1 Analyse asymptotique

Définition 1.0.1 ($o, O, \sim$) *1. $f = O_a(g)$ si f/g est bornée au voisinage de a.*

2. $f = o_a(g)$ si $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

3. $f \sim_a (g)$ si $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Proposition 1.0.1 (Formule de Taylor-Young) *Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^n$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{x\to a}((x-a)^n) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_{x\to a}((x-a)^n);$$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{h\to 0}(h^n) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o_{h\to 0}(h^n).$$

Proposition 1.0.2 (Développements limités usuels)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

2 Intégrales généralisées

Définition 2.0.1 (Intégrales impropres) *On a :* $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$

1. $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ *cpm, alors* $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{X \to b^-} \int_a^X f$*, puis* $\displaystyle\lim_{y \to b^-} \int_y^b f = 0$
2. $f :]a, b] \to \mathbb{K}$ *cpm, alors* $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{X \to a^+} \int_X^b f$*, puis* $\displaystyle\lim_{y \to a^+} \int_a^y f = 0.$

Proposition 2.0.1 (Intégrale impropre d'une fonction prolongeable par continuité) *Soit* $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ *cpm, avec* $a < b$ *dans* $\mathbb{R}$*. Si* $\displaystyle\lim_{x \to b^-} f(x) = \ell$ *est un réel, alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *converge.*

Proposition 2.0.2 (Intégrales de référence) *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

1. ***Intégrales de Riemann sur*** $[1, +\infty[$ *:* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$*.*
2. ***Intégrales de Riemann sur*** $]0, 1]$ *:* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$*.*
3. ***Intégrales de Riemann sur*** $]a, b]$***,*** $b \in \mathbb{R}$ *:* $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$*.*
4. ***Intégrales de Riemann sur*** $[a, b[$***,*** $b \in \mathbb{R}$ *:* $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{|t-b|^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$*.*
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ *converge si et seulement si :* $\alpha > 0$*.*

Proposition 2.0.3 (Primitive d'une fonction continue) *Soit* $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ *et* $a \in I$*. Pour tout* $x \in I$*, on pose* $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$*. Alors* F_a *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et :* $\forall x \in I,\ F_a'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$*.*

Exemple 2.0.1

1. *Une primitive de* $f'f^\alpha$ *est* $\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ *si* $\alpha \neq -1$ *et* $\ln|f|$ *si* $\alpha = -1$*.*
2. *Dériver* $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\, dt$*.*

3 Intégrale d'une fonction positive

Proposition 3.0.1 (Intégrale nulle d'une fonction positive et continue) *Soit* f *une fonction continue et positive sur* I*. Si* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *converge et* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$*, alors* f *est la fonction nulle sur* I*.*

Exemple 3.0.1 *Sert à montrer la séparation du produit scalaire* $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_I fg$ *sur* $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$*.*

Proposition 3.0.2 (Intégrabilité d'une fonction positive)

1. *Soit* f *continue par morceaux sur* $[a, b[$*, où* $-\infty < a < b \leq +\infty$ *et à valeurs réelles positives.*

   La fonction $F : \begin{cases} [a, b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{cases}$ *est croissante et l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est alors convergente si et seulement si* F *est majoré.*

   Si cela n'est pas vérifié, alors $\displaystyle\lim_{x \to b^-} F(x) = +\infty$ *et on note* $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$*.*

2. *Soit f continue par morceaux sur $]a,b]$, où $-\infty \leq a < b < +\infty$ et à valeurs réelles positives.*
   La fonction $F : \left\{ \begin{array}{ccc}]a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)dt \end{array} \right.$ *est décroissante et l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est alors convergente si et seulement si F est majorée.*
   Si cela n'est pas vérifié, alors $\displaystyle\lim_{x\to a^+} F(x) = +\infty$ *et on note* $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$.

4 Absolue convergence

Définition 4.0.1 (Absolue convergence) *Soit f continue par morceaux sur I (un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b[$, ou $[a,b[$, ou $]a,b]$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) à valeur dans $\mathbb{K}$.*
L'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)dt$ *est dite absolument convergente lorsque l'intégrale* $\displaystyle\int_I |f(t)|dt$ *est convergente.*
Dans ce cas, on dit que f est intégrable sur I.
On note $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et intégrables sur I.

Proposition 4.0.1 (L'absolue convergence implique la convergence et inégalité triangulaire) *Soit f continue par morceaux sur I (un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b[$, ou $[a,b[$, ou $]a,b]$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) à valeur dans $\mathbb{K}$.*
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est absolument convergente, alors elle est convergente, et l'on a :* $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Proposition 4.0.2 (Critères de comparaison pour l'absolue convergence)

1. *Soient f et g continues par morceaux sur $[a,b[$, où $-\infty < a < b \leq +\infty$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
   (a) *si $|f| \leq |g|$ ou $f(x) = O_{x\to b}(g(x))$ ou $f(x) = o_{x\to b}(g(x))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,b[$ implique celle de f sur $[a,b[$.*
   (b) *si $|f| \leq |g|$ ou $f(x) = O_{x\to b}(g(x))$ ou $f(x) = o_{x\to b}(g(x))$, alors la non intégrabilité de f sur $[a,b[$ implique celle de g sur $[a,b[$.*
   (c) *si $f(x) \sim_{x\to b} g(x)$, alors l'intégrabilité de f sur $[a,b[$ est équivalente à celle de g sur $[a,b[$.*
2. *Pour f et g continue par morceaux sur $]a,b]$, où $-\infty \leq a < b < +\infty$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, on a le même type de résultats par des comparaisons au voisinage de a.*

Proposition 4.0.3 (Intégration des relations de comparaison) *Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.*

1. *Soient $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{R})$ positive.*
   (a) *On suppose g intégrable sur $[a,b[$. Si $f(x) = O_{x\to b}(g(x))$ (resp. $f(x) = o_{x\to b^-}(g(x))$), alors :* $\displaystyle\int_x^b f = O_{x\to b^-}\left(\int_x^b g\right)$ *(resp.* $\displaystyle\int_x^b f = o_{x\to b}\left(\int_x^b g\right)$*).*
   (b) *On suppose g non intégrable sur $[a,b[$. Si $f(x) = O_{x\to b}(g(x))$ (resp. $f(x) = o_{x\to b^-}(g(x))$), alors :* $\displaystyle\int_a^x f = O_{x\to b^-}\left(\int_a^x g\right)$ *(resp.* $\displaystyle\int_a^x f = o_{x\to b}\left(\int_a^x g\right)$*).*
2. *Soient $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{R})$ positive.*
   (a) *On suppose g intégrable sur $[a,b[$. Si $f(x) \sim_{x\to b^-} g(x)$, alors :* $\displaystyle\int_x^b f \sim_{x\to b^-} \int_x^b g$.
   (b) *On suppose g non intégrable sur $[a,b[$. Si $f(x) \sim_{x\to b^-} g(x)$, alors :* $\displaystyle\int_a^x f \sim_{x\to b^-} \int_a^x g$.
3. *Pour f et g continue par morceaux sur $]a,b]$, où $-\infty \leq a < b < +\infty$, on a les mêmes types de résultats par des comparaisons au voisinage de a.*

Exemple 4.0.1 $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{\mathrm{Arcsin}\,(t)}dt \sim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t}dt = -\ln(x).$

5 Méthodes pour montrer la convergence d'une intégrale

Dans l'ordre :

1. Vérifier que f est continue par morceaux sur I d'extrémité a et b.
   Ensuite identifier les bornes qui posent un problème (bornes infinies ou bornes où f n'est pas définie).
2. Regarder si f peut se prolonger par continuité aux bornes finies où elle n'est pas définie. Dans ce cas il n'y a plus de problème d'intégrabilité et il n'y a plus rien à vérifier. Exemple : $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{e^{-x} - 1} dx$.
3. Pour les vrais problèmes de convergence d'intégrales, vérifier l'intégrablité ou l'absolue convergence : considérer $|f|$ (ou f si f est de signe constant).
   Utiliser les théorèmes de comparaison avec $\leq, O, o, \sim$, avec des fonctions intégrables de référence (intégrales de Riemann en 0 ou $+\infty$)
   - Commencer par voir s'il est possible de trouver un équivalent pour simplifier la fonction. Exemple : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$.
   - Utilisation est o ou O. Exemples : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ ou $\displaystyle\int_{0}^{1} |\ln(t)|^\alpha dt$ $(\alpha > 0)$ convergent.
   - Des inégalités. Exemple : $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{e^{-x} - 1} dx$

6 Techniques de calcul

Proposition 6.0.1 (Changement de variable) *Soit f continue par morceaux sur $]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, à valeur dans $\mathbb{K}$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)du$ et $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)dt$ sont de même nature, et en cas de convergence :*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

Pour strictement décroissante, $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_{b}^{a} f(t)dt$.

Exemple 6.0.1 $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos(x)}$, *avec le changement de variable $t = \tan(x/2)$.*

Proposition 6.0.2 (Intégration par parties) *Soient f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[$, ou $[a, b[$, ou $]a, b]$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) à valeur dans $\mathbb{K}$. Si la fonction $f \times g$ a une limite finie en a et b, alors les intégrales $\displaystyle\int_{a}^{b} f'(t)g(t)dt$ et $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)g'(t)dt$ sont de même nature. Si ces quantités sont convergentes, alors en notant $[f(t)g(t)]_a^b = \lim_{x\to b^-}(f(x)g(x)) - \lim_{x\to a^+}(f(x)g(x))$, on obtient :*

$$\int_{a}^{b} f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_{a}^{b} f'(t)g(t)dt.$$

Exemple 6.0.2 *Calcul de $I_n = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^n e^{-t} dt$. Par IPP, on a $I_{n+1} = (n+1)I_n$, puis $I_n = n!$.*