11-Variables aléatoires

<u>Ex 1</u> : (*) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de variable aléatoires défini sur cet espace Montrer que $A = \{\omega \in \Omega \ / \ \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0\}$ est un événement.

<u>Ex 2</u> : On dispose de n aimants identiques que l'on met côte à côte. Suivant la polarité cela conduit des aimants à se regrouper en blocs. On considère que pour chaque aimant, il y a équiprobabilité entre les deux dispositions possibles. Déterminer le nombre moyen de blocs.

<u>Ex 3</u> : (*) On considère deux urnes contenant chacune n boules. On effectue des tirages sans remise en choisissant à chaque fois l'une des deux urnes de manière équiprobable. On s'arrête si l'urne choisie est vide. Soit Y_n le nombre de boules restant à ce moment dans l'autre urne. Donner la loi de Y_n et un équivalent de son espérance.

<u>Ex 4</u> : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d., suivant une loi $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0,1[$ et on pose $q = 1-p$. Pour $n \geq 2$, on pose $A_n = \{X_1 < ... < X_n\}$. Pour $(n,k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $n \geq 2$ et $k \geq 1$, on pose : $u_n = P(A_n)$, $B_{n,k} = A_n \cap \{X_1 = k\}$, $\ v_{n,k} = P(B_{n,k})$ et $\pi_l = \prod\limits_{j=1}^{l}(1-q^j)$.

1. Calculer u_2. Montrer que pour $n \geq 3$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{n,k} = pq^{k-1} \sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j}$.
2. Montrer que pour $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{n,k} = \dfrac{1}{\pi_{n-1}}(pq^{k-1})^n q^{\alpha_n}$, avec α_n un entier que l'on précisera.
3. En déduire que, pour $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{1}{\pi_n} p^{\beta_n} q^{\gamma_n}$, , avec β_n, γ_n des entiers que l'on précisera.

<u>Ex 5</u> : Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(T > n) > 0$.
On appelle taux de panne associé à T la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $\theta_n = P\left(T = n | T \geqslant n\right)$.

1. Exprimer en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la probabilité $P(T \geqslant n)$. En déduire la divergence de la série $\sum \theta_n$.
2. Inversement, soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_n \in [0,1[$ et $\sum \theta_n$ diverge et $\theta_0 = 1$. Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T.
3. Déterminer les variables aléatoires réelles discrètes ayant un taux de panne constant.

<u>Ex 6</u> : Dans un casino, une machine renvoie un entier naturel N non nul selon la loi de probabilité : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ P(N = n) = \frac{1}{2^n}$. On gagne N jetons si N est pair ; on perd N jetons si N est impair.

1. Quelle est la probabilité de gagner une partie ?
2. Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire G égale au gain algébrique du joueur.

<u>Ex 7</u> : Un gardien de phare possède un trousseau de 10 clés, dont une seule ouvre la porte du phare. Chaque jour, pour ouvrir la porte, il y a deux méthodes.
Méthode A : à jeun, il n'essaie qu'une fois chaque clé.
Méthode B : ivre, il oublie les clés déjà testées, et il peut essayer chaque clé plusieurs fois.

1. Déterminer, pour chaque méthode, la loi N du nombre d'essais pour ouvrir la porte ainsi que son espérance.
2. Le gardien est ivre un jour sur trois. Un jour, après avoir essayé 8 clés, il n'a toujours pas ouvert la porte. Quelle est la probabilité pour qu'il soit ivre ?

Ex 8 : On considère une urne remplie avec des boules numérotées de 1 à $2n$. On procède à une suite de tirages sans remise.

1. Calculer la probabilité que les boules impaires soient tirées exactement dans l'ordre $1, 3, ..., 2n-1$.
2. Soit X la variable correspondant au nombre de tirages nécessaires pour obtenir toutes les boules impaires. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Ex 9 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{G}(p)$ et $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ? Inversible ?
2. Quelle est la probabilité qu'une valeur propre soit le double de l'autre ?

Ex 10 : On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

1. Donner la loi de X_n.
2. Justifier l'existence de l'espérance de X_n et la calculer.
3. On note Y_n le rang du premier tirage à l'issu duquel toutes les boules ont été tirées au moins une fois. Donner la loi de Y_2 et Y_3.

Ex 11 : Soit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = 4P(X = n-1)/n$. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance (si elles existent).

Ex 12 : Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 change d'état de la manière suivante :

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé.
- si à l'instant $t = n$, $n \geq 0$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n + 1$, et ceci de manière équiprobable.
- si à l'instant $t = n$, $n \geq 0$, le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, alors le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot S_2 s'allume.

1. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n.
2. Calculer la probabilité des événements $[X = 1]$ et $[X = 2]$, puis $[X = n]$, pour $n \geq 3$.
3. Déterminer l'espérance de X.

Ex 13 : Soit une pièce ayant la probabilité $p \in]0, 1[$ de donner pile et on réalise l'expérience suivante :

- on lance la pièce jusqu'à obtenir pile. Soit N le nombre de lancers effectués.
- on lance à nouveau la pièce N fois et on compte le nombre X de piles obtenus.

1. Quelle est la loi de N ?
2. Quelle est la loi de X ?
3. Calculer $E(X)$.

Ex 14 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi $\mathcal{B}(p)$ et indépendantes.

1. Soit $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = 1 \text{ et } X_{n+1} = 0\}$. Quelle est la loi de T ?
2. Soit $N = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = 1\}$ et $Y = X_{N+1} + X_{N+2}... + X_{2N}$. Quelles sont les lois de N et Y ?

Ex 15 : (*) Soit p un nombre premier impair.

1. Déterminer le cardinal de $C = \{k^2,\ k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.
2. Soient A et B deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de solutions de $x^2 + Ax + B = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de N.

Ex 16 : ***(CCP 104)*** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules. Soit X le nombre de compartiments vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. **a.** Déterminer $P(X = 2)$.
   b. Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. **a.** Calculer $E(X)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Ex 17 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.
Soient $i, j \in [\![1, n+1]\!]$. On donne $P(X = j, Y = i) = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$.

1. Déterminer λ.
2. Donner les lois de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de $Z = X - 1$ et en déduire $\mathtt{E}(X)$ et $\mathtt{V}(X)$.
5. Soit $B = [P(Y = i|X = j)]_{1\leq i,j\leq n+1}$. Expliciter B, puis calculer B^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.
6. B est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

Ex 18 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant, $\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}(X = k, Y = \ell) = \dfrac{\alpha}{2^{k+\ell}}$.

1. Trouver α. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $G_X(t), \mathbf{E}(X), \mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{cov}(X, Y)$.
3. Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et retrouver $\mathbf{E}(X)$.
4. On pose $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de Z.
5. Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant Y)$.

Ex 19 : Soient M et X deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi de X sachant $(M = n)$ est uniforme sur $[\![0, n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Quelles sont les lois de X et $M - X$?

2. On suppose que $\mathtt{E}(M)$ existe. Montrer que $\mathtt{E}(X)$ existe puis calculer $\mathtt{E}(X)$.
3. On suppose que $M+1$ suit une loi $\mathcal{G}(p)$. Quelle est la loi de X ?

Ex 20 : X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k)=P(Y=k)=pq^k$, avec $p \in]0,1[$ et $q=1-p$. Soient $U=\sup(X,Y)$ et $V=\inf(X,Y)$.

1. ***(CCP 106)*** Déterminer la loi du couple (U,V).
2. ***(CCP 106)***Déterminer la loi marginale U.
   On admet que $V(\Omega)=\mathbb{N}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(V=n)=pq^{2n}(1+q)$.
3. ***(CCP 106)*** Prouver que $W=V+1$ suit une loi géométrique. En déduire $E(V)$.
4. ***(CCP 106)*** U et V sont-elle indépendantes ?
5. Calculer $P(3X=2Y)$, $V(4X-5Y)$ et $E(2^{Y-X})$.
6. Déterminer la loi de $Z=|X-Y|$.

Ex 21 : ***(CCP 108)*** Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P(X=i,Y=j)=\dfrac{a}{2^{i+1}j!}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $a=1/e$.
2. Déterminer les lois marginales X et Y.
3. Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.
4. Déterminer l'espérance et la variance de Y.
5. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
6. Calculer $P(X=Y)$.

Ex 22 : (*) Soient $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi telles que : $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ P(X_{i,j}=1)=P(X_{i,j}=-1)=1/2$. On pose $A=[X_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ et $D=\det(A)$. Déterminer $V(D)$.

Ex 23 : [Modèle d'Ehrenfest] L'unité de temps est choisie de sorte que les instants sont des nombres entiers. Deux compartiments A et B renferment à l'instant 0 certaines quantités d'un même gaz, pas forcément égales. Une valve permet des échanges entre les deux compartiements : à chaque instant, une molécule du gaz, choisie aléatoirement de façon uniforme, passe d'un compartiment à l'autre. On note $2N$ le nombre total de molécules, et X_n le nombre de molécules dans le compartiment A à l'instant n.

1. Pour $1 \leq k \leq 2N$, exprimer $P(X_{n+1}=k)$ en fonction de probabilités de la forme $P(X_n=j)$, avec j à préciser.
2. En déduire : $\mathtt{E}(X_{n+1})=1+\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\mathtt{E}(X_n)$.
3. En déduire $\mathtt{E}(X_n)$. Quelle est la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$? Commenter.

Ex 24 : (*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant toutes la même loi. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $R_n=card\{X_k,\ 1\leq k\leq n\}$.

1. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cap[0,M]$. Montrer que : $E(Y)\leq MP(Y\geq 1)$.
2. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{N},\ E(R_n)\leq a+nP(X_1\geq a)$.
3. Montrer que $E(R_n)=o(n)$ et si X_1 est d'espérance finie, $E(R_n)=O(\sqrt{n})$.
4. Montrer que $E(R_n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(X_i=k)\right)$.

Ex 25 : (*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi uniforme sur $\{-1, 2\}$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + ... + X_n$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $A_n = (\exists k \geq 0,\ S_k = -n)$ et $p_n = P(A_n)$.

1. Exprimer $P(\exists k > 0,\ S_k = 0)$ en fonction de p_{-1} et p_2.

2. Trouver une relation entre p_{n+2}, p_n et p_{n-1}.

3. En déduire la valeur de p_n.

Ex 26 : Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Soit une file d'attente à un guichet et n clients qui attendent. Chaque minute, le guichet se libère. Le guichetier choisit alors le client qu'il appelle selon le processus suivant :

- avec une probabilité $1/2$, il appelle le client en première position dans la file,
- sinon, il choisit de manière équiprobable parmi les $n - 1$ autres clients.

Enfin, un nouveau client arrive dans la file et se place en dernière position (de telle sorte qu'il y a toujours exactement n clients qui attendent). Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note T_k le temps d'attente d'un client qui se trouve initialement en position k dans la file.

1. Quelle est la loi de T_1 ? Donner son espérance et sa variance.

2. Montrer que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, la variable T_k est d'espérance finie.

3. Donner une relation entre $E(T_k)$ et $E(T_{k-1})$ pour $k \geq 2$. En étudiant la suite $((n + k - 2)E(T_k))_{1\leq k\leq n}$, exprimer $E(T_k)$ en fonction de k et n.

Ex 27 : (*) Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $\sum P(E_n)$ converge.

1. Soit $Z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{E_n}$ ($Z = +\infty$ si la série diverge). Montrer que Z est une variable aléatoire disctète.

2. Montrer que $P(Z = +\infty) = 0$.

3. Montrer que Z est d'espérance finie.

Ex 28 : On considère des variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes identiquement distribuées selon une loi gémétrique de paramètre $p \in]0, 1[$, définies sur un espace probabilisé (Ω, P).
On pose l'événement $A = \{\omega \in \Omega,\ \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ converge $\}$, avec α dans $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

1. Calculer $P(A)$ pour $\alpha > 1$.

On se place maintenant dans le cas $\alpha \in]0, 1[$ et on pose $\beta = 1 - \alpha$.

2. ***a.*** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P\left(\displaystyle\bigcup_{n=k}^{+\infty}(X_n > n^\beta)\right) \leq \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^\beta}$.

b. Étudier la convergence de la série de terme général q^{n^β} et en déduire $P\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{n=k}^{+\infty}(X_n > n^\beta)\right)$.

Soit $A_\beta = \{\omega \in \Omega,\ X_n(\omega) > n^\beta$ est vraie pour un nombre fini d'entiers naturels $n\}$.

3. Montrer que $A_\beta = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{n=k}^{+\infty}(X_n \leq n^\beta)$, puis que $P(A_\beta) = 1$.

4. ***a.*** Montrer que si ω est dans A_β, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ diverge.

b. Quelle est la probabilité de l'événement A ?

Ex 29 : Un joueur joue à pile ou face contre une banque avec une pièce non nécessairement équilibreé (p est la probabilité d'obtenir pile). Sa mise intitiale est a (dans $\mathbb{N}^*$). Tant qu'il obtient face, il perd ce qu'il a misé et décide de miser au prochain coup k fois la mise précédente (avec $k > 1$). Quand il obtient pile, il gagne k fois sa dernière mise et s'arrête de jouer. Quel est son gain moyen ?

Ex 30 : (*) Une chaîne de caractère ne comportant que les caractères $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ou $\mathbf{C}$ est générée aléatoirement avec équiprobabilité. Soit T la variable aléatoire dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ donnant le nombre de tirages pour qu'apparaisse pour la première fois le motif « **ACBAC** » ($T = +\infty$ si le motif n'apparaît jamais). Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $f(n)$ le nombre de chaîne de caractères de longueur n et ne comportant pas le motif « **ACBAC** » et $g(n)$ le nombre de chaîne de caractères de longueur n et finissant par le motif « **ACBAC** »et ne comportant qu'une fois ce motif.

1. Montrer que presque sûrement, $T < +\infty$.
2. Montrer que $f(n) = g(n+2) + g(n+5)$, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire $\mathtt{E}(T)$.

Ex 31 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini inclus dans $\mathbb{R}$. On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N},\ E(X^k) = E(Y^k)$. Montrer que X et Y ont la même loi.

Ex 32 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, avec $p \in]0, 1[$. On pose $Y = (-1)^X$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer $E(Y)$ et $E(XY)$.

Ex 33 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$ d'espérance $\mathtt{E}(X) = m$. Montrer que $\mathtt{V}(X) \leq (m-a)(b-m)$. Cette inégalité est-elle optimale ?

Ex 34 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\{-1; 1\}$ et suivant la même loi. Soit T une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{P}(1)$. On suppose $T, X_1, \dots, X_n$ indépendantes.

1. Soit $U = \displaystyle\prod_{i=1}^{T} X_i$. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$, U^r est dans L^1.
2. Calculer l'espérance et la variance de V.

Ex 35 : Dans un bureau de poste, il entre en une journée un nombre X de clients qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Ils se répartissent ensuite de façon équiprobable et indépendante entre N guichets. Pour $1 \leq i \leq N$, on note Y_i le nombre de clients se présentant au guichet i.

1. Montrer que Y_i suit une loi de Poisson et préciser son espérance.
2. Pour $i \neq j$, déterminer $cov(Y_i, Y_j)$ (examiner la loi de $Y_i + Y_j$).

Ex 36 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p, avec : $0 < p < 1$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j$.

1. Montrer par récurrence que : $S_n(\Omega) \subset \mathbb{N} \cap [n, +\infty[$ et : $\forall k \geq n,\ P(S_n = k) = \displaystyle\binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$.
2. Déterminer la fonction génératrice de S_n.
3. Déterminer l'espérance de S_n.

Ex 37 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Les variables aléatoires Y_n sont-elles mutuellement indépendantes ?
2. Calculer l'espérance et la variance de M_n.

Ex 38 : (*) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que si X admet une variance, alors : $\mathtt{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)P(X>k)$.

Ex 39 : Dans une salle de cinéma, il arrive X personnes souhaitant voir le film. On suppose que X suit une loi $\mathcal{G}(p)$. La capacité de la salle est de n places. On note Y le nombre de personnes ne pouvant entrer dans la salle. Déterminer la loi de Y, sa fonction génératrice et son espérance.

Ex 40 : Soit X une variable aléatoire discrète réelle. On note I_X l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels la quantité suivante existe : $M_X(t) = E\left(e^{tX}\right)$.

1. Montrer que I_X est un intervalle contenant 0.
2. On suppose que 0 est intérieur à l'intervalle I_X. Montrer que la variable X admet des moments à tout ordre et que sur un intervalle centré en 0 : $M_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{E(X^n)}{n!}t^n$.
3. On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle $]-a,a[$. Montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et qu'on a : $E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$.
4. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer $M_X(t)$.

Ex 41 : Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi $\mathcal{B}(1/2)$. On s'intéresse à une succession de p lancers d'une pièce équilibrée amenant un même côté, que l'on appelle série. Par exemple, si les lancers donnent $PPFFFFFFPFFPP$..., la première série est PP et la seconde est $FFFFFF$. Notons N_p le nombre de séries obtenues à l'instant p. Soit $k \in [\![1,p]\!]$.

1. Montrer que $P(N_p = k, X_p = 1) = \dfrac{1}{2}\left(P(N_{p-1} = k, X_{p-1} = 1) + P(N_{p-1} = k-1, X_{p-1} = 0)\right)$.
2. Donner un formule similaire pour $P(N_p = k, X_p = 0)$, puis en déduire $P(N_p = k)$.
3. Montrer que $G_{N_p}(T) = \dfrac{(1+T)}{2}G_{N_{p-1}}(T)$.
4. En déduire $G_{N_p}(T)$, puis la loi de $N_p - 1$.

Ex 42 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ et $Y \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{2}{3}\right)$. Loi de $Z = X + Y$?

Ex 43 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $p_n = nP(X=n)$ et $r_n = P(X>n)$ et on note G la série génératrice de X.

1. Montrer que son rayon de convergence de $\sum r_n t^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Pour $|t|<1$, on pose : $H(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$. Montrer que : $H(t) = \dfrac{1-G(t)}{1-t}$.

Ex 44 : ***1.*** Pour $a > 0$ développer $f(t) = \dfrac{t}{a - t^2}$ en série entière et donner le rayon de convergence.
2. Donner la loi de X, telle que $G_X(t) = \dfrac{t}{2 - t^2}$; donner son espérance et sa variance.
3. X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $P(X = n) > 0$, Y une autre variable aléatoire de même loi que X. On suppose X et Y indépendantes ; $X + Y$ et $X - Y$ le sont-elles (on pourra s'intéresser à $P(X + Y = 1, X - Y = 0)$) ? La réciproque est-elle vraie ?

Ex 45 : Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes avec $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, q)$. Montrer que $X + Y$ suit une loi binomiale si et seulement si $p = q$.

Ex 46 : Soient $l, m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = lm$ et X et Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$; on pose $Z = X + Y$. On suppose que X suit une loi $\mathcal{U}([\![1, l-1]\!]$ et que Z suit une loi $\mathcal{U}([\![1, n-1]\!]$. Déterminer G_Y, puis la loi de Y.

Ex 47 : (*) On munit $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on dit que $\sigma(i)$ est un maximum provisoire de σ si $\sigma(i) = \max(\sigma(1), ..., \sigma(i))$. On désigne par X_n la variable aléatoire représentant le nombre de maximums provisoires des permutations de $[\![1, n]\!]$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note Z_k la variable indicatrice de l'événement « $\sigma(k)$ est un maximum provisoire ».

1. Déterminer les lois des Z_k.

2. On admet que les variables $Z_1, ..., Z_n$ sont indépendantes.

  a. Déterminer $\mathtt{E}(X_n)$ et $\mathtt{V}(X_n)$ (sous forme de somme) et un équivalent de ces quantités.

  b. Déterminer la fonction génératrice G_{X_n}. En déduire $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$ et $P(X_n = n)$.

3. Montrer que les variables aléatoires $Z_1, ..., Z_n$ sont indépendantes.

Ex 48 : Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(X \geq x) \leq e^{-2x} E(e^{2X})$.

Ex 49 : Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes ayant un moment d'ordre 2 et centrées. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :
$\forall i \in [\![1, n]\!],\ S_i = X_1 + ... + X_i,\ B_i = \{|S_1| < a\} \cap ... \cap \{|S_{i-1}| < a\} \cap \{|S_i| \geq a\}$.

1. Montrer que pour $i \in [\![1, n]\!]$, les variables $S_i \mathbf{1}_{B_i}$ et $S_n - S_i$ sont indépendantes.
En déduire que : $E(S_n^2 \mathbf{1}_{B_i}) = E(S_i^2 \mathbf{1}_{B_i}) + E((S_n - S_i)^2 \mathbf{1}_{B_i}) \geq a^2 P(B_i)$.

2. On pose $C = \{\sup(|S_1|, |S_2|, ..., |S_n|) \geq a\}$. Montrer que $P(C) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B_i)$.

3. En déduire que $P(\sup(|S_1|, |S_2|, ..., |S_n|) \geq a) \leq \dfrac{\sum_{i=1}^{n} V(X_i)}{a^2}$.

Ex 50 : (*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_i telle que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i = p$. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

Ex 51 : Un avion peut transporter 400 passagers. Un passager ayant réservé ne se présente pas avec probabilité de 8%. La compagnie a permis à 420 personnes de réserver, quel est son risque ?

Ex 52 : Montrer, en utilisant une variable aléatoire, l'inégalité $\dfrac{n-1}{n} 2^{4n} \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k}$.