8-Suites et séries de fonctions

Ex 1 : Étudier la convergence simple des suites (f_n) et préciser la limite éventuelle.

1. $f_n(x) = n^2 \ln\left(\cos\dfrac{x}{n}\right)$ sur $\mathbb{R}$;

2. $f_n(x) = \min(x, n)$ sur $\mathbb{R}_+$;

3. $f_n(x) = \dfrac{nx^{2n}}{1+x^{2n}}$ sur $[0,1]$;

4. $f_n(x) = n\left(f\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right)$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ex 2 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites (f_n) :

1. $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{1+nx^2}$ sur $\mathbb{R}$;

2. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{n+x}$ sur $\mathbb{R}_+$;

3. $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ sur $\mathbb{R}$;

4. $f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$ sur $[0,1]$;

5. $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{1+nx}$ sur $\mathbb{R}_+$;

6. $f_n(x) = \cos\left[(1+1/n)\,x\right]$ sur $\mathbb{R}$;

7. $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}$;

8. (*) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$;

9. $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si} \quad x \in [0,n] \\ 0 & \text{si} \quad x > n \end{cases}$.

Ex 3 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in [0,\pi/2] \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n).

2. ***a.*** La suite converge-t-elle uniformément sur $[0,\pi/2]$? (considérer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t$)

b. Soit $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, La suite converge-t-elle uniformément sur $[\alpha, \pi/2]$?

3. (*) Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,\pi/2],\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(t)g(t)\mathrm{d}t = g(0)$.

(utiliser $\left|\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left[f_n(t)g(t) - f_n(t)g(0) + f_n(t)g(0)\right]\mathrm{d}t - g(0)\right|$)

Ex 4 : **(CCP 11)** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ et on pose : $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

2. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a;+\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 5 : On définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ en posant $f_0 = 1$ et si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f_n(t-t^2)dt$.

1. Montrer que les f_n sont polynomiales.

2. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f et : $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq e^x$.

3. Montrer que $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement sur $[0,1/2]$, puis que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur cet intervalle.

4. Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, que dire de $f_n(x) + f_n(1-x)$? Qu'en déduit-on sur f ?

5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

Ex 6 : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On pose $u_n(x) = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^x}\right)$.

1. Montrer que, si $x > 0$, la suite $(u_n(x))_{n\geq 2}$ converge. On note $u(x)$ sa limite. Quelle est la valeur de $u(x)$ lorsque x est dans $]0,1]$?

2. Montrer que u est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 7 : **1.** Montrer que toute application continue f définie sur le segment $[0,1]$ et telle que $f(0)=0$ peut être approchée uniformément par une suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_n$ sur $[0,1]$ avec $Q_n(0)=0$.

2. Soit $F=\left\{f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\mid \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\right\}$ et $G=\mathrm{Vect}(x\mapsto \mathrm{e}^{-nx}, n\in\mathbb{N}^*)$. Montrer que G est dense dans F.

Ex 8 : Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $f_n : x\mapsto x(1+n^\alpha e^{-nx})$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx$.

Ex 9 : **(CCP 27)** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et on pose $f_n(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

2. Soit $a\in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?

3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex 10 : Déterminer de ces intégrales leur limite quand n tend vers $+\infty$.

1. $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx\right)$;

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{e^t+t^n}$;

3. $\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{\sqrt{1-t^3}}dt$;

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)+x^ne^{-x}}dx$;

5. $\displaystyle\int_0^1\frac{t^n-t^{2n}}{1-t}dt$;

6. $\displaystyle\int_0^1\frac{n}{\sqrt{t}}\ln\left(1+\frac{1}{nt}\right)dt$;

7. $\displaystyle\int_0^1\ln(x)\ln(1-x^n)dx$;

8. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+2x}}}}}_{n\text{ racines}}}$;

9. $\displaystyle\int_0^1\frac{1+nx}{(1+x)^n}dx$;

10. $\displaystyle\int_0^1 4^nx^n(1-x)^ndx$;

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)}dx$;

12. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{1+nt+t^2}dt$;

13. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^n(x)}{\cos(x)}dx$;

14. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{n\cos t}{1+n^2t^2}dt$;

15. $\displaystyle\int_0^1 t^{(t^n)}dt$;

16. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^n)^{n+\frac{1}{n}}}$.

Ex 11 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies par $f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{\lfloor x\rfloor}{n}\right)^n & \text{si } 1\le x<n+1\\ 0 & \text{si } x\ge n+1\end{cases}$

1. Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty}f_n$.

2. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soit f sa limite.

3. Montrer que f est intégrable sur I et calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty}f$.

4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^n\left(1-\frac{k}{n}\right)^n=\frac{1}{e-1}$.

Ex 12 : $\displaystyle\int_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{x^n + (1-x)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{8}\frac{2^n}{n}$. Utiliser le changement de variable $x = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{t}{n})$.

Ex 13 : Justifier l'existence pour $n \geq 1$ et donner un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$.

Ex 14 : (CCP 17) Soient $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur A.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. A-t-on convergence uniforme ?

Ex 15 : Pour chacune des séries de fonctions $\sum f_n$ ci-dessous, déterminer le domaine de convergence simple. Déterminer si on a convergence normale sur ce domaine. Sinon, étudier la convergence normale sur tout segment inclus dans le domaine de définition.

1. $\displaystyle\sum \frac{\sin(nx)}{1 + nx^8 + 4x^2 + n^2}$;

2. $\displaystyle\sum \frac{\ln(1+x)}{n^2 x}$;

3. $\displaystyle\sum \frac{\sin(x/n)}{n}$;

4. $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{nx^2 + n}$ sur $\mathbb{R}_+$ (préciser la convergence uniforme) ;

5. $\displaystyle\sum \frac{x + nx^2}{1 + n^4 x^4}$;

6. $\displaystyle\sum x^a (1-x)^{nb} n^c,\ a, b, c > 0$;

7. $\displaystyle\sum n^\alpha x^n (1-x),\ \alpha \in \mathbb{R}$; (étudier la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$) ;

8. $\displaystyle\sum n x^\alpha e^{-nx^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$; (étudier la convergence uniforme sur $]0, 1[$) ;

9. $\displaystyle\sum \frac{x^n e^{-x}}{n!}$;

10. $\displaystyle\sum \frac{n^2 + x}{n^4 + x^2}$;

11. $\displaystyle\sum \frac{x}{n^3 + x^3}$ sur $\mathbb{R}_+$;

12. $\displaystyle\sum \frac{x}{(1 + n^2 x)^2}$ (sur $\mathbb{R}_+$).

Ex 16 : Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0 , Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $u_n(t) = a_n(1-t)t^n$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge normalement.

3. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Ex 17 : Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$

Ex 18 : Montrer que $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k^3}$ est deux fois dérivable à droite de -1.

Ex 19 : Montrer que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{x}{k}\right)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 20 : Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, avec $u_n(x) = \dfrac{1}{n}(\cos x)^n \sin(nx)$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de période π.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$. Calculer f sur cet intervalle. La fonction f est-elle continue en 0 ? en π ?

Ex 21 : Étudier la continuité et la dérivabilité des séries de fonctions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} xe^{-n^2x}$ sur $\mathbb{R}_+$; *2.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\lfloor n\pi\rfloor^x}-\frac{1}{(n\pi)^x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$: *3.* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+$; *4.* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\text{Arctan}\,(nx)}{n^2}$.

Ex 22 : (*) *1.* Montrer que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n(x)=\dfrac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)}$ est une suite convergente, pour $x\in\mathbb{R}_+^*$ (on pourra étudier $\sum(\ln(u_n)-\ln(u_{n-1}))$.

2. On note Γ la limite simple de cette suite de fonctions. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 23 : Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $v_n(x)=n^xe^{-nx}$. Soit $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}v_n(x)$.

1. Donner l'ensemble de définition de S et montrer que S est continue sur celui-ci.

2. Donner la limite de S en $+\infty$.

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}v_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

4. S est-elle dérivable sur $]0,+\infty[$?

Ex 24 : Soit $f : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+n^2x}$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{0^+}f$ et un équivalent en 0.

Ex 25 : Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $f_n(x)=\dfrac{1}{(n+x)^{3/2}+(n+x)^{1/2}}$ et on note $f=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$.

1. Quel est le domaine de définition de f et montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Quelle est la limite de f en $+\infty$, puis montrer qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)\sim_{x\to+\infty}\dfrac{a}{x^b}$.

Ex 26 : Pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{x+n}$ et $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ 2f(x)=\dfrac{1}{x}+\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$.

3. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ et en 0^+.

4. Montrer que $f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}dt$.

Ex 27 : Soient $\alpha\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $\beta\in]1,+\infty[$. Soit $f : t\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi\alpha^nt)}{\beta^n}$.

1. Montrer que f est définie et continue. Si $\alpha<\beta$, montrer que f dérivable.

2. (*) On suppose $\alpha\geq\beta$. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Ex 28 : Soit $u_n : x \mapsto \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement, mais pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Montrer que S est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Donner une relation liant $S(x)$ et $S(x+1)$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

4. Déterminer un équivalent de S en 0 et en $+\infty$.

5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ S(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)n!}$.

Ex 29 : On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(n)}{1+xn^2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Trouver la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis la forme d'un équivalent.

3. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)\sqrt{x}}{1+xt^2} dt$ est équivalente à $-\frac{\pi}{4}\ln(x)$ quand x tend vers 0.

4. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Ex 30 : *1.* Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$. On note S sa somme.

2. La série de fonctions considérée converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$? Uniformément ?

3. Montrer que sa somme est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa limite en $+\infty$.

4. Résoudre $y' - y = -\frac{e^x}{e^x+1}$ sur $]0, +\infty[$.

5. En déduire l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

Ex 31 : Montrer les égalités suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{t(\ln t)^2}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)^3}$;

2. $\int_0^1 t^t dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$;

3. $\int_0^1 \frac{t^a}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$;

4. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \frac{\pi^2}{6}$;

5. $\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$;

6. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$;

7. $\int_0^1 \frac{x^p}{2+x} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+p+1)2^n}$, $p \in \mathbb{N}$, puis valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+4)2^n}$;

8. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

Ex 32 : *1.* Soit $f : x \mapsto \frac{x^2\ln(x)}{x-1}$ définie sur $]0,1[$. Montrer que f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On notera encore f le prolongement ainsi obtenu.

2. Montrer que la suite de terme général $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ converge vers 0.

3. Trouver un équivalent de I_n.

4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 x^n f(x^n) dx = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Ex 33 : Soit θ un réel non congru à 0 modulo 2π.

1. Démontrer que : $Re\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx\right) = -\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$.

2. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 e^{i(n+1)\theta}x^n dx = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}dx$.

3. Conclure que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$.

Ex 34 : (*) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $t \in [0,T]$, soit $\varphi_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^T f(u)e^{-kn(t-u)}du$. Justifier l'existence de $\varphi_n(t)$.

2. Étudier la convergence simple de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On suppose que la suite $\left(\displaystyle\int_0^T f(u)e^{nu}du\right)_{n\geq 0}$ est bornée. Montrer que f est la fonction nulle.

Ex 35 : (*) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et que f'' soit intégrable.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f(x+n+1) - f(x+n) - f'(x+n)| \leq \displaystyle\int_{x+n}^{x+n+1} |f''|$.

3. Montrer que : $\sum f'(x+n)$ converge uniformément et étudier $\sum f(x+n)$.

Ex 36 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$.

1. A-t-on la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n}$ sur $]0,2\pi[$?

2. Soit $x \in]0,2\pi[$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sin(x/2)}$.

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \in]0,2\pi[,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos(nx)}{n} = \sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)S_n(x) + \frac{S_n(x)}{N} - 1$.

4. Soit $a \in]0,\pi[$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n}$ converge uniformément sur $]a, 2\pi - a[$.

Ex 37 : (*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+^*)$ croissante telle que : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x}$, avec $a > 0$.

1. Trouver un équivalent de $\ln(f(x))$ quand x tend vers $+\infty$.

2. Donner le domaine de définition de $u : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)e^{-nx}$. Déterminer les limites de u aux bornes de son domaine de définition.

3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{C}{x}f(1/x)$.