12-Régularité des intégrales dépendant d'un paramètre

Ex 1 : On pose $f(x) = \int_x^{4x} \frac{\sin(t)}{1+t} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que f y est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser un équivalent en 0.

Ex 2 : Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt.$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ex 3 : On pose : $\forall x \in]0, +\infty[\,,\ f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie, continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On pose : $\forall x \in]0, +\infty[\,,\ g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^x)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $g(x) = \dfrac{\ln 2}{x}$.

3. Calculer $f(1)$.

4. Montrer que $g(x) - \dfrac{\ln 2}{2x+1} \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

5. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Ex 4 : Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose $t^z = \exp(z\ln(t))$. Soit $f : z \mapsto \int_0^1 \frac{t^z}{1+t} dt$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > -1\}$.

2. Lier $f(z)$ et $f(z+1)$ et en déduire un développement asymptotique à deux termes de $f(z)$ quand z tend vers -1.

3. Donner un équivalent de $f(z)$ quand $Re(z)$ tend vers $+\infty$.

Ex 5 : Soit $f : x \mapsto \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}} dy$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$; calculer $f(0)$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est solution de $xy'' + y' + xy = 0$.

4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$.

Ex 6 :

1. Montrer que $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soient $f(x) = \left[\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt\right]^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$.

   a. Montrer que $f,\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et calculer leurs dérivées.

   b. Simplifier $f' + g'$.

   c. Calculer $g(0)$ et $\displaystyle\lim_{+\infty} g$.

   d. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2} dt$.

Ex 7 : On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $z(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}}dt$ quand l'intégrale existe.

1. Justifier l'existence de $z(0)$ et montrer que $z(0) = \sqrt{\pi}$.

2. Montrer que z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = -\frac{1}{2(x+i)}z(x)$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la partie réelle et imaginaire de $-\frac{1}{2(x+i)}$. En déduire $z(x)$.

Ex 8 : Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\ln(t)}{1+t^x}dt = 0$.

Ex 9 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère $f(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

1. Montrer que l'intégrale converge si et seulement si $\alpha > 0$.

2. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$.

4. Grâce à une intégration par parties, montrer que pour $\alpha > 0$, $f(\alpha+2) = \frac{\alpha}{\alpha+1}f(\alpha)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f(n)$ et exprimer le résultat à l'aide de factoriels.

6. Donner un équivalent de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

Ex 10 : Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t-1}dt$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

3. Calculer $f(x+1) - f(x)$ pour $x > -1$.

4. En déduire une expression de $f(x)$ sous forme de somme.

Ex 11 : (*) Soit $F : a \mapsto \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(a^2-x^2)}}$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Déterminer $\lim_{+\infty} F$ et $\ell = \lim_{0^+} F$.

3. Donner un équivalent en 0^+ de $F - \ell$.

Ex 12 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{a\to 0} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}}dx$; *2.* $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+ixt)}$; *3.* $\lim\limits_{a\to 0} \frac{1}{a}\int_0^{\pi} \sin(a\sin(x))dx$; *4.* $\lim\limits_{a\to 0^+} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+ax+e^a x^2}}dx$ (s'aider du changement de variable $x = \mathrm{sh}\,(t)$.

Ex 13 : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}$ est intégrable sur $]0,1]$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.

3. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Ex 14 : Soit $x \in \mathbb{R}$ et on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de g et montrer que g est continue sur $\mathcal{D}$.

2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ et déterminer g'.

3. Que vaur $g(0)$? En déduire g.

Ex 15 : Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt^2)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Donner pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^{(k)}(0)$ puis donner, si possible, le développement en série entière de F.

Ex 16 : Étudier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer à l'aide d'une dérivation par rapport au paramètre que l'on justifiera.

1. (*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$; *2.* $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos^2(t) + x^2\sin^2(t)\right) dt$; *3.* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\mathrm{sh}t}{t} dt$; *4.* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$.

Ex 17 : On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} dt$ et $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dt$.

1. Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$. On admet que F l'est aussi.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ G(x) = xG(1)$.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq G(x) - F(x) \leq \frac{\pi}{2}$. En déduire que $F(x)$ est équivalente à $xG(1)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée seconde est donnée par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ F''(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{1+t^2} dt$.

5. Montrer que F est solution de l'équation différentielle $y''(x) - 4y(x) = \pi - 4xG(1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. En déduire une expression de F sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}$.

Ex 18 : Soit $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x+t|}\cos(x+t)}{\sqrt{|t|}(1+|t|)} dt$.

1. Existence et continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ex 19 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et on pose $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.

1. Quel est la domaine de définition de I et déterminer $I(0)$.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$.

3. Étudier la parité de I.

4. Calculer $I(\alpha)$ en fonction de α.

Ex 20 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t^2)^n}$.

1. Calculer $I_1(x)$.

2. Montrer que I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n' = -nI_{n+1}$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} I_n(x) = 0$.

4. En déduire l'expression de $I_n(x)$.

Ex 21 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan(t))}{\tan(t)} dt$.

1. Pour $x \geq 0$, calculer $g(x)$.
2. Résoudre l'équation $g(x) = \pi/2$.
3. En déduire l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\cos(t)}{\sin(t)} dt$.
4. Pour $a > 0$ et $b > 0$, calculer $H(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(au)\operatorname{Arctan}(bu)}{u^2} du$.

Ex 22 : (*) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 2$. On suppose par l'absurde que P ne possède pas de racines dans $\mathbb{C}$. Soit $F : r \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{r^n e^{in\theta}}{P(re^{i\theta})} d\theta$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que F est constante.
3. Conclure en regardant le comportement de F en 0 et $+\infty$.

Ex 23 : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t+x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x} dt$, pour $x > 0$.

1. Montrer que $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \tilde{f}(x)$.
3. On suppose $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$. Trouver un équivalent de $\tilde{f}$ en $+\infty$ (en précisant une condition sur f).

Ex 24 : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout k de $\mathbb{N}$, $t \mapsto t^k f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t) dt$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On appelle g la transformée de Fourier de f.
2. On note $\alpha_k = \int_{\mathbb{R}} |t^k f(t)| dt$ et on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha_k \leq k^k$. Montrer que g est développable en série entière sur un intervalle $]-A, A[$ à préciser.
3. Calculer g lorsque $f = t \mapsto 1_{t \geq 0} e^{-at}$, puis en déduire $\int_{\mathbb{R}} f_n(t) e^{-itx} dt$ quand $f_n : t \mapsto t^n 1_{t \geq 0} e^{-at}$.

Ex 25 : (*) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, strictement positive et intégrable. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt$. Déterminer la limite de g en 0 et $+\infty$.

Ex 26 : (*) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $F(x) = \int_a^b f(t) e^{-itx} dt$, avec $a < 0 < b$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.
2. Montrer que $F(x) = \dfrac{f(a)e^{-iax} - f(b)e^{-ibx}}{ix} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^2/2} dt$.
4. Soit $g(x) = \int_a^b f(t) e^{-ixt^2/2} dt$. Montrer que : $g(x) = \dfrac{I.f(0)}{\sqrt{x}} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Ex 27 : (*) (Fubini) Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $x \in [a,b]$, on pose $H(x) = \int_a^x \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$ et $G(x) = \int_c^d \left(\int_a^x f(x,y) dx \right) dy$. En dérivant H et G, montrer que : $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$.

Ex 28 : (*) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ T-périodique. Montrer que : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) g(\lambda t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^{+\infty} f \right) \left(\int_0^T g \right)$.