13-Espaces euclidiens

<u>Ex 1</u> : On définit une application $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ par $\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})Q(\mathrm{e}^{-i\theta})\,\mathrm{d}\theta$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale pour ce produit scalaire.

<u>Ex 2</u> : Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ une base orthonormée de E, et F le sous-espace vectoriel d'équations dans $\mathcal{B}$: $\begin{cases} x+y+z+t & = & 0 \\ x+2y+3z+4t & = & 0 \end{cases}$.

1. Trouver une base orthonormée de F.

2. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F.

3. Calculer $d(e_1, F)$.

<u>Ex 3</u> : Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit la fonction suivante : $\forall (f,g) \in E^2 : \quad < f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$

1. Montrer que cette fonction est un produit scalaire.

2. Soit $F = \{f \in E : \forall x \in [0,1] \quad f(x) = 0\}$. Calculer $F^\perp$.

3. Que vaut $F + F^\perp$.

<u>Ex 4</u> : Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $x_0 \in E$.

1. Montrer que l'application $x \mapsto (x_0|x)$ est continue.

2. Soit F une partie quelconque de E. Montrer que $F^\perp$ est fermé.

3. Soit F une partie de E. Comparer $F^\perp$ et $(\overline{F})^\perp$.

<u>Ex 5</u> : Soit E un espace préhilbertien et H une partie convexe et compacte de E. Soit $x \in E$.

1. Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $d(x,H) = \|x - h_0\|$. On pourra utiliser pour $h_0, h_1 \in H$ la fonction $q : t \mapsto \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2$.

2. Montrer que h_0 est caractérisé par la condition : $\forall h \in H,\ (x - h_0|h - h_0) \geq 0$ (on pourra utiliser $t \mapsto q(t)$).

<u>Ex 6</u> : Soit $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :
$\forall i,j \in [\![1,p]\!],\ i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j\rangle < 0$. On pose $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| x_i$, avec $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$.

1. Comparer $\|x\|$ et $\|y\|$.

2. Montrer que si $x = 0$, alors les λ_i sont tous nuls ou tous non nuls.

3. Montrer que toute sous-famille à $p-1$ vecteurs des x_i est libre.

4. Donner un exemple d'une telle famille dans $\mathbb{R}^2$, avec $p = 3$.

5. (*) Montrer qu'il existe une famille $(x_1, ..., x_{n+1})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses.

<u>Ex 7</u> : *1.* On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A,B) \mapsto tr(A^TB)$,Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

2. Calculer $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$.

Ex 8 : Soit $\mathcal{U} = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$ une famille d'un espace euclidien E et $\theta : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R}^q \\ x & \mapsto & ((x|u_1), (x|u_2), \ldots, (x|u_q)) \end{cases}$.
Montrer que θ est surjective, si et seulement si, la famille $\mathcal{U}$ est libre.

Ex 9 : **(CCP 81 et 82)** On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le produit scalaire : $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ (A|B) = tr(A^T B)$.
Soient $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ et T^+ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

1. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\varphi(A, A') = aa' + bb' + cc' + dd'$. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel.

3. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

4. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

5. Calculer $d(J, \mathcal{F})$ et $d\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, T^+\right)$.

Ex 10 : *1.* Soit $(a_0, \ldots a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. À quelle condition $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?

2. On suppose cette condition réalisée et on note $(\cdot|\cdot)$ ce produit scalaire. Donner une base orthonormée.

3. Montrer que $\mathcal{F} = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$ est un espace vectoriel et donner $\dim(\mathcal{F})$.

4. Déterminer la distance de X^n à $\mathcal{F}$.

Ex 11 : (*) On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ et on note $\|\ .\ \|_2$ la norme associée. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que :
$\forall f \in F,\ \|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$.

1. Montrer que $F \neq E$.
2. Soit $(f_1, ..., f_n)$ une famille orthonormale de F. Montrer que :
   $\forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{R},\ |\sum_{i=1}^n a_i f_i| \leq C\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.
3. En déduire que F est de dimension finie majorée par C^2.

Ex 12 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

1. Calculer A_n en distinguant deux cas selon la parité de n. On donne $A_0 = 1$.

2. On pose $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$. Vérifier que $(.|.)$ est un produit scalaire.

3. Calculer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

4. Soit $\Phi : P \mapsto XP' - P''$. Montrer que Φ est autoadjoint pour ce produit scalaire.

5. Soit Φ_n l'endomorphisme induit par Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que Φ_n est diagonalisable et déterminer son spectre.

6. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique polynôme H_n de coefficient dominant un tel que $\Phi(H_n) = nH_n$. Montrer que $d^\circ(H_n) = n$.

7. Montrer que $x \mapsto e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$ est polynomiale de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

8. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$.

9. Montrer que la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

Ex 13 : Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $[u^2 = 0 \text{ et } u + u^* \in GL(E)]$ si et seulement si $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$.

Ex 14 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soient u et v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (u \otimes v)(x) = \langle x, v \rangle u$.

1. Déterminer $\operatorname{rg}(u \otimes v)$.
2. Donner les éléments propres de $u \otimes v$. L'endomorphisme $u \otimes v$ est-il diagonalisable ?
3. Calculer $(u \otimes v)^2$ et retrouver le résultat de la question précédente.
4. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note g^* son adjoint.
   Montrer que g commute avec $u \otimes v$ ssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \alpha u$ et $g^*(v) = \alpha v$.

Ex 15 : Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f^*)$.
2. On suppose que $f \circ f^* = f^2$. Montrer que $f = f^*$.

Ex 16 : (*) Soient E un espace euclidien, $(x_0, a, b) \in E^3$ tel que $x_0 \neq 0$. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(x_0) = a$ et $u^*(x_0) = b$ si et seulement si $(x_0|a) = (x_0|b)$.

Ex 17 : Soit $A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\inf_{M=[m_{ij}]_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{S}} \sum_{1 \le i,j \le n} (a_{ij} - m_{ij})^2$, avec $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.

Ex 18 : Soient p et q deux projections orthogonales d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme autoadjoint.
2. Montrer que $(\operatorname{Ker} q + \operatorname{Im} p)^\perp = \operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$.
3. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Ex 19 : On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel.

1. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t = x-y+z-t = 0\}$.
   Déterminer la matrice de la projection orthogonale et de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base cononique de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer la distance de $(1, 1, 1, -1)$ à F.
3. Déterminer $F^\perp$.
4. Déterminer les endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ qui commutent avec tout symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^4$.

Ex 20 : (*) Soit $H = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 1\}$. Déterminer $\inf_{f \in H} \int_0^1 (f^2(t) + f'^2(t))dt$.

Ex 21 : ***1.*** Montrer que l'ensemble des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.
2. Si A et B sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $|||p_A - p_B||| \le 1$, puis que $\dim(A) = \dim(B)$ si $|||p_A - p_B||| < 1$.

Ex 22 : Reconnaître les applications suivantes dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 17 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 17 \end{pmatrix}, \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ex 23 : Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dans $O_n(\mathbb{R})$.

Ex 24 : Soient $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E et $u \in \mathcal{L}(E)$. $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u(e_i)|f_j)^2 = tr(u^* \circ u)$.

Ex 25 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r telle que $A^T A = A^3$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(A^3)$.

2. Montrer qu'il existe $B \in O_r(\mathbb{R})$ tel que $B^3 = I_r$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Ex 26 : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Donner les relations entre a, b, c pour que M soit dans $SO_3(\mathbb{R})$.

$$\text{On donne l'identité : } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ac+ab+cb).$$

2. On pose $\alpha = a+b+c$ et $\beta = ac+ab+cb$. D'après la question précédente, quelles sont les valeurs de α et β pour que M soit dans $SO_3(\mathbb{R})$?

3. Montrer que M est dans $SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $k \in [0, 4/27]$ tel que a, b, c soient les racines de $X^3 - X^2 + k$.

4. Déterminer les triplets (a, b, c) tels que $a = b$ et $M \in O_3(\mathbb{R})$.

Ex 27 : Soit $n > 1$ et $A \in O_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un réel α vérifiant $(A - \alpha I_n)^2 = 0$.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour α ?

2. Si $\alpha = 1$. Simplifier $A^T(A - I_n)^2$, puis en déduire $(A - I_n)^T(A - I_n) = 0$. En déduire A.

3. Donner toutes les solutions de l'équation.

Ex 28 : Soit $U \in S_n(\mathbb{R})$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice antisymétique V telle que : $U + V \in O(n)$.

1. On suppose que U convient. Montrer que : $UV = VU$ et $I_n = U^2 - V^2$.

2. (*) Montrer que si λ est dans $Sp(U)$, alors λ est dans $[-1, 1]$ et que si λ est dans $]-1, 1[$, alors $\mathrm{Ker}\,(U - \lambda I_n)$ est de dimension paire.

3. Conclure.

Ex 29 : (*) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Pour $f \in O(E)$, on pose $F_f = \mathrm{Ker}\,(f - Id_E)$.

1. Soit $f \in O(E) \setminus \{Id_E\}$ et $x \in E \setminus F_f$. Montrer que $H = \{y \in E,\ \|x - y\| = \|y - f(x)\|\}$ est un hyperplan. Soit r la réflexion d'hyperplan H, montrer que F_f est strictement contenu dans $F_{r\circ f}$.

2. Montrer que tout élément de $O(E)$ est la composée d'au plus n réflexions.

Ex 30 : Soient E un espace euclidien et $u \in O(E)$. Montrer que $u^2 = Id_E$ si et seulement si u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$.

Ex 31 : Soient $(e_1, ..., e_n)$ une base d'un espace euclidien E et $(f_1, ..., f_n)$ telles que :
$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \langle e_i, e_j \rangle = \langle f_i, f_j \rangle$. Montrer qu'il existe $f \in O(E)$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = f_i$.

Ex 32 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $MM^T = M^TM$ et $M^2 = -I_n$. Montrer que : $M \in O_n(\mathbb{R})$.

Ex 33 : Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E et $\varphi \in O(E)$ telle que $\varphi(F) = F^{\perp}$.
On note respectivement p et $p_{\perp}$ les projections orthogonales sur F et $F^{\perp}$.
Enfin pour $x \in E$ on pose $f(x) = \varphi\big(p(x)\big) + \varphi^{-1}\big(p_{\perp}(x)\big)$.

1. Montrer que E est de dimension paire et que $\dim E = 2\dim F$.
2. Montrer que f est la symétrie vectorielle par rapport à $F_1 = (\varphi + \mathrm{Id}_E)(F)$ et parallèlement à $F_2 = (Id_E - \varphi)(F)$.
3. Montrer que f est la symétrie orthogonale par rapport à $(\varphi + \mathrm{Id}_E)(F)$.

Ex 34 : Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 + 4I_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad M^TM = MM^T \quad (*)$.

1. Soit $A = M^TM$. Montrer que $A^2 = 16I_2$, puis donner le spectre de A et en déduire que $A = 4I_2$.
2. Montrer que la matrice $M/2$ est orthogonale.
3. En déduire toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient les conditions $(*)$.

Ex 35 : [Inégalité d'Hadamard] Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$. Nous voulons démontrer :
$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2}$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Les vecteurs colonnes $(C_1, ..., C_n)$ de A forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on appelera $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{D}$ une base d'orthonormalisation obtenue par le procédé de Gram-Schmidt de $\mathcal{C}$.
   a. Que dire de $P_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$? Préciser ses éléments diagonaux.
   b. En utilisant des matrices de passage, montrer l'inégalité d'Hadamard.
2. Étudier le cas d'égalité.

Ex 36 : Montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Ex 37 : Soit E un espace vectoriel euclidien et $s \in S(E)$. Montrer que s est k-lipschitzienne si et seulement si : $\forall \lambda \in Sp(s),\ |\lambda| \leq k$.

Ex 38 : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont le spectre avec répétition est $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Montrer que $\sum_{k=1} \lambda_k^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2$.

Ex 39 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$,et p un projecteur orthogonal de E de rang r tel que $1 \leq r \leq n-1$. Soit φ définie sur $\mathcal{S}(E)$ par $f \mapsto pfp$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ et déterminer son rang.

Ex 40 : Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$.

1. Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ et F un sous-espace de E stable par f. Montrer que F admet un supplémentaire stable par f.
2. On note, pour x et $y \in E$, $(x \mid y) = \displaystyle\sum_{g \in G} \langle g(x), g(y) \rangle$. Montrer que ceci définit un produit scalaire.
3. Soit F un sous-espace de E stable par tout $g \in G$. Montrer que F admet un supplémentaire stable par tout $g \in G$.

Ex 41 : Soient E un espace euclidien et a, b deux vecteurs non nuls de E. Soit φ l'endomorphisme de E défini par $\varphi(x) = x + (x|a)b$. Montrer que φ est un endomorphisme autoadjoint si et seulement s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $b = \gamma a$.

Ex 42 : Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que u possède deux valeurs propres réelles non nulles de signes opposés. Montrer qu'il existe $z \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(z)$ et z soient orthogonaux.
2. On suppose u autoadjoint de trace nulle. Montrer qu'il existe $z \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(z)$ et z soient orthogonaux.
3. On suppose que u est simplement de trace nulle, montrer que la conclusion précédente demeure. On pourra introduire la matrice A canoniquement associée à u et l'endomorphisme v canoniquement associé à $B = A + A^T$.

Ex 43 : On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \int_0^1 PQ$.
On pose l'endomorphisme $d : P \mapsto X(1-X)P'' - (2X-1)P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (d(P)|Q) = -\int_0^1 x(1-x)P'(x)Q'(x)dx$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(d)$. Montrer que : $Sp(d) \subset \mathbb{R}_-$.
3. Montrer que d est diagonalisable.
4. $\phi : P \mapsto d(P(1-X))$ est-elle diagonalisable ?

Ex 44 : (*) Soit E espace euclidien et $u, v \in S^+(E)$ tels qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{2p} = v^{2p}$. Montrer que : $u = v$.

Ex 45 : Soit S une matrice symétrique réelle. Montrer que : $S + iI_n \in GL_n(\mathbb{C})$.

Ex 46 : Soit A une matrice symétrique réelle telle que : $\exists k \in \mathbb{N},\ A^k = I_n$. Calculer A^2.

Ex 47 : Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\Phi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 P(t)t^k \,\mathrm{d}t \right) X^k$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$.
2. Écrire la matrice M de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier que M est diagonalisable.
3. Soit $U = (u_0, \dots, u_n)^T \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $U^T M U = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} u_k t^k \right)^2 dt$. En déduire que toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.
4. Montrer que la plus petite valeur propre de M tend vers 0 quand $n \to +\infty$ (utiliser la trace).

Ex 48 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^2 + A^T = I_n$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 4. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que : 0 et 1 ne sont pas dans $Sp(A)$ (considérer $X^T A X$, avec X bien choisi).
3. Montrer que A est symétrique et expliciter sa forme.
4. Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A^2 + A^T = I_n$.

Ex 49 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que : $\sqrt[n]{\det(A)} \le \frac{1}{n} tr(A)$. Étudier le cas d'égalité.

Ex 50 : (*) Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P^T P$ et $B = P^T DP$.
2. En déduire que pour $U, V \in S_n^+(\mathbb{R})$, on a : $tr(UV) \geq 0$.

Ex 51 : (*) Soit $n \geq 2$. Pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit A_1 la matrice obtenue en ôtant à A sa première ligne et sa première colonne. On note $(.,.)$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A_1 \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.
2. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que : $(Ax, x)(A^{-1}y, y) \geq (x, y)^2$.
3. Trouver $y \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall A \in S_n^{++}(\mathbb{R}),\ \min\left\{\frac{(Ax,x)}{(x,y)^2};\ x \in \mathbb{R}^n,\ (x, y) \neq 0\right\} = \frac{\det(A)}{\det(A_1)}$.
4. Pour $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, comparer $\frac{\det(A+B)}{\det(A_1+B_1)}$ et $\frac{\det(A)}{\det(A_1)} + \frac{\det(B)}{\det(B_1)}$.

Ex 52 : (*) Montrer que $A = [\min(i, j)]_{1\leq i,j\leq n}$ est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Ex 53 : Montrer que f, canoniquement associé à $A \in S_n(\mathbb{R})$, vérifiant $A^4 = A$ et $trA = n - 1$, est un projecteur orthogonal dont on précisera le rang..

Ex 54 : Soit E un espace euclidien de dimension n.

1. Soit $v \in S(E)$ tel que : $\forall x \in E,\ (v(x)|x) = 0$. Montrer que $v = 0$.
2. Soient $u_1, ..., u_p \in S(E)$ tels que $rg(u_1) + ... + rg(u_p) = n$ et : $\forall x \in E,\ \sum_{i=1}^p (u_i(x)|x) = (x|x)$.
   - a. Montrer que $u_1 + ... + u_p = Id_E$.
   - b. Montrer que $\mathrm{Im}\,(u_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\,(u_p) = E$.
   - c. Montrer que pour tout i de $[\![1, p]\!]$, u_i est la projection sur $\mathrm{Im}\,(u_i)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(u_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\,(u_{i-1}) \oplus \mathrm{Im}\,(u_{i+1}) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\,(u_p)$.
   - d. Montrer que les $\mathrm{Im}\,(u_i)$ sont orthogonaux entre eux deux à deux.

Ex 55 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ semblable à son inverse. Montrer que $tr(A^2) \geq n$ et qu'il y a égalité si et seulement si A est une symétrie orthogonale.

Ex 56 : (*) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B - A$ soit dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) \leq \det(B)$ (traiter d'abord les cas $\det(B) = 0$ et $B = I_n$).

Ex 57 : Soit $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} I_p & C \\ C^T & I_q \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : λ est dans $Sp(B)$ si et seulement si $-\lambda$ l'est et que λ et $-\lambda$ ont la même multiplicité.
2. En déduire que $\det(A) \leq 1$.
3. Soit $U \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $V \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $U = V^2$.
4. Soient $n \geq 2$, $p \in [\![1, n-1]\!]$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On écrit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$, avec $B \in S_p(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(B) > 0$, puis que $\det(A) \leq \det(B)\det(D)$.

Ex 58 : Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que : $\det(A) + \det(B) \leq \det(A + B)$ (on pourra diagonaliser A dans une base orthonormée).

Ex 59 : Soit $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^n = 0\}$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{N}$. Montrer que $F \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. En déduire que $\dim(F) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Ex 60 : (*) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de leur produit sclaire canonique.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A^T A)$. En déduire que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^T A)$ (noté r dans la suite).

2. Montrer qu'il existe une famille orthonormée $(y_1, ..., y_r)$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que la matrice Y de colonnes $y_1, ..., y_r$ vérifie $Y^T A^T A Y = D$ où D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

3. Montrer qu'il existe U et V orthogonales et Λ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ayant des coefficients nuls sauf sur la diagonale, et telles que $A = U\Lambda V$.

Ex 61 : Soit $\Phi \in \mathcal{L}(S_n(\mathbb{R}))$ telle que $\Phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que Φ est un isomorphisme.

2. Montrer que $S_n^{+}(\mathbb{R})$ est fermé dans $S_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $\Phi(S_n^{+}(\mathbb{R})) = S_n^{+}(\mathbb{R})$.

Ex 62 : Soient $A, B \in S_n^{+}(\mathbb{R})$.

1. Soit $(F_1, ..., F_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} (F_i | AF_i)$.

2. Montrer que $tr(AB) \leq tr(A)tr(B)$.

Ex 63 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que : $A = B^2$.

2. Soit $C \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que AC est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AD + DA = 0$. Montrer que $D = 0$.

4. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AC + CA = B$.

Ex 64 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est antisymétrique si et seulement si :
$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T M X = 0$.

Ex 65 : L'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.

1. Soient A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X une colonne propre de A^2. Montrer que les sous-espaces $\operatorname{Vect}(X, AX)$ et $(\operatorname{Vect}(X, AX))^\perp$ sont stables par A.

2. Montrer par récurrence sur n que, pour tout matrice antisymétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale par blocs avec des blocs diagonaux nuls ou de la forme $\Delta_a = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

3. En déduire que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et a son spectre inclus dans $i\mathbb{R} = \{iy \,|\, y \in \mathbb{R}\}$.

4. (*) Montrer que pour $S \in S_n^{+}(\mathbb{R})$, on a : $\det(A + S) \geq \det(S)$.

Ex 66 : Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$,

1. Soient $\lambda \in \operatorname{sp} u$ et x un vecteur propre associé. Montrer que $\|u^*(x)\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$. Montrer que u et u^* ont les mêmes espaces propres.

2. Montrer que u et u^* ont les mêmes espaces propres.

3. Montrer que les espaces propres de u sont orthogonaux.

4. Montrer que, si u est diagonalisable, alors u est autoadjoint.