geq y^2 \\ \dfrac{2x}{y} & \text{si } (|x| \leq y^2 \text{ et } y \neq 0) \\ -2y & \text{si } x \leq -y^2 \end{cases}$

5. $f(x,y) = y^x$

6. $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \dfrac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

7. $f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| > y \\ y^2 & \text{si } |x| \leqslant y \end{cases}$

8. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\text{ch}\,(xy) - \cos(xy)}{x^2y^2} & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

9. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ex 36 : Soit (E,N) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Pour tout x de E, on pose $g(x) = \dfrac{x}{1+N(x)}$.

1. Montrer que g définit une bijection de E dans la boule ouverte $\mathcal{B}(0,1)$.
2. Montrer que g et g^{-1} sont continues.
3. Montrer que g est lipshitzienne.

Ex 37 : Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de $\|.\|_\infty$. Pour $f \in E$, on pose $L(f) : t \mapsto \displaystyle\int_0^1 (t+u)f(u)du$.

Montrer que L est un endomorphisme continu de E, puis montrer que $|||L||| = 3/2$.

Ex 38 : Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$, on pose la norme $\|P\| = \displaystyle\max_{0\leq k\leq n} |a_k|$ sur $\mathbb{C}[X]$.

On pose $u : P \mapsto XP$ et la forme linéaire $\varphi : P \mapsto P(z_0)$, définies sur $\mathbb{C}[X]$ avec $z_0 \in C$.
Étudier la continuité de u et φ, puis déterminer $|||u|||$ et $|||\varphi|||$ dans les cas continus.

Ex 39 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|\displaystyle\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$. Est-ce que l'application ψ : $(E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto AP$, où A est un élément fixé de E, est continue sur E ?

Ex 40 : (*) Soient $E = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$ muni de $\|.\|_\infty$ et $\varphi : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases}$

Montrer que φ est bien définie, continue et calculer sa norme.

Ex 41 : Soient $a \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b$ et $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe un unique $P_f \in E_n$ tel que : $\forall i \in [\![0,n]\!],\ f(x_i) = P_f(x_i)$.
2. Montrer que $\varphi : \begin{cases} E & \to & E_n \\ f & \mapsto & P_f \end{cases}$ est application linéaire continue (choisir une norme sur E_n).
3. **a.** Soit $f \in E$. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists Q_p \in E_n,\ d(f,E_n) \leq \|f - Q_p\|_\infty \leq d(f,E_n) + 1/p$.
   b. En déduire qu'il existe $Q \in E_n$ tel que $d(f,E_n) = \|f - Q\|_\infty$.

Ex 42 : (*) Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $CD = DC$. Montrer que $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

Ex 43 : Montrer que la fonction inverse n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$, mais qu'elle l'est sur tout intervalle $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$.

Ex 44 : Soit E un espace vectoriel normé. Pour tout compact K, on note $\delta(K)$ le diamètre de K : $\delta(K) = \max\limits_{x,y \in K} \|x - y\|$.

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts non vides telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ K_{n+1} \subset K_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(K_n) = 0$.

1. Montrer que $\delta(K)$ est bien défini.

2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{x\}$.

Ex 45 : Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie.

Soient K un compact de E et $f : K \to F$ une application continue injective.

On pose $L = f(K)$. Montrer que $f^{-1} : L \to K$ est continue.

Ex 46 : (*) Soient E et F deux espaces vectoriels normés réels de dimension finie et $f : E \to F$ continue. On dit que f est propre si pour tout compact K de F, $f^{-1}(F)$ est un compact de E.

1. Montrer que si f est propre et A est un fermé de E, alors $f(A)$ est un fermé de F.

2. Montrer que f est propre si et seulement si $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} = \|f(x)\| = +\infty$.

Ex 47 : Soit K un compact de $\mathbb{C}$, avec $K \subset \Omega = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Montrer qu'il existe r dans $[0, 1[$ tel que : $K \subset \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq r\}$.

Ex 48 : (*) *1.* Montrer que $P \mapsto ||P||$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$, avec $||P|| = \sup\{|P(z)|/z \in \mathbb{U}\}$.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $|P(0)| \leq ||P||$ (considérer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} P(e^{ix})dx$).

3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.

a. Montrer qu'il existe $(q, c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}^*$ tel que $P(z_0 + re^{i\theta}) - P(z_0) \sim cr^q e^{iq\theta}$ quand $r \to 0$.

b. En déduire que si $|P(z_0)| > 0$, alors il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z)| < |P(z_0)|$.

c. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que si $|z| > R$, alors $|P(z)| > |P(0)| + 1$.

d. Montrer qu'il existe $z_0 \in \overline{D}(0, R)$ tel que : $|P(z_0)| = \inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$.

e. En déduire le théorème de D'Alembert-Gauss.

Ex 49 : (*) On considère (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie et K un compact de E. On note $\mathcal{L}_K = \{f \in \mathcal{L}(E) | f(K) \subset K\}$. Si K est d'intérieur non vide, montrer que $\mathcal{L}_K$ est compact.

Ex 50 : On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\|.\|$. Montrer qu'il existe a, b dans $\mathbb{R}$ tels que :
$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ a\|X\|^2 \leq X^T AX \leq b\|X\|^2$ et qu'il existe X_1 et X_2 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $a = X_1^T AX_1$ et $b = X_2^T AX_2$ (on pourra commencer par travailler sur $\mathcal{S} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|X\| = 1\}$).

Ex 51 : Soient $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{U}$ et non constante.

1. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{U}$ et atteint sa borne supérieure M et inférieure m.

2. Montrer que f prend au moins deux fois toute valeur y de $]m, M[$.

Ex 52 : (*) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ tel que pour tout $g \in G$, il existe un voisinage V de g dans $\mathbb{C}^*$ tel que : $V \cap G = \{g\}$.

1. Montrer que pour tout compact K de $\mathbb{C}^*$, l'ensemble $G \cap K$ est fini.

2. Montrer que $G \cap \mathbb{U}$ est un groupe cyclique.

Ex 53 : (*) Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et S la sphère unité. Soir $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $N^*(A) = \sup\{tr(AB),\ B \in S\}$.

1. Montrer que N^* est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer qu'il existe $A_0 \in S$ tel que : $\det(A_0) = \max\limits_{X \in S} \det(X)$ et que $\det(A_0) > 0$.

3. **a.** Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \det(A_0 + tB) \leq (1 + tN(B))^n \det(A_0)$.

b. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\det(A_0 + tB) = \det(A_0)(1 + t \times tr(A_0^{-1}B)) + o_{t \to 0^+}(t)$.

c. En déduire que $N^*(A_0^{-1}) = n$.

Ex 54 : Soit K une partie compacte de E et $f : K \to K$ une application telle que : $\forall x, y \in K,\ x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

1. Soit $g : x \mapsto \|f(x) - x\|$. Montrer que g admet un minimum atteint en α.

2. Montrer que si : $g(\alpha) \neq 0$, alors : $g(f(\alpha)) < g(\alpha)$.

3. En déduire que f admet un unique point fixe α

4. Soit $x_0 \in K$. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$.

a. Montrer que la suite $(\|x_n - \alpha\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

b. Montrer que α est la seule valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c. Que peut-on conclure ?

Ex 55 : (*) Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que : $\forall x \in E, \exists y \in F,\ d(x, F) = \|y - x\|$.

2. On suppose $F \neq E$. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.

3. En déduire que $\overline{B}(0, 1)$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Ex 56 : Soient C une partie convexe d'un espace vectoriel normé réel et D une partie de E telle que : $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.

Ex 57 : Soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles connexes par arcs d'un espace vectoriel normé E. Si $A_1 \cap A_2$ est non vide, montrer que $A_1 \cup A_2$ est connexe par arcs.

Ex 58 : *1.* Montrer que les composantes connexes par arcs d'un ouverts sont ouvertes.

2. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux.

Ex 59 : Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{U}$ dans $[0, 1]$.

Ex 60 : *1.* Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ est connexe par arcs.

2. Soit T une matrice complexe triangulaire et inversible. Montrer que T peut être reliée à I_n par un chemin continu à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$.

3. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
