9-Séries entières

Ex 1 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

1. $\sum \frac{z^{n^2}}{n!}$;
2. $\sum n! z^n$;
3. $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$;
4. $\sum \frac{\sin(\theta/n)}{n+1} z^n$;
5. $\sum \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \frac{z^n}{n!}$;
6. $\sum \frac{(2n)!}{n! n^n} z^n$;
7. $\sum \frac{z^{n!}}{n!}$;
8. $\sum n^{\ln n} z^n$;
9. $\sum \lfloor \alpha^n \rfloor z^n$, $\alpha > 1$;
10. $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} z^{2n}$;
11. $\sum$ Arccos $\left(1-\frac{1}{n^2}\right) z^n$;
12. $\sum z^{n^2}$;
13. $\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right) z^n$;
14. $\sum \left(\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt\right) z^n$;
15. $\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n z^n$;
16. $\sum \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$;
17. $\sum \frac{z^{p_n}}{p_n}$, p_n étant le n-ème nombre premier ;
18. $\sum_{n\geq 1} n! z^{n^2}$;
19. $\sum_{n\geq 2} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$;
20. $\sum_{n\geq 1} \frac{(1+2i)^n-(2i)^n}{n(n+1)} z^n$;
21. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{2n+1}$;
22. $\sum (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \cos\left(\frac{2\pi n}{37}\right) z^n$.

Ex 2 : Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes telle que $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}_+$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

Ex 3 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n$.

Ex 4 : Soit $(a_n)_n$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon R_1. Montrer que la série entière $\sum a_n^2 x^n$ a pour rayon de convergence $R_2 = R_1^2$.

Ex 5 : (*) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f sa somme. Montrer que pour tout $z \in D(0,R)$, la fonction $f_z : h \mapsto f(z+h)$ est DSE.

Ex 6 : (*) Soit $\sum a_n$ une série divergente à termes strictement positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et on suppose que $a_n = o(S_n)$. Déterminer les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum S_n z^n$.

Ex 7 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = k \in \mathbb{R}_+$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

Ex 8 : Soit (u_n) une suite complexe bornée et on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Déterminer les rayons de convergence de $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{S_n}{n!} x^n$.
2. On note u et S leurs sommes. Former une relation entre u', S et S'.
3. Si la suite (S_n) converge vers ℓ, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} S(x) = \ell$.
4. Pour $u_n = (-1)^n$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} S(x)$.

Ex 9 : On définit une suite (u_n) d'entiers par les conditions : $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, on a : $u_n = -u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3^n$ $(*)$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 3^{n+1}$. Que dire du rayon de convergence de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$?
2. En déduire l'expression de f sur $]-1/3, 1/3[$.

Ex 10 : Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières :

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n+1)x^n$;
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n!}x^n$;
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}$;
4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\cos(2n\pi/3)}$;
5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n+1)!}$;
6. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$;
7. $\sum\frac{2^{(-1)^n}}{n}x^n$;
8. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{(2n+1)!}$;
9. $\sum \mathrm{ch}\,(n)x^n$;
10. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}x^n$;
11. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n(2n+1)}$;
12. $\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\left(\frac{2\pi n}{37}\right)x^n$.
13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-n}$;
14. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}$;
15. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$;
16. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$;
17. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3n+2}$;
18. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n+1}x^n$;
19. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$;
20. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$;
21. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(n+1)!}$;
22. $\sum(n+1)3^nz^{2n}$;
23. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(na)}{n}x^n,\ a\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$;
24. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\theta)}{n!}x^n$;
25. $\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n}$;
26. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+4n-1}{(n+2)n!}x^n$;
27. **(CCP 47)** $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, avec $\begin{cases} a_{2n}=4^n \\ a_{2n+1}=5^{n+1} \end{cases}$.

Ex 11 : Soit $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Calculer $1+j^k+\overline{j}^k$ pour tout k de $\mathbb{N}$. En déduire une expression de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$, pour x dans $\mathbb{R}$.

Ex 12 : Développer en série entière les fonctions suivantes.

1. $(2+x)e^x$;
2. $\cos^3 x$;
3. $\frac{1}{x^2+x-2}$;
4. $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$;
5. $\frac{x^2+x+3}{(x-2)^2(2x-1)}$;
6. $\sum_{n=0}^{+\infty}(2x-x^2)^n$;
7. $\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$;
8. $\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt$;
9. $e^x\int_0^x\frac{dt}{1+t^4}$;
10. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Arcsin}\,(x)$;
11. $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(xt)dt$;
12. $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;
13. $\int_{-\infty}^x\frac{dt}{1+t+t^2}$ (remarquer que $1+z+z^2=\frac{1-z^3}{1-z}$) ;
14. $e^x\sin(x)$;
15. $\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})$.

Ex 13 : Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=\int_0^1\frac{1}{(2+t^2)^{n+1}}dt$.

1. Montrer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_nx^n$ vaut au moins 2.
2. Soit $S_n(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$. Pour $x\in]-2,2[$, montrer que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
3. En déduire la somme de la série entière $\sum a_nx^n$ et montrer que $R=2$.

Ex 14 : Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1}\ln\left(\tan\left(\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)\right)$.

Ex 15 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $u_n=\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ et $f:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}u_nx^n$.

1. Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{2n+1}}{2n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{2n+1}$ pour u variant dans un intervalle à déterminer.
2. Donner l'ensemble de définition I de f. et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles sur $\mathring{I}$.
3. Calculer $S=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nu_n$ et $S'=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

Ex 16 : Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $c_1=1$ et $c_n=\sum_{k=1}^{n-1}c_kc_{n-k}$ pour $n\geq 2$.

1. On considère $f:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}c_nx^n$. On admet provisoirement que le rayon de convergence de cette série R est strictement positif. Former une équation de degré deux vérifiée par f.
2. En déduire : $\forall x\in]-R,R[,\ f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$.
3. Justifier l'hypothèse faite sur R, puis trouver une expression simple de c_n.

Ex 17 : Pour α dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$, on pose : $\binom{\alpha}{n}=\frac{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\ldots(\alpha-1)\alpha}{n!}$.
Soit $\beta\in\mathbb{R}$, montrer que : $\sum_{k=0}^n\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}=\binom{\alpha+\beta}{n}$.

Ex 18 : (*) Soit $f(x)=\frac{1}{\cos x}$. Montrer que f est développable en série entière dans un voisinage de zéro. On pourra chercher des relations définissant les (b_n) tels que $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$.

Ex 19 : *1.* Donner le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n(\ln n)\,x^n$. On notera S sa somme.

2. Montrer que : $\forall x \in \,]-1,1[\,,\quad S(x)=\dfrac{1}{1+x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$.

3. Montrer que la limite de S en 1^- est égale à $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, que l'on calculera.

Ex 20 : On pose, pour $n\in\mathbb{N}, I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}, 0\leqslant I_n\leqslant\frac{\pi}{4}$. En déduire que le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$ est au moins égal à un.

2. Montrer, pour $n\in\mathbb{N}$, que $I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}$.

3. Donner un équivalent simple de I_n.

4. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum I_n x^n$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$ pour $x\in]-R,R[$.

Ex 21 :

1. Étudier la convergence simple de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$. On note D l'ensemble de convergence et $S(x)$ la somme sur D. L'application S est-elle continue sur D ?

2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n$ converge normalement sur $[-1,1]$.

3. En déduire la valeur de $\lim_{x\to 1^-}(1-x)S(x)$.

Ex 22 : On pose $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^{n^2}$. Donner le domaine de définition de f, puis donner un équivalent de f en 1, sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-v)}{\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v=\sqrt{\pi}$.

Ex 23 : Soit la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{(n!)^2}$ et f sa somme. Rayon de convergence de cette série entière ? Faire le lien entre f et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2\sqrt{x}sin(t)}dt$.

Ex 24 : (*) *1.* Soient (a_n) et (b_n) deux suites de $\mathbb{R}_+^*$ telles que $a_n\sim b_n$. On pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ et $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n$ que l'on suppose définies sur $\mathbb{R}$. Montrer que : $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}g(x)$.

2. a. Quel est le rayon de convergence de la série entière $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{n!}$?
b. Montrer qu'en $+\infty$, $f(x)\sim\frac{1}{\sqrt{e}}e^{ex}$.

Ex 25 : Montrer que :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}=\int_0^1\,\mathrm{Arctan}\,(x)dx$. En déduire la valeur de cette somme.

2. $\int_0^{+\infty}\cos(\sqrt{x})e^{-x}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$;

3. $\int_0^1\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx=-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$;

4. $\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-n}=\int_0^1 t^{-t}dt$.

5. $\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Ex 26 : Montrer que $x\mapsto\frac{\mathrm{sh}\,(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 27 : Déterminer $\mathrm{Arctan}^{(k)}(0)$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Ex 28 : *1.* Soit $z \in D(0,1)$. On pose $L(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$. Montrer que $\exp(L(z)) = 1 + z$ (on pourra dériver la fonction $t \mapsto \exp(L(tz))$ sur $[0,1]$).
2. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Montrer que : $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall z \in D(0,\alpha),\ \det(I_p + zA) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} tr(A^n) z^n\right)$.

Ex 29 : (*) Soit f une fonction d'un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que f est développable en série entière sur un voisinage de 0 si et seulement si il existe trois réels strictement positifs M, ρ et h tels que : $\forall x \in]-h, h[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \rho^n n!$.

Ex 30 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n+1} a_{n-1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq n + 1$.
2. En déduire que le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geq 1$. On notera S sa somme.
3. Déterminer une équation différentielle sur $]-R, R[$ de S et en déduire une expression de S.
4. En déduire l'expression exacte des a_n et de R.

Ex 31 : Soit l'équation différentielle $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$. Chercher les solutions développables en série entière en posant $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Ex 32 : Soit $(E) : x^2 y'' - x(2x^2 - 1)y' - (2x^2 + 1)y = 0$.

1. Chercher les solutions de (E) développables en série entière en précisant le rayon de convergence.
2. Exprimer ces solutions à l'aide de fonction élémentaires.

Ex 33 : *1.* Soit $g = (\operatorname{Arcsin})^2$. Trouver une équation diffŕentielle d'ordre 2 satisfaite par g.
2. Montrer que g est DSE. Déterminer son rayon de convergence et son développement.

Ex 34 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ tel que : $0 < |a| < 1$ et $x \in]-1/|a|, 1/|a|[$. On pose $u_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - a^k x}$.

1. Montrer que pour x dans $]-1/|a|, 1/|a|[$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note $f(x)$ sa limite.
2. Montrer que $f(ax) = (1 - ax) f(x)$.
3. Montrer que f est décomposable en série entière sur $]-1/|a|, 1/|a|[$ et calculer son développement.

Ex 35 : Soient $a \in]0, 1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, puis exprimer $f^{(n)}$ en fonction de f.
2. En déduire que f est égale à sa série de Taylor.
3. Déterminer l'ensemble des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

Ex 36 : (*) Soit $\sum a_n$ une série numérique convergente. On pose $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de fonction $\sum_{p\geq 0} F^{(p)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$:
  a. lorsque $\sum a_n$ converge absolument ;
  b. dans le cas général

Ex 37 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $f_n : x \mapsto \frac{e^{i2^n x}}{n^n}$. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geq 0} \frac{2^{k^2}}{k! k^k} x^k$.
3. Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor de S en 0 ?