10-Espaces probabilisés

Ex 1 : (*) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ croissante et D l'ensemble des points de discontinuité de f.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que la famille $\left(\lim\limits_{x^+} f - \lim\limits_{x^-} f\right)_{x\in]a,b[}$ est sommable.

2. En déduire que $D\cap]a, b[$ est au plus dénombrable, pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

3. Montrer que D est au plus dénombrable.

Ex 2 : Montrer que l'ensemble S des nombres complexes racines d'un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable. A-t-on $S = \mathbb{C}$?

Ex 3 : Soit X un ensemble fini. On dit que $f : X \to X$ est une involution de X si $f \circ f = Id$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, I_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$ et l'on convient que $I_0 = 1$.

1. Calculer I_1, I_2 et I_3 et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = I_{n+1} + (n + 1)I_n$.

2. Soit $S : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} z^n$. Montrer que S a un rayon de convergence $R > 0$.

3. Trouver un équation différentielle vérifiée par S et en déduire une expression simple de $S(x)$. En déduire enfin une expression de I_n.

Ex 4 : Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, k + 1]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Ex 5 : ***1.*** Soit $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre des solutions entières naturelles (n, m) de l'équation $an + bm = c$ est le coefficient de x^c dans le développement en série entière de $\frac{1}{(1 - x^a)(1 - x^b)}$.

2. Quel est le nombre de solutions entières naturelles (n, m) de l'équation $2n + 4m = c$?

Ex 6 : Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n (avec $n \geq 2$). On prélève ces jetons au hasard, un par un et sans remise. On note $(u_1, u_2, ..., u_n)$ la liste des numéros tirés. Pour i dans $[\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a record à l'instant i si $u_i > \max(u_1, ..., u_{i-1})$. On convient qu'il y a un record à l'instant 1.

1. Calculer, pour i dans $[\![1, n]\!]$ la probabilité r_i qu'il y ait un record à l'instant i.

2. Quelle est la probabilité que durant la totalité des tirages, on assiste exactement à un seul record ? n records ? deux records ?

Ex 7 : Un escalier dispose de n marches. On peut monter une ou deux marches à la fois. Quelle est le nombre de façons de montrer l'escalier ?

Ex 8 : Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$.

1. Montrer qu'il existe une tribu sur Ω contenant $\mathcal{F}$ et que l'intersection de toutes ces tribus est encore une tribu, que l'on note $\sigma(\mathcal{F})$.

2. Montrer que $\sigma(\mathcal{F})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{F}$.

Ex 9 : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(A_n) = 1$. Montrer que $P\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$.

Ex 10 : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements.

1. Si $A \cap B = \emptyset$, montrer que : $P(A)P(B) \leq 1/4$.
2. Montrer que $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A \cap B)P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B)P(A)$.
3. Montrer que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq 1/4$.

Ex 11 : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle.
Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant $P(\{n, n+1, \ldots\}) = \lambda a_n$.

Ex 12 : (*) Soient P_1 et P_2 deux probabilités sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A})$. Montrer que :
$\left[\forall A \in \mathcal{A},\ P_1(A) = 0 \Longrightarrow P_2(A) = 0\right] \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall A \in \mathcal{A},\ P_1(A) \leq \eta \Longrightarrow P_2(A) \leq \varepsilon\right]$.

Ex 13 : (*) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n et k boules bleues non numérotées. Les boules sont tirées avec remise jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée. Quelle est la probabilité de ne jamais tirer la boule 1 lors du jeu ?

Ex 14 : On considère une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire toutes les boules successivement et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer les boules de numéros impairs dans l'ordre croissant, non nécessairement consécutivement ? Et consécutivement ?

Ex 15 : Dans un quizz, n candidats répondent successivement à une série de questions. Chaque participant a une chance sur deux de donner la bonne réponse à une question. Après la première question, ceux qui se sont trompés sont éliminés. Les restants répondent à la deuxième question, ceux qui se sont trompés sont à nouveau éliminés, ainsi de suite. Sont déclarés vainqueurs les derniers à être éliminés lors de la même question. On note p_n la probabilité d'avoir un unique vainqueur. Montrer que :
$\forall n \geq 2,\ p_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p_k$.

Ex 16 : On obtient aléatoirement un entier strictement positif n avec une probabilité de $\dfrac{1}{2^n}$ On note A_k l'événement : « n est un multiple de k ».

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer $P(A_k)$.
3. Calculer $P(A_2 \cup A_3)$.
4. Soit p, q dans $\mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. Montrer que $A_p \cap A_q = A_{p \vee q}$. Les évéments A_p et A_q sont-ils indépendants ?

Ex 17 : Une urne contient une boule noire, une boule blanche et une troisième qui est soit noire soit blanche avec la même probabilité. On tire une boule au hasard et elle est noire. On tire une deuxième boule. Quelle est la probabilité qu'elle soit noire ?

Ex 18 : Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité $p_1 > 0$ de toucher à chaque tour et le second la probabilité $p_2 > 0$.

1. Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?
2. Montrer qu'il est presque sûr que le jeu se termine.
3. Pour quelles valeurs de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

Ex 19 : Des joueurs A_1,...,A_n,...(en nombre infini), s'affrontent à un tournoi de Pile ou Face avec une pièce non truquée. D'abord A_1 rencontre A_2. Le perdant est éliminé, puis le gagnant rencontre A_3. À nouveau le perdant est éliminé, le gagant rencontre A_4, et ainsi de suite. Est déclaré vainqueur le premier joueur qui remporte qui remporte deux parties consécutives. Pour n, on note q_n la probabilité que le joueur A_n participie au tournoi, et p_n la probabilité qu'il le remporte.

1. Déterminer q_n.

2. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.

3. Déterminer p_n.

Ex 20 : Plusieurs joueurs, nommés $j_1, j_2, ..., j_k, ...$ jouent l'un après l'autre, dans l'ordre des indices. Chaque joueur j_k joue à un jeu dont la probabilité de gagner est $p_k \in]0,1[$. Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs gagne son jeu. On suppose les jeux des joueurs sont indépendants entre eux. On note G_k l'événement « le joueur j_k gagne ».

1. On suppose que le nombre de joueurs est $c \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Lorsqu'aucun joueur n'a gagné, on recommence un tour à partir du joueur j_1 et on continue jusqu'à l'un des joueurs gagne.

- ***a.*** Calculer $P(G_k)$ avec $k \in [\![1, c]\!]$.
- ***b.*** Montrer que la partie s'arrête presque sûrement.
- ***c.*** On dit que le jeu est équitable si $P(G_1) = ... = P(G_c)$. Montrer que le jeu est équitable si et seulement si : $\forall k \in [\![1, c-1]\!],\ p_{k+1} = \dfrac{p_k}{1-p_k}$. Dans ce cas exprimer p_k en fonction de p_1.

2. On suppose maintenant qu'il y a une infinité de joueurs. Ainsi un joueur qui n'a pas gagné est définitivement éliminé.

- ***a.*** Montrer que le jeu ne peut pas être équitable.
- ***b.*** Montrer que la suite de terme général $Q_n = q_1...q_n$ converge, avec $Q_0 = 1$. On note a sa limite. Montrer que la probabilité que le jeu s'arrête est $1 - a$.

Ex 21 : On lance une pièce équilibrée n fois (avec $n \geq 2$). Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note les événements P_k « on obtient pile au k-ième lancer » et B : « le nombre de piles lors des n lancers est pair ».

1. Déterminer les probabilités de ces événements.

2. Déterminer $P(A_1 \cap ... \cap A_n \cap B)$ et en déduire que les événements ne sont pas indépendants.

3. Montrer que toute sous-famille de n événements parmi $A_1, ..., A_n, B$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Ex 22 : Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.
On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

1. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

2. A-t-on le même résultat si on remet la boule accompagnée de 3 autres boules de la même couleur ?

Ex 23 : Une urne contient v boules vertes et b boules bleues. On effectue n tirages successifs de la manière suivante :
- si l'on tire une boule verte, alors on replace cette boule dans l'urne avant le tirage suivant,
- si l'on tire une boule bleue, on élimine cette boule avant le tirage suivant.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule bleue au cours des n tirages ?

2. La seconde boule est verte. Quelle est la probabilité que la première ait été bleue ?

Ex 24 : (*) Une puce se déplace sur un plateau de n cases numérotées. Initialement, elle se trouve sur la case 1. À chaque pas, elle passe de la case qu'elle occupe à l'une des $n-1$ autres, ce de façon équiprobable et indépendamment de ses déplacements antérieurs. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la limite lorsque p tend vers $+\infty$ de la probabilité qu'elle se trouve sur la case k après p mouvements.

Ex 25 : Un rat se trouve dans un labyrinthe face à quatre portes dont une seule conduit à la sortie. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une légère décharge électrique et revient à son point de départ. On s'intéresse au nombre d'essais utilisés pour trouver la bonne porte. On envisage successivement trois hypothèse :

1. Le rat a une mémoire parfaite, à chaque nouvel essai, il évite toutes les mauvaises portes choisies précédemment et choisit au hasard parmi les restantes.
2. Le rat a une mémoire immédiate, à chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte de l'essai précédent et choisit au hasard parmi les trois autres portes restantes.
3. Le rat n'a pas de mémoire et choisit à chaque essai de façon équiprobable l'une des portes.

Ex 26 : Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Un joueur dispose initialement d'une fortune k dans $[\![0, c]\!]$. Il est dans un casino, qui dispose d'une fortune $c-k$. Il joue à pile ou face, la pièce amenant pile avec une probabilité p dans $]0,1[\backslash\{1/2\}$. Le joueur parie toujours sur pile. S'il gagne, sa fortune augmente d'une unité ; s'il perd, elle diminue d'une unité. La partie s'arrête quand la fortune du joueur atteint 0 (joueur ruiné) ou c (casino ruiné). On cherche à calculer la probabilité de ruine du joueur. On pose $p_{k,c}$ la probabilité d'être ruiné en partant d'une fortune k.

1. Déterminer $p_{0,c}$ et $p_{c,c}$ et montrer que : $\forall k \in [\![1, c-1]\!],\ p_{k,c} = pp_{k+1,c} + (1-p)p_{k-1,c}$.
2. En déduire l'expression de $p_{k,c}$.
3. Soit $q_{k,c}$ la probabilité pour que le joueur fasse fortune en partant d'une fortune k (c'est-à-dire que sa fortune vaut c en fin de partie). Peut-on affirmer immédiatement que $q_{k,c} = 1 - p_{k,c}$?
4. Montrer par le calcul que : $\forall k \in [\![0, c]\!],\ p_{k,c} + q_{k,c} = 1$. Comment interpréter cette relation ?

Ex 27 : Deux entreprises produisent des pétards en proportion égale. Cependant certaines sont défectueuses, avec une probabilité p_1 pour la première entreprise et avec une probabilité p_2 pour la seconde. Un client achète un sachet contenant n articles provenant de la même entreprise. Il teste un premier pétard et celui-ci fonctionne. Quelle est la probabilité :

1. pour qu'un pétard dans le même sachet fonctionne ?
2. que le sachet comporte k articles fonctionnels (y compris le premier extrait) ?

Ex 28 : On dispose de trois pièces. la première donne face avec une probabilité de $0,1$, la seconde avec une probabilité de $0,4$ et la troisième avec une probabilité de $0,6$. On choisit une pièce au hasard et on la lance plusieurs fois jusqu'à obtenir face pour la première fois au n-ème lancer. Quelle est la probabilité π_n que l'on ait lancé la première pièce. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n$? Commenter.

Ex 29 : On lance une infinité de fois une pièce et on considère l'événement A_k :
« au cours des k premiers lancers, il n'est jamais sorti trois pile de suite », avec la convention $A_0 = \Omega$.

1. En supposant les lancers indépendants et la pièce équilibrée, montrer que pour $k \geq 3$, on a : $P(A_k) = \frac{1}{2}P(A_{k-1}) + \frac{1}{4}P(A_{k-2}) + \frac{1}{8}P(A_{k-3})$.
2. Soit α, β, γ les racines dans $\mathbb{C}$ de $P = X^3 - X^2/2 - X/4 - 1/8$. Montrer que ces racines ont un module strictement inférieur à 1. En déduire la probabilité de ne jamais avoir trois pile de suite.
3. Mêmes questions avec A_k : « au cours des k premiers lancers, il n'est jamais sorti la séquence PFP ».